**В. В. Чистяков**

*Национальный исследовательский университет*
*Высшая школа экономики – Нижний Новгород*
*vchistyakov@hse.ru*

# НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ МОДУЛЯРНО СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В рамках теории метрических пространств теорема Банаха о сжимающих отображениях обобщалась в различных направлениях [1, 2]. Цель работы — представить результат о существовании неподвижных точек нелинейных отображений в контексте теории метрических модуляр [3–6], развивающей одновременно и теорию модулярных пространств (Орлича) на линейных пространствах и теорию метрических пространств.

1. *Модулярой* на непустом множестве $X$ называется отображение $w:(0,\infty)\times X\times X\to[0,\infty]$, удовлетворяющее для всех $x,y,z\in X$ следующим трем условиям (в которых для $\lambda>0$ положено $w_\lambda(x,y)=w(\lambda,x,y)$):

(i) $x=y$, если и только если $w_\lambda(x,y)=0$ для всех $\lambda>0$;

(ii) $w_\lambda(x,y)=w_\lambda(y,x)$ для всех $\lambda>0$;

(iii) $w_{\lambda+\mu}(x,y)\leqslant w_\lambda(x,z)+w_\mu(y,z)$ для всех $\lambda>0$ и $\mu>0$.

Модуляра $w$ на $X$ называется:

(а) *строгой*, если $w_\lambda(x,y)\neq 0$ для всех $\lambda>0$ и $x\neq y$;

(б) *выпуклой*, если для всех $\lambda,\mu>0$ и $x,y,z\in X$ вместо неравенства в (iii) выполняется неравенство

(iv) $w_{\lambda+\mu}(x,y)\leqslant \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\,w_\lambda(x,z)+\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\,w_\mu(y,z)$.

2. Каноническим примером строгой выпуклой модуляры на метрическом пространстве $(X,d)$ с метрикой $d$ является отображение $w_\lambda(x,y)=d(x,y)/\lambda$, где $\lambda>0$ и $x,y\in X$, которое

естественно интерпретировать как поле (абсолютных значений средних) скоростей между точками $x$ и $y$. В этом смысле аксиомы (i)–(iii) можно описать следующим образом: (i) точки $x$ и $y$ совпадают, когда из одной в другую можно попасть за любое время $\lambda$, двигаясь со скоростью $w_\lambda(x,y)=0$, т. е. оставаясь неподвижным все время; (ii) скорость за любое время $\lambda$ при движении из $x$ в $y$ совпадает со скоростью движения за это же время в обратном направлении; (iii) при движении из $x$ в $y$ за одно и то же время $\lambda+\mu$ скорость $w_{\lambda+\mu}(x,y)$ при "прямом" движении из $x$ в $y$ не превосходит хотя бы одну из скоростей $w_\lambda(x,z)$ на участке из $x$ в $z$ за время $\lambda$ или $w_\mu(z,y)$ на участке из $z$ в $y$ за время $\mu$, а потому, и сумму этих скоростей.

В общем случае модуляра представляет собой некоторое семейство обобщенных (неклассических) средних скоростей; например, если $w_\lambda(x,y)=\infty$ при $0<\lambda\leqslant d(x,y)$ и $w_\lambda(x,y)=0$ при $\lambda>d(x,y)$, то $w$ есть нестрогая модуляра на $(X,d)$.

Еще один пример. Пусть $X=Y^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей $\{x_n\}=\{x_n\}_{n=1}^\infty$ в множестве $Y$, где, как обычно, $x_n=x(n)$ для $x\in X$ и $n\in\mathbb{N}$, и для всех $n\in\mathbb{N}$ заданы две неубывающие непрерывные неограниченные функции $\Phi_n,\varphi_n:[0,\infty)\to[0,\infty)$, обращающиеся в нуль лишь в нуле, причем все $\varphi_n$ — выпуклые. Если $d$ — метрика на $Y$, то

$$w_\lambda(x,y)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Bigl(\frac{d(x_n,y_n)}{\lambda}\Bigr)^{1/n}\quad\text{и}\quad w_\lambda(x,y)=\sum_{n=1}^\infty\Phi_n\Bigl(\frac{d(x_n,y_n)}{\varphi_n(\lambda)}\Bigr)$$

есть модуляры на $X$, где $\lambda>0$ и $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in X$.

