

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Научно-учебная лаборатория
финансовой инженерии и риск-менеджмента

В.В. Науменко

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РИСКА
РЫНОЧНОЙ ЛИКВИДНОСТИ
С УЧЕТОМ ГЛУБИНЫ РЫНКА**

Препринт WP16/2007/04
Серия WP16

Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Москва
ГУ ВШЭ
2007

УДК 330.4
ББК 65в6
Н34

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

Науменко В.В. Моделирование риска рыночной ликвидности с учетом глубины рынка: Препринт WP16/2007/04. — М.: ГУ ВШЭ, 2007. — 52 с.

В.В. Науменко — инженер научно-учебной лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту факультета экономики ГУ ВШЭ, аспирант кафедры управления рисками и страхования ГУ ВШЭ.

УДК 330.4
ББК 65в6

Препринты ГУ ВШЭ размещаются на сайте:
<http://new.hse.ru/C3/C18/preprintsID/default.aspx>.

Оглавление

Введение	4
1. Методологические основы моделирования риска ликвидности	5
1.1. Концепция ликвидности	5
1.2. Измерения ликвидности	9
1.2.1. «Сжатость» рынка	11
1.2.2. Глубина рынка	12
1.2.3. Релаксация рынка	14
1.2.4. Немедленность рынка	14
2. Моделирование риска рыночной ликвидности	16
2.1. Оценка риска рыночной ликвидности	16
2.2. <i>VaR</i> и риск рыночной ликвидности	19
2.3. Учет экзогенной ликвидности (бид-аск спрэд)	23
2.3.1. Текущее или ожидаемое значение бид-аск спрэда	23
2.3.2. Квантили распределения бид-аск спрэда	23
2.4. Учет эндогенной ликвидности (эффект влияния на цену)	29
2.4.1. Стратегии ликвидации портфеля	31
2.4.2. Модель Альмгрена и Крисса	33
2.4.3. Модель Джэрроу и Субраманиана	36
2.5. Сравнение моделей риска рыночной ликвидности	44
Заключение	46
Литература	48

Введение

При управлении портфелем необходимо следить за изменением волатильности входящих в него активов, чтобы иметь представление о возможных будущих убытках. Однако потери в стоимости портфеля могут происходить не только вследствие колебаний цен. Во время ликвидации портфеля на реальных финансовых рынках цены сделок, по которым закрываются позиции, обязательно будут отличаться от текущих рыночных цен. Объяснением этому служит наличие на рынке транзакционных издержек, величина которых зависит от ликвидности рынка. В случае, когда ликвидационная стоимость портфеля отличается от его рыночной стоимости, принято говорить о подверженности финансового института риску рыночной ликвидности.

Роль риска ликвидности более всего заметна на рынках, обладающих низкой ликвидностью, что лучше всего отражается слабым объемом торговли и/или широкими бид-аск спредами. Следовательно, участники таких рынков, желающие закрыть позицию, вынуждены нести значительные потери вследствие длительного периода ожидания исполнения сделки (из-за отсутствия контрагента) или по причине немедленной ликвидации позиции по неблагоприятной цене.

Перед финансовым институтом неизбежно встает вопрос о том, как определять ликвидность рынка. В отличие от волатильности, которую принято однозначно измерять через среднеквадратичное отклонение цен за фиксированный период времени, существует множество определений ликвидности, ни одно из которых не является до конца удовлетворительным. Данное обстоятельство свидетельствует о многогранной природе ликвидности рынка, что значительно осложняет оценку и управление риском рыночной ликвидности.

Очевидно, что мы не можем заранее знать будущую ликвидационную стоимость портфеля. Лучшее, на что мы способны, — рассчитать ожидаемую стоимость, которую принесет закрытие позиций по портфелю. Для этой цели необходимо иметь представление о возникающих в процессе ликвидации портфеля издержках. Другими словами, для каждого актива нужно оценить зависимость цены сделки от объема. Речь идет об оценке различных транзакционных издержек, как фиксированных (например, комиссионные брокеру), так и меняющих свою величину в зависимости от размера выставленной заявки.

Таким образом, риск рыночной ликвидности может быть важной составляющей анализа в процессе управления портфелем. Финансовый

институт не подвергается риску ликвидности только в том случае, если планирует держать портфель до момента погашения входящих в него активов (при условии, что данные активы имеют срок погашения).

Необходимость оценки риска рыночной ликвидности и управления им значительно возросла в последнее время. Виной всему глобализация, фактически уже приведшая к формированию мировой финансовой системы. Появление беспрецедентных инвестиционных возможностей для инвесторов сопровождалось усилением роли рисков (в том числе риска рыночной ликвидности), которые ранее можно было безболезненно игнорировать. Однако ситуация с учетом риска ликвидности осложняется тем фактом, что долгое время он считался не поддающимся формальному моделированию. Еще в середине 1990-х годов такого мнения придерживались, в частности, создатели RiskMetrics.

В последние годы число сторонников этой точки зрения быстро сокращается, о чем можно косвенно судить по сильно возросшему интересу к измерению и управлению ликвидностью.

1. Методологические основы моделирования риска ликвидности

1.1. Концепция ликвидности

Прежде всего, концепция ликвидности применима как к рынкам, так и к отдельным компаниям. Ликвидность фирмы (liquidity of firms) относится к способности компании согласовывать входящие и исходящие денежные потоки для обеспечения своевременного погашения принятых на себя обязательств. Финансовый институт, сталкивающийся с проблемами невыполнения в срок платежей по своим обязательствам, подвергается так называемому риску ликвидности фондирования (funding liquidity risk). Управление этим видом финансового риска выходит за рамки данной работы, в которой рассматриваются проблемы, связанные исключительно с риском рыночной ликвидности (market/asset/product liquidity risk).

Финансовый институт подвержен *риску рыночной ликвидности*, если цена, по которой ликвидируется позиция на основе рыночной заявки, отличается от текущей рыночной цены актива.

Значительная часть непредвиденных убытков происходит либо из-за скачков цен, порожденных низкой ликвидностью, либо по причине из-

держек ликвидации позиции, вызванных неблагоприятными движениями рынка. Такие ситуации встречаются на подавляющем большинстве рынков. Лишь малая толика рынков — так называемые глубокие рынки (**deep markets**) — может обеспечить участникам возможность быстро заключать крупные сделки по цене, близкой к рыночной. Однако даже на этих рынках никто из участников не возьмется гарантировать ликвидность в течение всей торговой сессии или во время кризиса, когда ликвидность, как правило, вовсе исчезает.

Из множества различных определений рыночной ликвидности все же выделяется одно, наиболее часто употребляемое в научных работах и официальных документах. *Ликвиден тот рынок, на котором участники совершают крупные сделки быстро и с небольшим влиянием на цены.* Такое определение ликвидности встречается в докладе, подготовленном представителями ряда центральных банков G-10 для Комитета по глобальной финансовой системе (CGFS) Банка международных расчетов (BIS)¹. Интерес к ликвидности на таком высоком уровне был вызван событиями, последовавшими за объявлением дефолта по внутреннему долгу России 17 августа 1998 года. Проблемы с ликвидностью, возникшие на российском рынке, распространились на американский рынок долговых обязательств. Последовательное исчезновение ликвидности на не связанных друг с другом рынках и вызванный этим рост волатильности стали отличительной особенностью данного кризиса. Еще большее внимание привлек произошедший в результате этих событий крах хедж-фонда Long Term Capital Management (LTCM).

До этих потрясений доминировало мнение, что нестабильность на финансовых рынках присуща только развивающимся экономикам с их непоследовательной монетарной и фискальной политикой и неразвитыми финансовыми рынками, что лишний раз подтвердил азиатский финансовый кризис 1997 года. Развитие же экономики, добившись эффективного управления рисками с помощью производных финансовых инструментов и основанных на них сложных финансовых стратегиях, уже вступили в эру финансовой стабильности. Однако, по общему мнению, именно применение сложных финансовых моделей и вызванное ими увеличение доли инструментов развивающихся рынков в портфелях инвесторов (в целях дальнейшей диверсификации) привели к краху LTCM. Можно утверждать, что нестабильность данных рынков выдвинула ликвидность на передовую линию научных изысканий.

¹ См. [BIS, 1999].

Для объяснения возникающего различия между ликвидационной и рыночной стоимостями необходимо иметь представление о действии механизма установления цен на рынке и уровне транзакционных издержек.

