УДК 330.4

© *А. Л. Чадов*

К ВОПРОСУ О КОМПЬЮТЕРНОМ ИССЛЕДОВАНИИ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ[1]

В работе рассматривается непрерывно-дискретная модель экономической динамики, которая представляет собой конкретную реализацию абстрактного функционально-дифференциального уравнения. С другой стороны, она охватывает широкий класс моделей, возникающих при исследовании реальных экономических и эколого-экономических процессов. Рассматриваемая модель содержит одновременно как уравнения, описывающие динамику показателей в непрерывном времени на конечном промежутке, так и уравнения с дискретным временем, характерным для эконометрических моделей. Для указанной системы дается постановка задачи управления и приводятся условия ее разрешимости в форме, допускающей эффективное исследование с использованием современных компьютерных технологий.

Ключевые слова: модели экономической динамики, гибридные модели, задачи управления, вычислительный эксперимент

Введение

В современных исследованиях по математической экономике продолжает возрастать потребность в более совершенных математических моделях. Наиболее популярным в теоретических и прикладных исследованиях является класс моделей динамики с дискретным временем и постоянными параметрами (коэффициентами). Задачи построения моделей с непрерывным временем при наличии непрерывных наблюдений могут решаться на основе идеи операторной интерполяции, высказанной Н.В. Азбелевым в 1988 г.

В настоящей работе рассматривается синтез моделей с дискретным временем и функционально-дифференциальных моделей с непрерывным временем. Основным аспектом такого рассмотрения выступает возможность использования в полной мере отдельно полученных к настоящему времени теоретических результатов для функционально-дифференциальных моделей [1] и для моделей в форме разностных уравнений [2]. Схожая проблематика исследуется в работах многих авторов (см., например, [3]).

§ 1. Непрерывно-дискретная модель

В работе рассматривается непрерывно-дискретная система с дискретным управлением [4] $v : \{t_0, \ldots, t_\mu\} \to R^\nu$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\mu < t_{\mu+1} = T$:

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_1 x)(t) \equiv \dot{x}(t) - (Tx)(t) = \sum\limits_{t_j<t} F_j(t)y(t_j),\ t \in [0,\, T], \\ (\mathcal{L}_2 y)(t_i) \equiv y(t_i) - \sum\limits_{t_j<t_i} B_j y(t_j) = H_i v(t_i),\ i = 1,\, 2, \ldots,\, \mu+1; \end{cases} \tag{1}$$

с фиксированным начальным состоянием:

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь T – линейный оператор, определяемый равенством $(Tx)(t) = \int_0^t d_s R(t,s)x(s)\,ds$.

Задача управления для (1) формулируется как задача достижения заданного конечного состояния:

$$x(T) = x_T,\ y(T) = y_T. \tag{3}$$

Обозначим через $C_1(\cdot,\cdot)$ матрицу Коши [5] оператора $\mathcal{L}_1$, через $C_2(\cdot,\cdot)$ – матрицу Коши [6] оператора $\mathcal{L}_2$, $V = \mathrm{col}(v(t_0), \cdots, v(t_\mu))$.

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ №10-01-96054) и компании "Прогноз".

Определим матрицы W_1 и W_2 равенствами

$$W_1V = \int_0^T C_1(T,s) \sum_{s_j<s} F_j(s) \sum_{\tau_k \leqslant s_j} C_2(s_j,\tau_k) H_k v(\tau_k)\, ds,$$

$$W_2V = \sum_{s_j \leqslant T} C_2(T,s_j) H_j v(s_j).$$

Т е о р е м а 1. *Пусть система линейных алгебраических уравнений*

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} x_T \\ y_T \end{pmatrix} \tag{4}$$

разрешима относительно вектора V. *Тогда задача управления* (1)-(3) *разрешима, каждое решение* V_0 *системы* (4) *порождает управление, решающее эту задачу.*

Обсуждаются детали компьютерной реализации алгоритмов исследования задачи управления с использованием доказательных вычислений в среде Maple.

Список литературы

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений, М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 384 с.
2. Andrianov D.L. Difference equations and the elaboration of computer systems for monitoring and forecasting socioeconomic development of the country and territories // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications, Hindawi Publishing Corporation, New York-Cairo, 2006, pp. 1231-1237.
3. Agranovich G.A. Observability criteria of linear discrete-continuous system // Functional Differential Equations, 16, 2009, No. 1, pp.35-51.
4. Максимов В.П., Чадов А.Л. Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Пермь. 2011. Вып. 2 (9). С. 13–23.
5. Максимов В.П. О формуле Коши для функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения, 1977, №4. С.601-606, 770-771.
6. Андрианов Д.Л. Краевые задачи и задачи управления для линейных разностных систем с последействием // Известия вузов. Математика, 37, 1993. №5. С. 3-16.

Поступила в редакцию 15.02.2012

A. L. Chadov

On the computer-aided techniques for studying continuous-discrete models

Dynamic model under consideration, formally speaking, is a concrete realizations of the so-called abstract functional differential equation. On the other hand, it is typical one met with in mathematical modeling economic dynamic processes. The equations of the system contain simultaneously terms depending on continuous time and discrete time typical for econometric models. For this system, control problem is considered and some conditions of the solvability are obtained. Questions of computer-aided techniques for studying these problems are discussed.

Keywords: economic dynamic models, hybrid models, control problems, computer experiment.

Mathematical Subject Classifications: 34B60, 37N35, 37N40

Чадов Алексей Леонидович, старший преподаватель кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, 614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15. E-mail: alchadov20@gmail.com

Chadov Aleksey Leonidovich, lecturer of Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, 614990, Russia, Perm, ul. Bukireva, 15