3. Основным свойством любой модуляры $w$ на множестве $X$ является невозрастание функции $\lambda\mapsto w_\lambda(x,y)$ на $(0,\infty)$ при любых $x,y\in X$, а в случае выпуклой модуляры $w$ еще и функции $\lambda\mapsto\lambda w_\lambda(x,y)$, так что в $[0,\infty]$ существуют предел

слева $w_{\lambda-0}(x,y)$ и предел справа $w_{\lambda+0}(x,y)$, которые связаны соотношениями [5]: $w_{\lambda+0}(x,y) \leqslant w_\lambda(x,y) \leqslant w_{\lambda-0}(x,y)$.

Для модуляры $w$ на $X$ и фиксированном $x^\circ \in X$ множества

$$X_w = \{x \in X : w_\lambda(x,x^\circ) \to 0 \text{ при } \lambda \to \infty\} \quad \text{и}$$

$$X_w^* = \{x \in X : \exists\, \lambda > 0 \text{ такое, что } w_\lambda(x,x^\circ) < \infty\}$$

называются *модулярными пространствами* (вокруг $x^\circ$).

Ясно, что $X_w \subset X_w^*$, а в случае выпуклой модуляры $w$ эти два пространства совпадают. В [3–5] показано, что $X_w$ есть метрическое пространство с (неявно заданной) метрикой

$$d_w(x,y) = \inf\{\lambda > 0 : w_\lambda(x,y) \leqslant \lambda\}, \qquad x,y \in X_w.$$

В случае выпуклой модуляры $w$ на $X$ метрику на модулярном пространстве $X_w^* = X_w$ можно определить по правилу

$$d_w^*(x,y) = \inf\{\lambda > 0 : w_\lambda(x,y) \leqslant 1\}, \qquad x,y \in X_w^*.$$

Следует отметить, что для $x,y \in X_w^*$ неравенства $d_w(x,y) < 1$ и $d_w^*(x,y) < 1$ эквивалентны и при выполнении любого из них $(d_w(x,y))^2 \leqslant d_w^*(x,y) \leqslant d_w(x,y)$; если же $d_w(x,y) \geqslant 1$ или $d_w^*(x,y) \geqslant 1$, то $(d_w(x,y))^2 \geqslant d_w^*(x,y) \geqslant d_w(x,y)$.

Кроме того, что модуляры позволяют определять весьма нетривиальные метрики на всевозможных (функциональных) модулярных пространствах, они дают возможность ввести в модулярном пространстве новый тип сходимости, более слабой, чем сходимость по метрике, порожденной модулярой.

Всюду ниже для определенности предполагается, что все модуляры $w$ на $X$ *выпуклые* (регулярный случай), хотя многие (но не все) понятия и утверждения переносятся и на случай невыпуклых модуляр $w$.

4. Известно [4–5], что для последовательности $\{x_n\}$ из $X_w^*$ и $x \in X_w^*$ условие сходимости $d_w^*(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ эквивалентно условию $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $\lambda > 0$.

Скажем, что последовательность $\{x_n\}$ из $X_w^*$ *модулярно сходится* к элементу $x \in X$, если найдется число $\lambda > 0$ (зависящее от $\{x_n\}$ и $x$), такое, что $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Любой такой элемент $x$ называется *модулярным пределом* $\{x_n\}$.

Ясно, что из метрической сходимости вытекает модулярная сходимость (но не наоборот [7–8]). Модулярная сходимость обладает следующими свойствами. Модулярные пространства $X_w$ и $X_w^*$ замкнуты относительно модулярной сходимости. Для строгой модуляры $w$ модулярный предел определен однозначно (если существует). Метрическая сходимость на $X_w^*$ (относительно $d_w^*$) совпадает с модулярной сходимостью тогда и только тогда, когда модуляра $w$ удовлетворяет следующему $\Delta_2$-условию: если $\{x_n\} \subset X_w^*$, $x \in X_w^*$ и $\lambda > 0$ такие, что $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$, то $w_{\lambda/2}(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Если модуляра не удовлетворяет $\Delta_2$-условию, то топология модулярной сходимости неметризуема.