Транзакционные издержки являются неизбежной составляющей любой сделки на реальном рынке. Следовательно, анализируя фондовый рынок, состоящий из огромного количества сделок, вполне естественно попытаться оценить ликвидность с точки зрения транзакционных издержек. Низкий уровень ликвидности может быть вызван высокой стоимостью транзакционных издержек, ведущей, в свою очередь, к ограничению размера и роста рынка и в конечном счете к потере благосостояния. На большинстве финансовых рынков транзакционные издержки включают в себя комиссионное вознаграждение, бид-аск спрэд (bid-ask spread) и так называемый эффект влияния на цену (price impact). Бид-аск спрэд представляет собой разницу между ценами покупателя (bid) и продавца (ask). Комиссионное вознаграждение и бид-аск спрэд составляют транзакционные издержки при исполнении заявок небольшого объема на покупку или продажу актива. В случае, если речь идет о крупных сделках, к ним добавляется также эффект влияния на цену, показывающий чувствительность цены к дополнительным покупкам или продажам. Как правило, комиссия является фиксированной величиной, составляя определенный процент от совершаемой сделки.

Следовательно, хорошей оценкой ликвидности могут служить величина бид-аск спреда и значение эффекта влияния на цену, что подробно рассмотрено ниже при исследовании способов измерения риска ликвидности. Таким образом, транзакционные издержки оказывают незаменимую помощь именно при измерении ликвидности.

Что касается механизма установления цен, то его действие проливает свет на природу ликвидности. Как известно, на превышение спроса над предложением рынок реагирует ростом цены, на превышение предложения над спросом — ее падением. Но скорость и интенсивность реакции у разных рынков сильно различаются. Именно ликвидность является той характеристикой рынка, призванной оценить эту реакцию.

Тем не менее господствующая парадигма современной теории финансов абстрагируется от проблемы ликвидности, используя предположение о совершенном рынке, на котором инвестор может ликвидировать портфель по рыночной цене и без промедления вне зависимости от величины размещаемой заявки на закрытие позиции. Таким образом, подразумеваются два серьезных допущения. Во-первых, каждый участник рынка по отдельности не влияет на ценообразование (price taker) и,

следовательно, может покупать и продавать любое количество ценных бумаг по одной и той же цене, т.е. рынок является абсолютно эластичным. Во-вторых, внутреннее устройство рынка таково, что все рыночные заявки на покупку и продажу имеют немедленное исполнение.

Очевидно, что реальный рынок функционирует иначе, чем теоретическая модель. Во-первых, может существовать дисбаланс между спросом и предложением, ведущий к заметному отклонению цены сделки от текущей рыночной цены. Во-вторых, имеет место зависимость цены от объема, предлагаемого для торговли. Проведение сделки существенного для рынка объема может занять много времени или привести к неблагоприятному изменению цены. Таким образом, снятие предпосылки о совершенном рынке, необходимое для корректного описания реального рынка, приводит к возникновению риска рыночной ликвидности.

При осознанном принятии финансовым институтом на себя риска рыночной ликвидности встает вопрос о том, каким образом измерять ликвидность рынка. При первом взгляде кажется вполне естественным перевод проблемы в термины кривых спроса и предложения. Однако такой анализ ничего не скажет о динамике рынка, в частности, о траектории, по которой достигается точка равновесия. Другими словами, он не дает представление именно о действии механизма установления цен.

В работах, посвященных исследованиям ликвидности, прослеживаются два основных направления описания состояния рынка. Первое посвящено исследованию статистических закономерностей, связывающих различные интегральные характеристики рынка, такие как, например, ликвидность и волатильность. Другой подход концентрируется на изучении микроструктуры рынка с целью анализа оказываемого на ликвидность влияния устройства рынка и действий отдельных его участников. Если первое направление представляет собой, по сути, анализ временных рядов с целью выявления корреляций между различными характеристиками рынка, то второе направление пытается определить внутреннюю природу данных характеристик. Объектами анализа в данном случае являются как различные аспекты микроструктуры того или иного рынка (например, величина спреда, размер тика, объем информации, доступной участникам и т.д.), так и взаимодействие участников рынка. Последнее, как правило, моделируется с помощью теории игр, когда противопоставляются две группы участников: поставщики ликвидности и ее потребители.

Исследования, направленные на выявление статистических закономерностей для описания состояния рынка, рассматривают ликвидность как одну из интегральных характеристик рынка (вместе с волатильностью цены, трендом и др.). В данном случае она описывает влияние, оказываемое объемом сделки на ее цену при прочих равных условиях (т.е. рассматривается эффект влияния на цену), что, по большому счету, отражает лишь одну сторону, пусть и наиболее важную для анализа данного явления.

Однако до сих пор не выработано единое мнение о составе этих характеристик, а потому их набор зачастую существенно различается в разных моделях. Очевидно, что это вызвано отсутствием общепринятой динамической модели функционирования рынка, в связи с чем нет и законов динамики его интегральных характеристик. В отсутствие прочного теоретического фундамента на практике до сегодняшнего дня наблюдается и некоторая произвольность в измерении этих параметров. Как правило, они получаются в результате эконометрической обработки временных рядов, образуемых статистическими показателями. Такая произвольность в обращении с характеристиками рынка отражается также в отсутствии их общепринятого определения, что особенно характерно для ликвидности рынка.

Попытки подвести прочный теоретический фундамент под решение этих проблем привели к возникновению целого класса моделей, так называемых микроструктурных моделей рынка. Их целью является более точное описание внутреннего состояния рынка. Данные модели зачастую существенно отличаются друг от друга как определением состояния (явным или неявным), так и набором описывающих его параметров. Можно смело утверждать, что настало время для эмпирической проверки таких моделей, что также является достаточно сложной задачей, если учесть их продолжающее расти количество.

1.2. Измерения ликвидности

BIS (1999) использует предложенный Кайлом [Kyle, 1985] и используемый во многих моделях микроструктуры рынка подход — рассматривать отдельные, более мелкие характеристики рынка, которые описывают ликвидность рынка с разных углов зрения и при объединении дают достаточно полную картину.

По мнению Кайла, ликвидность не является четкой концепцией, потому что охватывает ряд различных свойств рынка, связанных неразрывно с самим процессом торговли. Он выделил три таких свойства,

которые в литературе часто называют аспектами (атрибутами или измерениями ликвидности:

«сжатость» (затраты на проведение «двухсторонней» сделки²);

глубина (объем заявок, превышение которого ведет к сдвигу цен);

релаксация (скорость, с которой цены возвращаются к исходному значению после случайного возмущения, не вызванного новой информацией).

По сути, Кайл представил в более строгой форме предложенные Блэком [Black, 1971] следующие четыре условия ликвидности рынка:

На рынке всегда имеются цена покупки и цена продажи, по которым инвестор может без промедления купить или продать небольшой объем бумаг.

Разница между этими ценами всегда представляет собой малую величину.

Инвестор может долго ожидать исполнения крупной заявки по цене, близкой к средней рыночной (при условии отсутствия важной информации, касающейся актива).

Инвестор может исполнить заявку на покупку или продажу большого объема немедленно, но по цене, существенно отличающейся от рыночной в неблагоприятную сторону, причем тем больше, чем крупнее заявка.

В некоторых случаях к выделенным Кайлом аспектам ликвидности добавляют еще *немедленность* рынка. По мнению Кайла, введенные им показатели полностью охватывают условия ликвидности рынка, предложенные Блэком. Такой же точки зрения о достаточности именно этих трех аспектов для описания ликвидности придерживаются авторы доклада, подготовленного представителями ряда центральных банков G-10 для Комитета по глобальной финансовой системе (CGFS) Банка международных расчетов (BIS). С их точки зрения [BIS, 1999], немедленность рынка включает элементы всех трех предложенных Кайлом аспектов и поэтому о выделении ее в отдельный аспект ликвидности не может быть и речи. На мой взгляд, данный атрибут ликвидности, непосредственно вытекающий из изложенной выше концепции Блэка, все же достоин отдельного упоминания, так как задержки в исполнении заявки могут быть вызваны и другими причинами.

Рассмотрим по отдельности каждый из аспектов ликвидности.

² «Двухсторонняя» сделка представляет собой ситуацию, «когда акция покупается, а затем продается в течение некоторого периода, за который не поступает новой информации, заставляющей инвесторов сделать переоценку стоимости акции (т.е. цены покупки и продажи, назначенные дилером, не меняются)» [Шарп, 1999].

