Р. О. Богомолов, В. М. Хаметов (Москва, ЦЭМИ РАН).
ε-опциональное разложение.

1. Введение. Работа, представленная данным докладом, посвящена построению ε-опционального разложения измеримых ограниченных случайных величин, которое обобщает известное опциональное разложение [1].

2. Обозначения. На стохастическом базисе $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}, P)$, где $N_0 \triangleq \{0, 1, \ldots, N\}$, задана d-мерная случайная последовательность $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$. Положим для любого $t \in N_0$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \triangleq \sigma\{S_0, S_1, \ldots, S_t\}$ и $\mathcal{F}_N^S = F$, а $f_N(S.)$ — $\mathcal{F}_N$-измеримая ограниченная случайная величина.

Пусть $\mathfrak{P}(\Omega, F)$ — множество вероятностных мер, эквивалентных мере P. Пусть $\xi(\omega)$ — ограниченная случайная величина, обозначим $\mathrm{M}^Q\xi(\omega) \triangleq \int_\Omega \xi(\omega)Q(d\omega)$, где любая $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$.

Пусть $(\gamma_t, \mathcal{F}_t)_{t\in N_1}$ ($N_1 \triangleq \{1, 1, \ldots, N\}$) — предсказуемая d-мерная последовательность, $\{\gamma_t\}_{t\in N_1}$ назовем *стратегией*. Множество стратегий обозначим U_1^N. Рассмотрим $\widetilde{U}_1^N$ — любое подмножество множества U_1^N. Обозначим $\widetilde{U}_{t+1}^N$ ($\widetilde{U}_t$) сужение $\widetilde{U}_1^N$ на $\{t+1, t+2, \ldots, N\}$ ($\{t\}$) и будем использовать обозначение $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ ($\gamma_t \in \widetilde{U}_t$).

Для любых $t \in N_0$, $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$ и $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ $\mathcal{F}_t$-измеримую функцию $I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \triangleq \mathrm{M}^Q[\exp\{f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^N(\gamma_i, \Delta S_i)\}|\mathcal{F}_t]$ назовем *оценкой* бистратегии (Q, γ_{t+1}^N), где $\Delta S_i \triangleq S_i - S_{i-1}$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$.

3. Формулировка вспомогательных результатов.

Определение. $\mathcal{F}_t^S$-измеримую функцию $\overline{V}_t$, определяемую равенством $\overline{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} I_t^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$, назовем *верхним гарантированным значением в момент времени* $t \in N_0$.

Определение. Стратегию $\gamma_1^N \in U_1^N$ назовем *допустимой*, если

$$\sup_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} \mathrm{M}^Q I_0^{Q,\gamma_{t+1}^N}(S_0) < \infty.$$

Множество допустимых стратегий обозначим D_1^N.

Теорема 1. *Пусть фильтрация $\{\mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ — универсально полна [1], функция $f_N(S_\bullet)$ — $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина. Тогда $\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t\in N_0}$ P-п. н. удовлетворяет рекуррентному соотношению*

$$\begin{aligned} \overline{V}_t &= \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} \mathrm{M}^Q t\Big[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\Big], \\ \overline{V}_t|_{t=N} &= e^{f_N(S_\bullet)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$, стратегию $\varphi_1^N \in D_1^N$ назовем *ε-оптимальной*, если выполнено неравенство $\operatorname{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} I_0^{(Q)}(S., \varphi_1^N) \leqslant \overline{V}_0 e^\varepsilon$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для любого $\varepsilon >$ 0 существует допустимая ε-оптимальная стратегия $\varphi_1^{\varepsilon,N}$ ($\in D_1^N t$), причем для любого $t \in N_1$ справедливо неравенство P-п. н.*

$$\overline{V}_t e^{\varepsilon/N} \geqslant \operatorname*{ess\,sup}_{Q\in\mathfrak{P}(\Omega,F)} \mathrm{M}^Q\Big[\overline{V}_{t+1}e^{-(\varphi_{t+1}^\varepsilon,\Delta S_{t+1})}\Big|\mathcal{F}_t^S\Big]. \tag{2}$$