Аналогом полноты метрического пространства является следующее понятие.

Модулярное пространство $X_w^*$ называется *модулярно полным*, если из условий $\{x_n\} \subset X_w^*$ и $\lim_{n,m\to\infty} w_\lambda(x_n, x_m) = 0$ при некотором $\lambda > 0$ вытекает, что существует такой элемент $x \in X_w^*$, что $\lim_{n\to\infty} w_\lambda(x_n, x) = 0$.

5. Опишем в терминах исходной (выпуклой) модуляры $w$ на $X$ непрерывные по Липшицу в метрике $d_w^*$ отображения $T : X_w^* \to X_w^*$. Пусть $k > 0$ — некоторая постоянная.

**Теорема 1 ([8]).** *Условие Липшица* $d_w^*(Tx, Ty) \leqslant k\, d_w^*(x, y)$ *для всех* $x, y \in X_w^*$ *выполнено тогда и только тогда, когда для* *всех* $x, y \in X_w^*$ *имеет место неравенство* $w_{k\lambda+0}(Tx, Ty) \leqslant 1$ *для всех тех* $\lambda > 0$, *для которых* $w_\lambda(x, y) \leqslant 1$.

Эта теорема мотивирует следующее определение [7].

Отображение $T : X_w^* \to X_w^*$ называется *модулярно сжимающим*, если существуют постоянные $0 < k < 1$ и $\lambda_0 > 0$, такие, что $w_{k\lambda}(Tx, Ty) \leqslant w_\lambda(x, y)$ для всех $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ и $x, y \in X_w^*$.

Основной результат — следующая теорема о существовании неподвижных точек модулярно сжимающих отображений.

**Теорема 2 ([8]).** *Пусть* $w$ *— строгая выпуклая модуляра на множестве* $X$, *такая, что модулярное пространство* $X_w^*$ *модулярно полно, и* $T : X_w^* \to X_w^*$ *— модулярно сжимающее отображение, для которого при любом* $\lambda > 0$ *найдется такое* $x_\lambda \in X_w^*$, *что* $w_\lambda(x_\lambda, Tx_\lambda) < \infty$.

*Тогда* $T$ *имеет по крайней мере одну неподвижную точку, т.е.* $Tx_0 = x_0$ *для некоторого* $x_0 \in X_w^*$. *Если в дополнение модуляра* $w$ *принимает лишь конечные значения на множестве* $(0, \infty) \times X_w^* \times X_w^*$, *то последнее предположение относительно* $T$ *(о существовании* $x_\lambda$*) излишне, неподвижная точка* $x_0$ *отображения* $T$ *определена однозначно, и для любого* $y \in X_w^*$ *последовательность итераций* $\{T^n y\}_{n=1}^\infty$ *модулярно сходится к неподвижной точке* $x_0$.

В частности, теорема Банаха о сжимающих отображениях получается при рассмотрении на метрическом пространстве $(X, d)$ канонической модуляры $w_\lambda(x, y) = d(x, y)/\lambda$.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ, грант правительства РФ, дог. 11.G34.31.0057.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А. В. *Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416. – № 2. – С. 151–155.

2. Handbook of Metric Fixed Point Theory. (W. A. Kirk, B. Sims, Eds.) Kluwer, Dordrecht, 2001.

3. Чистяков В. В. *Метрические модуляры и их применение* // Докл. РАН. – 2006. – Т. 406. – № 2. – С. 165–168.

4. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces generated by $F$-modulars* // Folia Math. – 2008. – V. 15. – № 1. – P. 3–24.

5. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, I: Basic concepts* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 1–14.

6. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, II: Application to superposition operators* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 15–30.

7. Чистяков В. В. *Неподвижные точки модулярно сжимающих отображений* // Докл. РАН. – 2012. – Т. 445. – № 3. – С. 274–277.

8. Chistyakov V. V. *Modular contractions and their application* // In: Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 32. Springer Science + Business Media, New York, 2013, pp. 65–92.