1.2.1. «Сжатость» рынка

«Сжатость» рынка (*tightness*) показывает, как далеко отклоняется цена реальной сделки от средней рыночной цены. Другими словами, рассматриваются общие издержки, которые несет трейдер независимо от уровня рыночных цен. Для измерения «сжатости» рынка в подавляющем большинстве случаев используется величина бид-аск спреда (*bid-ask spread*), который трактуется несколькими способами. Выделяют три вида спреда:

котируемый спред (*quoted spread*), т.е. разность между минимальной ценой заявок на продажу и максимальной ценой заявок на покупку;

реализованный спред (*realised spread*), **равный разнице между средневзвешенными ценами сделок за какой-то период времени, совершенных по цене спроса, и сделок, совершенных по цене предложения;**

эффективный спред (*effective spread*), определяемый для каждого участника рынка индивидуально и равный разнице между реальной ценой сделки и средней ценой рынка в момент сделки.

Котируемый спред измеряется до совершения сделок на рынке, цена исполнения которых не обязательно совпадает с котировками, но может лежать и внутри ценового диапазона. По этой причине данная разновидность спреда хорошо описывает рынки, где заявки исполняются почти исключительно по ценам лучшей котировки. В свою очередь, реализованный спред дает лучшую картину сделок, произошедших за определенный период торговли. Стоит отметить, что при его расчете в качестве весов берутся объемы сделок, совершенных по каждой из цен, от общего количества за данный срок. Особое внимание при применении эффективного спреда для измерения «сжатости» рынка следует обратить на тот факт, что используется цена реальной сделки, а не выставяемые котировки. Поскольку данная разновидность спреда учитывает изменение цены, происходящее в период времени между котировкой и исполнением реальной сделки, можно утверждать, что эффективный спред характеризует направление движения цен.

В микроструктурных финансах различают три компонента рыночного спреда³: 1) расходы на обработку заявки (*order-processing costs*), 2) компенсация за инвентарный риск (*inventory-carrying costs*) маркет-мейкера, представляющая собой плату за немедленность сделки, 3) компенсация за убытки от сделок с информированными трейдерами (*asymmetric information costs*). Расходы на обработку заявки характеризуют стоимость предоставления ликвидности, отражая тем самым издержки

³ Например [Huang, 1997], [Jorion, 2000].

на ведение торговли, состояние технологии и уровень конкуренции. Второй компонент описывает нежелательный риск поддержания позиции открытой, возрастающий с увеличением волатильности цены и с уменьшением торговой активности. Естественно, что маркет-мейкер требует компенсацию за инвентарный риск, что, в свою очередь, отражается в различии между ценами покупки и продажи. Дилер (или специалист) выставляет две различные котировки также из соображения, что контрагентом в сделке может выступить участник рынка, который лучше информирован о перспективах торгуемого актива. В этом случае при совершении сделки возможны потери, которые призван компенсировать все тот же бид-аск спрэд. Все три компонента очень тесно переплетены между собой, и их вычленение является непростой задачей. Проблеме декомпозиции бид-аск спрэда на отдельные составляющие посвящено большое количество работ. Из их числа стоит особо выделить эмпирическое исследование Ханга и Столла [Huang, 1997]. Однако для определения величины потенциальных потерь портфеля представляется достаточным иметь значение той или иной разновидности спрэда, нежели точную декомпозицию спрэда, полезную для понимания «сжатости» рынка, но никак не ее измерения.

Таким образом, данный аспект ликвидности отражает уровень транзакционных издержек. Чем меньше спрэд, тем выше ликвидность.

1.2.2. Глубина рынка

Глубина рынка (depth) характеризует спрос и предложение бумаг к моменту сделки. Данный аспект ликвидности позволяет судить о развитости рынка в категориях его объема, числа участников и интенсивности торговли. Глубина рынка может быть измерена двумя способами: либо количеством и объемом заявок на рынке на покупку и продажу, либо значением эффекта влияния на цену [BIS, 1999]. В качестве показателя, характеризующего количество и объем заявок, можно использовать объем заявок в книге лимитированных заявок (limit order book). *Под эффектом влияния на цену (market impact или price impact) принято понимать рост (снижение) цены в результате исполнения сделок, инициированных покупателями (продавцами).*

Другими словами, глубина рынка означает либо объем заявок в книге лимитированных заявок, либо объем торгов, еще возможный без сдвига цен в ту или иную сторону. Разница между двумя определениями состоит в том, что всех заявок в книге лимитированных заявок может быть недостаточно, чтобы удовлетворить одновременно весь шквал заявок

на покупку (продажу). Тогда возникший дисбаланс между спросом и предложением может привести к сдвигу цен покупателя или продавца от котироваемых на данный момент времени. Вопрос о том, приведет или не приведет шквал заявок одного типа (на продажу или покупку) к такому сдвигу, зависит от встречных заявок другого типа в текущий момент времени. Таким образом, измерение глубины рынка призвано определить максимально возможный объем торгов, который еще в состоянии предотвратить расхождение цен покупателя и продавца от выставляемых маркет-мейкерами котировок.

Принимая во внимание эти соображения, можно прийти к выводу, что для измерения глубины все же лучше применять *эффект влияния на цену*. Его можно измерить как *разность между средней⁴ ценой ликвидации актива и первоначальной средней рыночной ценой (на момент размещения заявки)*.

Котируемый спрэд, если брать его половину, может совпадать с величиной влияния на цену, но только как *ex ante* величина и при условии немедленной ликвидации всего портфеля одним лотом. В этом случае половина котироваемого спрэда (**quoted half-spread**) добавляется (вычитается) из средней цены, если объем заявки не приводит к сдвигу цен. Однако ликвидационная стоимость не может быть наблюдаема *ex ante*, если речь идет об объемах, способных создать значительный дисбаланс между спросом и предложением. Какие-то предположения насчет цены исполнения текущей заявки могут быть вынесены лишь *ex post* при условии, что имеются данные о поведении цены, выставляемых заявках и объемах торговли.

Косвенной характеристикой глубины рынка может служить отношение объема торговли активом за данный период времени к общему объему, находящемуся в обращении (для срочного рынка — к объему открытых позиций по данному классу инструментов). Полученное таким образом значение может служить показателем глубины только при нормальных рыночных условиях, но, тем не менее, даже в отсутствие ощутимых потрясений оно может ее значительно недооценивать. Объем торговли активом может говорить лишь о реализованной глубине, но не о потенциальной глубине рынка.

Таким образом, данный аспект ликвидности отражает как транзакционные издержки, так и механизм установления цен. Чем больше глубина, тем выше ликвидность.

⁴ Рассматривается средняя цена ликвидации актива, так как рыночная заявка может быть раздроблена на несколько более мелких, исполнение которых возможно по различным ценам.

1.2.3. Релаксация рынка

Релаксация рынка (resiliency) характеризуется временем, за которое восстанавливаются нормальные рыночные условия после флуктуаций цены, вызванных совершением сделки. Другими словами, речь идет о времени, за которое устраняется возникший дисбаланс между спросом и предложением. Измерение этого аспекта ликвидности, несомненно, имеет практическую ценность для понимания потенциальной глубины рынка, которая не может быть наблюдаема в нормальных рыночных условиях.

Для объяснения релаксации рынка применяется показатель гамма (γ), оценивающий скорость возврата величины бид-аск спреда к его значению накануне сделок. Значение этого показателя можно получить, измерив вызванное сделками расширение рыночного спреда и время, требуемое для восстановления «досделочного» значения спреда. Этот способ расчета полезен для учета потенциальных торговых потребностей, образующих своего рода запасной «резервуар» ликвидности накануне сделок. Чем меньше гамма, тем быстрее восстанавливается «досделочное» состояние рынка путем трансформации потенциальных потребностей в конкретные заявки и, как следствие, ликвидность выше.

Однако данная величина обычно измеряет число событий, возвращающих спреду «досделочное» значение. С одной стороны, такой расчет гаммы слишком субъективен, так как разные аналитики скорее всего не сойдутся полностью во мнении относительно числа и характера таких событий. С другой стороны, даже если достичь такого согласия, то представляется практически неосуществимым внедрение этого показателя в способы оценки потенциальных потерь портфеля (в тот же *VaR*). Таким образом, до сих пор не предложено адекватных методов измерения релаксации рынка, применимых на практике.

1.2.4. Немедленность рынка

Немедленность рынка (immediacy) характеризуется временем между размещением заявки на стандартный объем (полный лот) и ее исполнением. Немедленность можно измерять временем до первого исполнения лимитированной заявки. В данном случае лучше брать абсолютное календарное время между вводом и первым исполнением. Однако первое исполнение не всегда означает полное исполнение. Но на некоторых площадках (например, ММВБ) подавляющее большинство заявок исполняется целиком за первую «смычку». Чем короче время до первого исполнения, тем выше ликвидность. Другой показатель немедленно-

сти — время до снятия заявки с торгов. Чем дольше заявки остаются открытыми до снятия, тем ниже темп обновления котировок и, следовательно, ниже ликвидность.