4. Формулировка основного результата.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ и существуют такие $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина X_0, последовательность $\{\varphi_t\}_{t\in N_1}$, где $\varphi_t \in D_t$, и возрастающая последовательность $\{C_t\}_{t\in N_1}$, причем $C_0 = 0$, что относительно любой меры $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$ справедливо равенство $f_N(S.) = X_0 + \varepsilon + \sum_{i=1}^N(\varphi_i, \Delta S_i) - C_N$, Q-п. н.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие возрастающая последовательность* $\{C_t^\varepsilon\}_{t\in N_1}$ *(зависящая от* ε*),* $\{\varphi_t^\varepsilon\}_{t\in N_1}$ *— допустимая* ε*-оптимальная стратегия и начальный капитал* X_0*, что относительно любой меры* $Q \in \mathfrak{P}(\Omega, F)$: $f_N(S_\cdot) = X_0 + \varepsilon + \sum_{i=1}^N (\varphi_i^\varepsilon, \Delta S_i) - C_N^\varepsilon$*,* Q*-п. н., где* $X_0 = \ln \overline{V}_0$*, причем для любого* $t \in N_0$ *последовательность* $(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t)$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), а* $(\varphi_t^\varepsilon, \mathcal{F}_t)$ *— неравенству (2).*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-01-00767.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Основы стохастической финансовой математики (теория). М.: Фазис, 1998, 1017 с.

М. П. Браславская (Москва, МГУЛ). **О регрессионной модели с интервальными нечеткими числами типа 2.**

Регрессионный анализ традиционно применяется при моделировании взаимосвязи нескольких переменных для анализа этой взаимосвязи, а также для прогнозирования значений одной переменной при известных значениях других переменных. Регрессионная модель, оперирующая нечеткими числами, называется *нечеткой регрессионной моделью*. Существующие нечеткие регрессионные модели ограничиваются использованием нечетких чисел типа 1; однако нечеткие числа более высоких типов полнее отражают нечеткость, присущую информации, и в некоторых случаях предполагают построение более точных моделей. В связи с этим была разработана регрессионная модель с нечеткими числами типа 2 следующего вида: $Y = A_1 x + A_2$, где x — независимая переменная, четкое число, Y — зависимая переменная, интервальное треугольное нечеткое число типа 2, A_1, A_2 — коэффициенты регрессии, интервальные треугольные нечеткие числа типа 2.

Чтобы использовать преимущества нечетких чисел типа 2 и понизить сложность работы, присущую нечетким числам типа 2 общего вида, в модели было предложено использовать их частный случай — интервальные треугольные нечеткие числа типа 2. Интервальные нечеткие числа типа 2 несут в себе информацию о нечеткости функции принадлежности, при этом для их графического отображения достаточно двух измерений, тогда как нечеткие числа типа 2 в общем случае трехмерны. Графическое представление интервального треугольного нечеткого числа типа 2 показано на рис.

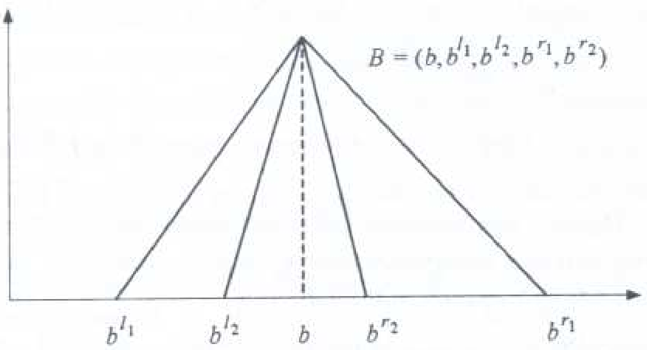

Рис. Интервальное треугольное нечеткое число типа 2

В качестве метода подгонки для разработанной регрессионной модели использовался метод наименьших квадратов. Была предложена формула расчета расстояния между двумя интервальными треугольными нечеткими числами типа 2:

$$f(B_1, B_2) = \sqrt{(b_1 - b_2)^2 + (b_1^{l_1} - b_2^{l_1})^2 + (b_1^{l_2} - b_2^{l_2})^2 + (b_1^{r_1} - b_2^{r_1})^2 + (b_1^{r_2} - b_2^{r_2})^2},$$

ISSN 0869-8325

ТОМ 18

Выпуск 1

ОБОЗРЕНИЕ ПРИКЛАДНОЙ И ПРОМЫШЛЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

В выпуске:

Секция **«Финансовая и страховая математика»**
Секция **«Прикладная вероятность и статистика»**

1 – 8 V • 2011

Восемнадцатая Всероссийская школа-коллоквиум
по стохастическим методам

Двенадцатый Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике
Весенняя сессия. НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ I

16 – 23 X • 2010

Одиннадцатай Всероссийский симпозиум
по прикладной и промышленной математике

Региональный Макросимпозиум
«Насущные задачи прикладной математики на Кубани»
Осенняя сессия. НАУЧНЫЕ ДОКЛАДЫ. ЧАСТЬ III

Редакция журнала «ОПиПМ» • МОСКВА
2011