Измерения ликвидности связаны между собой, что наглядно демонстрирует рис. 1.

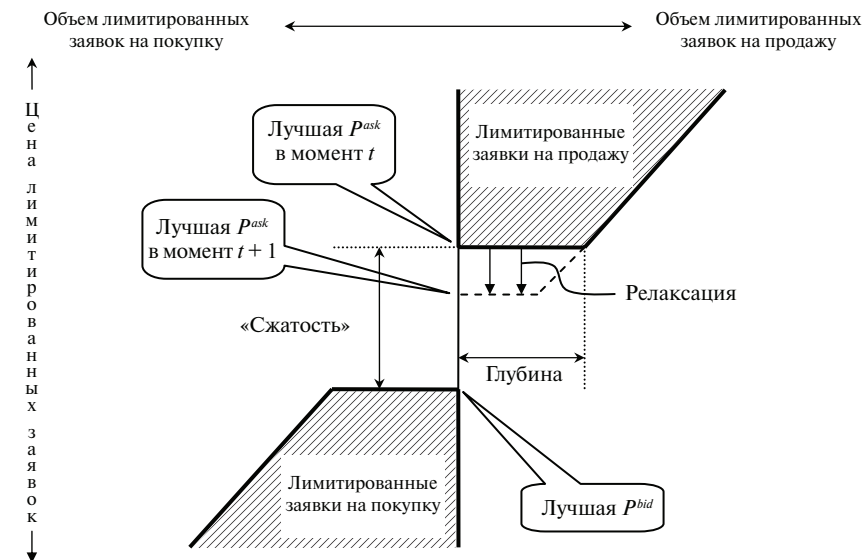


Рис. 1. Аспекты рыночной ликвидности

Источник: Bank for International Settlements. Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications. Report of a Study Group established by the Committee on the Global Financial System of the central banks of the Group of Ten countries, 1999, p. 41.

Например, чем больше сравнительный дисбаланс заявок на покупку и заявок на продажу (горизонтальная ось в верхней части рис. 1), тем дальше рыночные цены должны отклоняться от стандартной цены на продажу, P^{ask} , и стандартной цены на покупку, P^{bid} (вертикальная ось на рис. 1), чтобы этот дисбаланс исчез.

Показатели глубины (горизонтальные отрезки, отходящие от вертикальной оси) должны «схватывать» тот максимум неисполненных заявок, который допустим, прежде чем состоится такое отклонение. А показатели релаксации характеризуют ту скорость, с какой исчезает дисбаланс заявок.

Таким образом, приведенное выше определение ликвидности, сформулированное Комитетом по глобальной финансовой системе (CGFS) Банка международных расчетов (BIS) [BIS, 1999], **распадается на несколько частных определений**, которые можно назвать рабочими, поскольку они указывают на метод измерения ликвидности (если не всей сразу, то хотя бы отдельных ее «частей» (аспектов)). И, как правило, когда речь идет о том или ином показателе ликвидности, то подразумевается какой-нибудь частный показатель, характеризующий немедленность, «сжатость», глубину или релаксацию. Учет всех четырех атрибутов дает более или менее полную картину ликвидности. Однако, как показывает исследование Комитета по международной финансовой системе [BIS, 1999], существуют определенные трудности с данными на различных рынках, т.е. на сегодняшний день основной проблемой при измерении указанных характеристик является получение необходимых данных. Имеется два основных набора данных для анализа ликвидности — данные о котировках, выставленных в системе — это информация, доступная трейдеру, и данные о реально совершенных в системе сделках. Отсюда очевидно использование различных категорий данных в разного рода исследованиях, что вызвано, вероятно, отличиями в структуре тех или иных рынков. Речь идет о том, что каждый из указанных выше аспектов ликвидности играет разную роль на различных рынках. Таким образом, какой-то один аспект ликвидности может быть очень информативен для одного рынка, в то время как на другом рынке он не имеет смысла. Другая сложность заключается в том, что улучшение одного из аспектов ликвидности может приводить к ухудшению другого. Пример этому дается в работе Муранага и Шимицу [Muranaga, 1999], когда увеличение объема книги заказов (улучшение глубины рынка) сопровождается увеличением бид-аск спреда (ухудшением «сжатости» рынка) при определенных условиях доступа трейдеров к информации в книге заказов.

2. Моделирование риска рыночной ликвидности

2.1. Оценка риска рыночной ликвидности

Для полноценного моделирования риска рыночной ликвидности должен быть учтен каждый из четырех аспектов ликвидности, описанных в главе 1. Однако на данный момент для практических целей в литературе выделяют следующие издержки ликвидации портфеля: бид-аск спрэд

(bid-ask spread) и эффект влияния на цену (price/market impact), оказываемый величиной ликвидируемой позиции. Очевидно, что отмеченным издержкам можно поставить в соответствие «сжатость» и глубину в микроструктурных моделях.

Риск рыночной ликвидности может быть измерен функцией цены от количества (price-quantity function), объясняющей оба вида издержек. Поставщики ликвидности готовы выступить в качестве контрагента по выставленным ими котировкам в размере заявки, не превышающем определенного объема — глубины (depth) рынка или нормального рыночного объема (normal market size). Превосходящие данную величину заявки на покупку будут исполняться по все возрастающей цене продавца (ask), а превышающие данное значение заявки на продажу — по все уменьшающейся цене покупки (bid), что проиллюстрировано рис. 2.

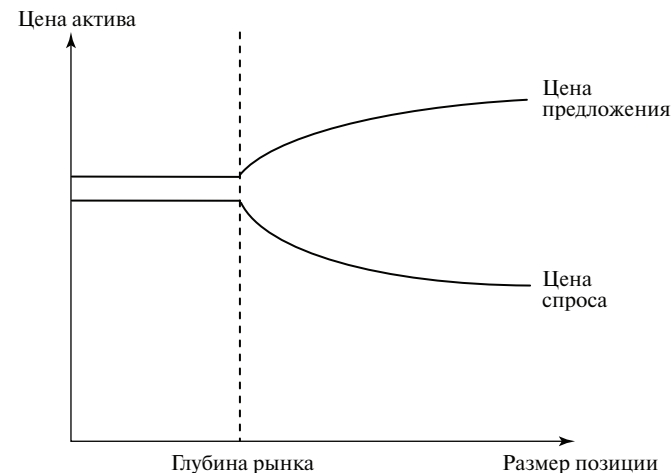


Рис. 2. Влияние размера позиции на ликвидационную стоимость

Таким образом, при нормальных рыночных условиях величина риска рыночной ликвидности зависит от размера позиции и оказываемого ею влияния на цену. В свете представленного имеет смысл рассмотреть классификацию рисков рыночной ликвидности, предложенную Бангя, Диеболд, Шуерман и Стругхайер [Bangia, 1998]. Они рассматривают различия между экзогенным риском ликвидности, находящимся вне влияния маркет-мейкера или трейдера, и эндогенным риском ликвидности, который находится в сфере действия трейдера и является, как правило,

реакцией рынка, неспособного «переварить» неожиданно возникшие крупные позиции.

Авторы подразделяют неопределенность в рыночной стоимости (*uncertainty in market value*), т.е. общий рыночный риск, на неопределенность в доходности актива (*uncertainty in asset returns*) и **неопределенность**, относящуюся к риску ликвидности (*uncertainty due to liquidity risk*). Последняя, в свою очередь, делится на *экзогенную* и *эндогенную ликвидность*.

Сопоставление всевозможных уровней риска ликвидности и рыночного риска (в классическом понимании — волатильности доходности актива) проводится с целью показать, что большинство рыночных ситуаций приходится на случаи, когда оба риска либо велики, либо малы. Более того, авторы утверждают, что для анализа таких ситуаций с целью учета ликвидности рынка достаточно рассмотреть только экзогенный риск, который характеризуется колебаниями ликвидности вследствие факторов, неподконтрольных каждому из участников рынка по отдельности. В то же время авторы отмечают наличие эндогенного риска, к которому относятся изменения ликвидности, порождаемые действиями отдельных трейдеров (идентично рассмотренному ранее эффекту влияния на цену).

Экзогенная ликвидность связана с характеристиками или микроструктурой рынка. Она едина для всех участников рынка и не зависит от поведения отдельных агентов (хотя на нее можно повлиять одновременно идентичными действиями всех или почти всех рыночных участников). Экзогенный риск ликвидности характеризуется волатильностью наблюдаемого спреда, не имеющего отношения к реализованному спреду размера торгов.

Эндогенная ликвидность, наоборот, «привязана» к действиям отдельных игроков на рынке. Как правило, на нее влияет размер позиции: чем больше величина позиции, тем меньше эндогенная ликвидность и наоборот.

Разделение ликвидности на экзогенную и эндогенную используется только для описания факторов, лежащих в основе того или иного типа. На самом деле, важно не поведение этих факторов по отдельности, а их совместное поведение, т.е. корреляция между характером (покупка или продажа) и объемом отдельно взятой заявки и характером и объемом дисбаланса между агрегированным спросом и предложением на рынке. Если превышение в сторону совокупного спроса (предложения) пренебрежимо мало, то на первый план оценки влияния на цену выходят эндогенные факторы. Если же ожидается устойчивый дисбаланс между

агрегированным спросом и предложением, то даже позиция небольшого объема во время неблагоприятных движений рынка может привести к огромным потерям при ликвидации.

2.2. *VaR* и риск рыночной ликвидности

Для того чтобы учесть различные факторы, ответственные за отклонения цены ликвидации от средней рыночной, был предложен ряд методов для учета ликвидности в методологии *VaR*. В результате, на основании каждого из этих подходов можно получить меру для риска ликвидности, которая добавляется к стандартному *VaR*, основанному на средних ценах.

Ключевое направление в исследовании риска ликвидности нацелено на интеграцию издержек ликвидации позиции в методологию *VaR*. Только во второй половине 1990-х годов появились первые работы в этой области, в которых ликвидность моделируется как с точки зрения «сжатости», так и глубины рынка. Данное направление непосредственно связано с учетом ликвидности при оценке потенциальных потерь портфеля. В связи с этим далее подробно рассмотрены достижения именно в области внедрения характеристик ликвидности в модели *VaR*. В первую очередь стоит объяснить, что представляют собой такого рода модели, и почему они не учитывают риск ликвидности.

Сумма (стоимость) под риском⁵ — Value at Risk (*VaR*) — удобная и эффективная мера риска, используемая широким кругом финансовых институтов. Основывается эта оценка финансовых рисков на стандартном математическом подходе к моделированию рыночных рисков, который использует язык теории вероятностей.

Опыт показывает, что вероятность возникновения ситуации, приводящей к большим потерям на сравнительно устойчивом рынке довольно мала. Ориентация на такие ситуации при текущем управлении рисками приведет к неоправданному сокращению объемов операций. Поэтому для получения нестрессовой оценки рыночного риска, обладающей практической ценностью, из рассмотрения имеет смысл исключить небольшую долю (обычно 5% или 1%) самых неблагоприятных случаев, т.е. сузить интервал возможных значений случайной величины. Тогда оценкой риска будут убытки, которые возникнут в самом неблагоприятном из оставшихся 95% или 99% случаев.

⁵ Русский перевод термина «value at risk» позаимствован из [Шоломицкий, 2005].

Пусть фиксирован некоторый портфель открытых позиций. VaR портфеля, выраженный положительным числом, для данного доверительного уровня α и данного периода поддержания позиций t определяется как такое значение наименьшего убытка (в абсолютном выражении), которое может быть превышено величиной возможных потерь x ($x > 0$) держателя портфеля за время t с малой, предварительно заданной вероятностью α :

$$P(x > VaR) \leq 1 - \alpha \quad (1)$$

Как следует из определения, величина VaR для портфеля заданной структуры — это наихудший убыток (в абсолютном выражении), обусловленный колебаниями цен на финансовых рынках, который рассчитывается:

- на определенный период времени в будущем;
- с заданной вероятностью его непревышения;
- при данных предположениях о характере поведения рынка.

Таким образом, VaR , позволяющий выразить риск сколь угодно сложного портфеля *одним числом*, служит *портфельной* мерой риска, отражающей лишь *неблагоприятные* изменения стоимости (в отличие от стандартного отклонения). Имея как бесспорные достоинства, так и серьезные недостатки, VaR уже стал стандартом финансовой индустрии применительно к оценке, контролю и управлению рисками.

В чем же, собственно, заключается проблема учета ликвидности в методологии VaR , и почему ее изучением начали заниматься лишь с середины 1990-х годов?

Дело в том, что VaR для учета колебаний стоимости портфеля требует в качестве исходных данных цены входящих в него активов. В качестве таких данных используются средние рыночные цены в какой-то момент времени (среднее значение между ценой покупки и продажи), которые также применяются для приведения портфеля к рыночной стоимости (marking-to-market).

Однако на рынке в каждый момент времени есть цена покупки и цена продажи вместо единой котировки. Этот факт означает, что для большинства участников рынка реальная цена сделки отличается (причем в худшую сторону) от средней рыночной цены.

Также данная методология недооценивает риск ликвидности, если VaR отражает наихудший ожидаемый убыток за предполагаемый *период ликвидации позиции*. В данном случае неявно подразумевается, что в любой момент времени найдется контрагент для проведения требуемых сделок. Для ликвидных рынков большую часть времени это допущение

верно, однако в случае кризиса на рынке оно может нарушаться. Если подавляющая часть участников рынка будет стремиться совершать сделки в одном направлении, то контрагентов просто не хватит на всех участников рынка. Более того, проблема ликвидации позиции усложняется, если возникает необходимость в совершении сделки большого объема. В этом случае трудности могут возрасти многократно: либо придется потратить много времени в ожидании подходящей цены, подвергаясь все время рыночному риску, либо понести высокие транзакционные издержки вследствие риска ликвидности. Именно с этой проблемой столкнулись участники российского рынка в 1998 г. после кризиса, вызванного объявлением дефолта по внутреннему долгу. На российском фондовом рынке по большинству акций котировки на покупку просто отсутствовали — на рынке находились только продавцы. Учитывая процесс интеграции рынков и их возрастающую взаимозависимость, резкие изменения ликвидности рынка стали возникать гораздо чаще, чем раньше; соответственно возникла необходимость учета данного вида риска в моделях оценки рыночного риска.

Таким образом, стандартный VaR оценивает максимальные потенциальные потери портфеля, которые понесет трейдер при закрытии позиции *до того, как позиция будет полностью ликвидирована на рынке*. Следовательно, стандартный VaR допускает следующие идеальные условия: позиция ликвидируется **одной сделкой по фиксированной рыночной цене, равной текущей средней цене, за фиксированный период** (обычно один торговый день) **вне зависимости от размера позиции**. Очевидно, что такие допущения в методологии приводят к систематической недооценке потенциальных убытков.

Другими словами, рыночный риск предстает в некоей чистой форме, когда нет никакого трения на рынке, изменяющего цену в процессе заключения сделки. Согласно Столлу [Stoll, 2000], **трение** на финансовых рынках измеряет сложность, с которой осуществляется торговля активом. В данном случае прослеживается аналогия с физикой: транзакционные издержки в экономической системе выполняют ту же роль, что трение в механике. Трение на финансовых рынках может быть измерено временем, необходимым для оптимальной покупки или продажи данного количества актива [Lippman, 1986]. **Другой способ измерения трения** заключается в определении ценовой уступки, необходимой для немедленного исполнения сделки [Demsetz, 1968]. **Оба подхода равнозначны**, так как ценовая уступка, необходимая для немедленного исполнения сделки, может быть рассмотрена как платеж, требуемый другой стороной сделки (например, дилером) для незамедлительной покупки или

продажи актива и последовательного его размещения согласно оптимальной политике. В целях измерения риска ликвидности как источника потенциальных убытков подход Демсеца [Demsetz, 1968] более приемлем для использования на практике.

Таким образом, *стандартная оценка VaR недооценивает риск рыночной ликвидности, т.к. она не принимает в расчет тот факт, что ликвидация осуществляется вовсе не по средней между ценами спроса и предложения цене, но скорее по средней цене за вычетом половины величины спреда и, возможно, дополнительно еще за вычетом величины эффекта влияния на цену.* При этом нужно не упускать из виду, что бид-аск спред может претерпевать значительные колебания. Следовательно, риск рыночной ликвидности, связанный с неопределенностью бид-аск спреда и эффектом влияния на цену, является важнейшей частью общего риска. Поэтому не вызывает сомнений, что риск ликвидности необходимо моделировать, по меньшей мере, для «тонких» (*thinly traded*) или *развивающихся* рынков.

На практике для учета риска ликвидности некоторые параметры *VaR* иногда корректируются эмпирически (*ad hoc*). Так, в качестве длины временного горизонта для расчета *VaR* подбирается срок *t*, за который портфель можно реализовать на рынке. Такие корректировки различаются между отдельными активами и также могут зависеть от размера позиции. В этом случае *VaR* рассчитывается на основе *t-дневных доходностей*. С оценкой исторической волатильности *t-дневных доходностей* связана проблема малой выборки (необходимы данные за длительный период). Как правило, берутся однодневные доходности и приводятся к *t-дневным* через умножение на квадратный корень из *t*. Такая корректировка доходности возможна лишь при условии независимости поведения доходностей в разных временных срезах. Эмпирические исследования показывают, что такая зависимость, к сожалению, присутствует, что, в свою очередь, требует применения более сложных моделей (для более подробного ознакомления с проблемой см. [Diebold, 1998]).

Однако этот подход в лучшем случае обеспечивает оценку потенциальных потерь портфеля вследствие неблагоприятного движения *средней* цены. Другими словами, увеличение временного горизонта не дает оценку возникающих при исполнении издержек, связанных с разницей между средней ценой исполнения и начальной рыночной ценой.

Второй подход заключается в искусственном завышении волатильности для менее ликвидных активов. Стандартный *VaR* в этом случае рассчитывается на основе модифицированной ковариационной матрицы. В качестве критериев для увеличения волатильности берутся субъ-

ективные оценки. К сожалению, данный подход также не отражает сущность риска ликвидности.

Интуитивно понятные попытки учесть неявным образом ликвидность через искусственное завышение волатильности и через увеличение интервала времени, за который планируется ликвидировать позицию, не имеют прочного теоретического фундамента. Остальные, рассмотренные ниже корректировки *VaR* в целях учета издержек ликвидации портфеля (рыночный спред и влияние на цену) используют достижения микроструктурных моделей рынка, отмеченные в главе 1.

2.3. Учет экзогенной ликвидности (бид-аск спред)

2.3.1. Текущее или ожидаемое значение бид-аск спреда

Если допустить, что открытая позиция может быть закрыта по выставленным в котировках ценам, то затраты на исполнение могут быть представлены в виде линейной функции от текущего или ожидаемого бид-аск спреда. *VaR* с учетом ликвидности (*Liquidity-adjusted Value at Risk*, далее — *LVaR*) может быть оценен добавлением к стандартному *VaR* ожидаемых издержек от наличия котируемого спреда, т.е. произведения половины выраженного в процентах бид-аск спреда и размера позиции (рыночная стоимость для акций, номинальная стоимость (*notional*) для производных финансовых инструментов). Тогда для *j-й* позиции получается следующее выражение:

$$LVaR_j = VaR_j + Size_\varphi \times \frac{E(S_j)}{2}, \quad (2)$$

где *LVaR* — скорректированный на ликвидность *VaR*, *VaR* — стандартная мера рыночного риска, *E(.)* — оператор математического ожидания и *S* — процентный котируемый спред, равный отношению разности цен покупателя и продавца к средней рыночной цене.

Корректировки на ликвидность для каждого актива зависят от «сжатости» рынка того или иного актива. В этом способе учета ликвидности анализируются только нормальные или ожидаемые рыночные условия. Важные факторы ликвидности, такие как изменчивость бид-аск спреда и влияние размера позиции на цену исполнения, не учитываются.

2.3.2. Квантили распределения бид-аск спреда

Развивая предыдущую методологию, можно посчитать компонент ликвидности в *VaR*, заменив текущее или ожидаемое значение спреда

квантилем для заданной вероятности. Данный подход был впервые предложен Бангя, Диеболдом, Шуерманном и Стругхайером [Bangia, 1998]. Он призван оценить наихудшие ожидаемые издержки ликвидации с определенной вероятностью.

Бангя, Диеболд, Шуерманн и Стругхайер [Bangia, 1998] предлагают сосредоточиться на анализе экзогенного риска ликвидности, характеризующегося волатильностью котированного бид-аск спреда, не имеющего отношения к реализованному спреду, зависящего от объема сделки (см. главу 1). В отличие от эндогенного риска ликвидности, данный риск не зависит от действий отдельных участников рынка. Именно поэтому учитывается только один из четырех аспектов ликвидности — «сжатость» рынка.

Формула для $LVaR$ в этом случае имеет следующий вид:

$$LVaR_j = VaR_j + Size_{\varphi} \times \frac{Q_{s_j}(p)}{2}, \quad (3)$$

где $Q_{s_j}(\cdot)$ — квантиль функции распределения котированного спреда (т.е. обратная функция от функции распределения спреда) и p — значение вероятности, для которой рассчитан $LVaR$.

Авторы используют стандартный дельта-нормальный подход к построению VaR . Они определяют однодневную доходность актива в момент времени t , r_t как разность логарифмов соответствующих среднерыночных цен:

$$r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \quad (4)$$

Авторы модели рассматривают однодневный горизонт, за который анализируются последующие изменения стоимости актива, и допускают, что однодневные доходности распределены нормально. Следовательно, основываясь на таких допущениях, они получают следующее значение наихудшей ожидаемой в 99% случаев цены актива:

$$P_{99\%} = P_t e^{(E(r_t) - 2,33\sigma_t)}, \quad (5)$$

где $E(r_t)$ и σ_t^2 являются первыми двумя моментами распределения доходности актива, а множитель 2,33 для стандартного отклонения появляется из допущения о нормальности. Без потери общности авторы допускают, что ожидаемое значение дневной доходности $E(r_t)$ равно нулю.

Таким образом, стандартный VaR (далее — $P-VaR$) имеет следующий вид:

$$P-VaR = P_t \left(1 - e^{(-2,33\sigma_t)}\right) \quad (6)$$

Выведенные выше выражения для наихудшей ожидаемой цены ($P_{99\%}$) и потенциальных потерь ($P-VaR$) рассматривают только волатильность средней цены. В то же время, имея открытую длинную позицию, трейдер при ее ликвидации будет ожидать получения цены, равной разности цены покупки (bid) и половины среднего рыночного спреда ($\frac{1}{2}\bar{S}$). Более того, авторы заинтересованы не в ожидаемых в среднем, а в необычных, экстремальных (располагающихся в хвосте распределения) событиях, причем вызванных общими рыночными условиями, а не действиями отдельного участника рынка, разместившего заявку необычно крупного (по сравнению с нормальным объемом на рынке) размера.

Отличительной особенностью модели Бангя — Диеболда — Шуерманна — Стругхайера (Bangia, 1998) является тот факт, что авторы определяют экзогенный риск ликвидности в терминах доверительного интервала. Они вводят так называемую «экзогенную стоимость ликвидности» (COL), основанную на определенном среднем бид-аск спреде \bar{S} , которая суммируется с величиной волатильности спреда, умноженного на определенный множитель, $a \cdot \tilde{\sigma}$ (чтобы учесть большую часть (например, 99%) возможных значений спреда):

$$COL = \frac{1}{2} \left[P_t (\bar{S} + a\tilde{\sigma}) \right], \quad (7)$$

где P_t — сегодняшняя средняя рыночная цена для актива, \bar{S} — средний относительный спред (относительный спред равен отношению разности цен продажи и покупки к средней рыночной цене), $\tilde{\sigma}$ — волатильность относительного спреда, a — фактор масштаба, подбираемый таким образом, чтобы охватить нужную часть распределения (в данной работе [Bangia, 1998] — 99% распределения относительного спреда).

В данном случае проблема учета ликвидности осложняется немаловажным фактом, заключающимся в том, что распределение спреда очень далеко от нормального. В связи с этим нельзя брать величину фактора масштаба a , равную 2,33, чтобы отразить 99% распределения без наихудших значений, имеющих место в 1% случаев. К сожалению, данный множитель можно получить только эмпирически, рассмотрев соответствующее распределение спреда. Анализ авторов показывает, что он ко-

леблется от 2,0 до 4,5 в зависимости от рынка актива. Такой диапазон значений обусловлен формой распределения спреда. В общем, чем больше распределение отличается от нормального, тем выше значение a . Однако так как эмпирическое распределение спреда редко вписывается в какое-либо стандартное параметрическое семейство асимметричных распределений (например, логнормальное), то любое масштабирование волатильности для достижения нужной вероятности (**tail probability**) будет аппроксимацией.

Для того чтобы рассматривать совместно риск ликвидности и рыночный риск (выражаемый волатильностью доходности актива), авторы ввели предположение, что при неблагоприятных рыночных условиях экстремальные значения доходности и спреда соответствующего актива происходят одновременно. Другими словами, низкие значения доходностей сопровождаются большим значением рыночного спреда. Как утверждают авторы, снятие этого допущения только усложняет алгебраические вычисления без привнесения каких-либо концептуально новых методов. Допущение о том, что присутствует достаточно сильная, пусть и не совершенная, корреляция между движениями средней цены и спреда, позволяет авторам считать, что экстремальные значения, характеризующие рыночный риск и риск ликвидности, происходят в одно и то же время.

В итоге авторы получили следующее выражение для наихудшей ожидаемой с вероятностью в 1% цены (P'):

$$P' = P_t e^{(-2,33\sigma_t)} - \frac{1}{2} [P_t (\bar{S} + a\bar{\sigma})] \quad (8)$$

Таким образом, окончательный вариант VaR с учетом ликвидности ($LAdj-VaR$) принимает следующий вид:

$$LAdj - VaR = P_t (1 - e^{(-2,33\sigma_t)}) + \frac{1}{2} [P_t (\bar{S} + a\bar{\sigma})] \quad (9)$$

Такое моделирование $LVaR$, предлагая интуитивно понятный и простой способ измерения и интеграции риска ликвидности в методологию VaR , имеет ряд серьезнейших недостатков:

1. *Расчет фактора масштаба.* Что касается распределения котированного спреда, то факт его отличия от нормального приводит к серьезным проблемам оценки коэффициента a . Авторы оценивают данный параметр эмпирически.

2. *Объединение рыночного риска и риска ликвидности.* Данный способ моделирования объединяет два источника риска и исследует совместное

влияние рыночного риска и риска ликвидности, допуская совершенную корреляцию между экстремальными колебаниями цены и спреда. На практике большие значения спреда как раз проявляются более всего в периоды стабильности, характеризующиеся низкой торговой активностью. Данный эффект продемонстрирован в работе Коупленда и Галай [Copeland, 1983]. Следовательно, такая асинхронная динамика цены и спреда приводит к переоценке риска.

3. *Отсутствие эндогенного риска ликвидности.* Модель Банья — Диеболда — Шуерманна — Страугхайера [Bangia, 1998] предполагает измерение только экзогенного риска ликвидности и не рассматривает вовсе эндогенный компонент риска ликвидности. Следовательно, $LVaR$, рассчитанный авторами, подходит только для позиций, размер которых не превышает объем, имеющийся в книге лимитированных поручений и соответствующий лучшим ценам покупки или продажи.

4. *Отражение внутрисуточной (intraday) динамики.* Модель авторов полностью игнорирует динамический аспект ликвидности внутри торговой сессии.

В связи с отмеченными недостатками были предприняты попытки улучшить данную модель учета ликвидности в оценке потенциальных потерь портфеля. Ле Со [Le Saout, 2000], исследуя французский фондовый рынок, констатировал, что половина всего рыночного риска приходится на долю экзогенного риска ликвидности. В то же время он отметил, что необходимо учитывать эндогенный риск ликвидности, поскольку он представляет огромную важность для держателей портфелей значительного (по сравнению с объемом дневной торговли) объема. Он расширил данную модель путем включения в анализ средневзвешенного⁶ спреда при измерении VaR с учетом ликвидности. Такая модификация, по мнению Ле Со, позволяет учесть эффект от ликвидации позиций большого объема. В схожей манере действовали и некоторые другие исследователи (например [François-Heude, 2002] и [Angelidis, 2005]), пытаясь учесть как экзогенный, так и эндогенный риск ликвидности.

Несмотря на простоту расчета для индивидуальной позиции, идею $LVaR$ сложно воплотить на портфельном уровне. На этом уровне исследователь сталкивается с проблемой данных. Для построения вероятностных распределений для различных активов требуется информация о бид-аске спреде за предыдущее время. Как правило, распределения серьезно

⁶ Ле Со составлял средневзвешенный спред, отбирая все потиковые данные за торговый день и рассчитывая средневзвешенную цену (и покупки, и продажи), весами для расчета которой служил соответствующий цене объем сделки от общего дневного оборота [Le Saout, 2001].

отличаются от нормальных, являясь лептоэксцессными и бимодальными. Данный факт, возможно, свидетельствует о переключении рынка между двумя режимами: нормальным и кризисным. На рынках во время серьезных кризисов огромная величина котируемого спреда служит сигналом о неспособности маркет-мейкеров выполнять свои обязанности по формированию рынка. При таких обстоятельствах котируемый спред теряет свою информативность.

Следовательно, применение оценок квантилей, основанных на нормальном распределении, без соответствующих корректировок на тяжелые хвосты, может привести к неправильной спецификации модели. Поэтому для анализа требуются временные ряды за продолжительный период. Тогда можно судить о рынке как в нормальном, так и в кризисном состояниях.

Подход, основанный на квантиле рыночного спреда, имеет одно неоспоримое преимущество — он опирается на наблюдаемые данные о рынке, что позволяет заинтересованным лицам проводить контроль за рисками на основе информации, не зависящей от оценок поднадзорных трейдеров. Доступность и надежность данных о котируемом спреде подвергается сомнению на малоактивных рынках, где редко обновляются котировки, и на новых рынках, где еще не накоплена достаточная для анализа база данных. Однако это не умаляет заслуг данного подхода, основанного на эмпирическом поведении котируемого спреда. Рыночная информация о цене немедленного исполнения, что и представляет собой, по сути, котируемый спред, служит объективной основой для оценки общих издержек исполнения. Такая цена говорит о размере компенсации, запрашиваемой маркет-мейкером за принятый на себя риск выступить контрагентом.

Применение этого подхода затруднено на рынках, где он более всего необходим, т.е. на «тонких» или очень волатильных рынках. Кроме того, он абсолютно не применим в кризисных ситуациях, когда данные о бид-аск спреде, требуемые моделью, недоступны, так как маркет-мейкеры воздерживаются от котирования издержек немедленного исполнения заявки вблизи равновесной цены. Другими словами, маркет-мейкеры выставляют котировки, неприемлемые либо для покупателей, либо для продавцов.

Как бы то ни было, такой подход учета ликвидности очевидно бесполезен в критических ситуациях, когда он неприменим. При нормальных же рыночных условиях он позволяет оценивать риск рыночной ликвидности.

Альтернативный подход требует модели эффекта влияния на цену, возникающего вследствие отдельных торговых решений, которые специфичны и сложны для эмпирической оценки.

2.4. Учет эндогенной ликвидности (эффект влияния на цену)

Несмотря на то что модификации VaR , основанные на бид-аск спреде, лучше стандартных моделей, они все же игнорируют эффект влияния на цену. В то же время эффект влияния на цену, являясь основным источником эндогенного риска ликвидности, может быть очень значительным. Как было показано выше, он зависит от размера позиции относительно нормальных объемов торговли. До некоторой степени эффект влияния на цену может быть устранен подходящими стратегиями ликвидации. По идее, они должны приниматься во внимание при расчете $LVaR$.

Оптимальная стратегия исполнения при наличии информационной асимметрии и ее связь с поведением цен была в центре внимания многих основополагающих теоретических работ в области микроструктуры рынка⁷. Недавний ряд исследований, опирающийся на эти работы, моделирует решения, которые рациональный трейдер должен предпринять в целях оптимизации ожидаемой полезности от ликвидации торговой позиции при допущениях о временном горизонте и ценовом процессе, скорректированном на эффект влияния на цену, оказываемый совершаемыми сделками. Модели этого направления ведут к совместному определению оптимальной стратегии и распределения убытков вследствие применения этой стратегии (включая транзакционные издержки и неблагоприятные ценовые движения).

Лоуренс и Робинсон [Lawgence, 1997]⁸ предложили простое решение для задачи нахождения стратегии исполнения, максимизирующей полезность. Основная идея предложенной ими модели заключается в том, что применение единого временного горизонта для всех позиций⁹ без учета их размера и ликвидности соответствующего рынка полностью неприемлемо. Более того, по их расчетам, чем короче данный период, тем больше недооцениваются убытки. Предлагаемый ими подход, основанный на стандартном анализе риск-доходность, сводится к нахожде-

⁷ Например [Kyle, 1985], [Easley and O'Hara, 1987], [Admati and Pfleiderer, 1988] и [Glosten, 1994].

⁸ Лоуренс и Робинсон были одними из первых, кто обратил внимание на тот факт, что методология VaR не учитывает риск ликвидности.

⁹ Обычно используют интервал в десять дней (по рекомендации Базельского комитета [BIS, 1996]).

нию оптимального количества дней n , в течение которых производится постепенная ликвидация позиции через серию ежедневных сделок одинакового объема. Найденный таким образом период владения используется в качестве параметра для расчета VaR . Оптимальная стратегия минимизирует сумму издержек от эффекта влияния на цену и возможных потерь в цене из-за растянутой во времени ликвидации. Следовательно, авторы предлагают метод учета риска рыночной ликвидности, основанный на определении временного горизонта в зависимости от размера позиции и характеристик ликвидности рынка. Однако подход Лоуренса и Робинсона [Lawrence, 1997] имеет ряд серьезных недостатков, особенно заметных в спецификации функций издержек, используемых в решении оптимизационной задачи.

Бертсима и Ло [Bertsimas, 1998] предложили более целостный подход к поиску оптимальных стратегий, которые минимизируют ожидаемые издержки от торговли блоками заявок (**blocks**) акций за данный временной горизонт. В частности, они вводят условие, что фиксированный пакет заявок, состоящий из S акций, должен быть исполнен до окончания всех фиксированных периодов T^{10} . Кроме того, в модели Бертсима и Ло [Bertsimas, 1998] функция издержек, отражающая эффект влияния на цену, экзогенно задана, выражая цену исполнения индивидуальной заявки как функцию от количества торгуемых акций и рыночных условий. В результате они получают оптимальную последовательность торгов как функцию от рыночных условий, которая минимизирует ожидаемые издержки исполнения заявки объема S до истечения T периодов. Авторы также рассматривают портфельный случай, в котором влияние на цену для разных активов может воздействовать на общие издержки торговли портфелем.

Используя оптимизационный метод, предложенный Бертсима и Ло, Берковиц [Berkowitz, 2000] развивает тему моделирования эффекта влияния на цену. Берковиц также признает, что увеличение временного горизонта VaR для учета риска ликвидности недопустимо. Он предлагает интегрировать риск ликвидности через моделирование чувствительности цены к ликвидируемому объему.

Прежде всего, Берковиц определяет риск ликвидности как неопределенное изменение стоимости портфеля, вызванное ликвидацией активов для оплаты в срок своих обязательств и выходящее за рамки экзогенных изменений цен факторов. Исходя из такого определения, он предлагает оценивать эффект влияния на цену, оказываемый немедленной ликвидацией портфеля, с помощью концепции эластичности спроса.

¹⁰ T представляет собой конечно число.

Другими словами, если закрытие длинной позиции заставляет цены падать, то риск ликвидности может быть объяснен только через существование убывающих кривых спроса. Берковиц предлагает перестройку всего распределения прибылей и убытков на основе анализа риск-доходность и через различные численные методы.

Бертсима и Ло обсуждают возможность включения риска ликвидности в объективную функцию, но не приводят точную модель.

Такую модель можно найти в работе Альмгрена и Крисса [Almgren, 1999a]¹¹. Альмгрен и Крисс, так же как и Лоуренс и Робинсон [Lawrence, 1997], рассматривают более общие условия минимизации ожидаемых потерь полезности от торговых издержек, где потеря полезности тождественна мере, равной сумме ожидаемых издержек от торговли и константы, умноженной на дисперсию издержек. Хисата и Ямаи [Hisata, 2000] развили теорию Альмгрена и Крисса в нескольких направлениях, сравнив процессы в дискретном и непрерывном времени и включив в анализ период оптимальной ликвидации в качестве эндогенной переменной.

2.4.1. Стратегии ликвидации портфеля

Прежде чем перейти непосредственно к модели Альмгрена и Крисса [Almgren, 1999a], рассмотрим два крайних случая стратегий ликвидации портфеля, рассматриваемых практически во всех работах, посвященных решению задачи об оптимальной ликвидации портфеля. Речь идет о мгновенной ликвидации (*immediate liquidation*) и постепенной ликвидации позиции равными порциями (*uniform liquidation*)¹². На практике мгновенная ликвидация неизбежна при высоком уровне леввериджа и стрессовой ситуации на рынке. Постепенная ликвидация возможна при умеренном левверидже и спокойной ситуации на рынке [Смирнов, 2004].

Дальнейший анализ отмеченных выше крайних случаев использует логику изложения и обозначения, предложенные Джорионом [Jorion, 2000]. Для простоты предположим, что функция цены от количества, описанная выше, имеет линейный вид. Пусть для случая продажи она выглядит следующим образом:

$$P(q) = P_0 (1 - kq), \quad (10)$$

где P_0 — начальная средняя цена, q — объем заявки, k — линейный коэффициент влияния на цену и $P(q)$ — цена исполнения, обусловленная объемом заявки. Допускается постоянство средней цены и наличие только временного эффекта влияния на цену, т.е. объем торговли не сдвига-

¹¹ Краткое обобщение модели можно найти в [Almgren and Chriss, 1999b].

¹² Перевод позаимствован из [Смирнов, 2004].

ет рыночную цену (после исполнения заявки цена возвращается к «делочному» состоянию).

Измеряя издержки исполнения через дисперсию цены исполнения сделки по отношению к начальной средней цене, можно прийти к выводу, что немедленная ликвидация порождает квадратичные издержки:

$$C_I = q \times [P_0 - P(q)] = kq^2 P_0 \quad (11)$$

в то время как постепенная ликвидация позиции равными порциями создает меньшие издержки:

$$C_U = q \times [P_0 - P(q/n)] = k(q^2/n) P_0 \quad (12)$$

Недостаток длительной ликвидации заключается в том, что портфель остается подверженным ценовым рискам в течение более продолжительного периода, т.е. «накапливает потери от колебаний цен (зависит от волатильности рынка и срока ликвидации)» [Смирнов, 2004]. Подверженность риску в данном случае — функция от последовательности оставшегося размера позиции и волатильности средней цены. Искомая подверженность сводится к нулю мгновенной ликвидацией, в то время как при постепенной ликвидации позиции равными пропорциями она линейно уменьшается. Таким образом, оптимальное решение сводится к стратегии, которая предложит компромиссный выбор между издержками и риском.

Для анализа профиля цена-риск этих стратегий определим σ как дневную волатильность цены акции в долларах. Пусть продажи исполняются по ценам закрытия торгового дня одним блоком (**block**). Следовательно, для мгновенной ликвидации ценовой риск (или дисперсия стоимости портфеля) равен нулю. Для последовательных продаж равных порций дисперсия портфеля может быть рассчитана при допущении независимости дневных доходностей за n дней следующим образом:

$$\begin{aligned} V_U &= \sum_{j=1}^n \sigma^2 \times position_j = \\ &= \sigma^2 q^2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - 2\frac{1}{n}\right) + \dots + \left[1 - (n-1)\frac{1}{n}\right]^2 \right\} = \\ &= \sigma^2 q^2 \left[n \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

Например, для $n = 5$ дней корректирующий фактор в квадратных скобках итогового выражения равен 1,20. Таким образом, ценовой риск постоянной ликвидации за 5 дней равен риску поддержания начальной

позиции за 1,2 дней (дисперсия линейна внутри периода поддержания из допущения о независимости доходностей). Интересно отметить, что согласно этой логике десятидневный фиксированный временной горизонт, диктуемый Базельским комитетом [BIS, 1996], эквивалентен постепенной ликвидации за 31 день. На мой взгляд, данная логика может использоваться при эмпирических котировках, направленных на увеличение временного горизонта VaR .

Стратегии исполнения, естественно, не ограничиваются этими двумя крайними случаями. Допущения относительно функции, выражающей эффект влияния на цену, и стохастического процесса цен могут быть также сняты. В более общей форме можно выбрать величину стоимости портфеля, соответствующую максимизирующей стратегии X . Последняя определяется исходя из последовательности объемов совершаемых сделок (добавляемых к начальной позиции), которая ведет к компромиссному выбору между издержками исполнения и ценовым риском:

$$\min_x [C_x + \lambda V_x], \quad (14)$$

где λ отражает несклонность к ценовому риску.

Это ведет к другой формулировке $LVaR$ — так называемому «дефициту исполнения» (implementation shortfall)¹³, который выражается в следующей форме:

$$LVaR_x = \alpha \sqrt{V_x} + C_x, \quad (15)$$

где α — множитель, зависящий от требуемого уровня вероятности. Необходимо отметить, что $LVaR_x$ не принимает в расчет риск изменения ликвидности как характеристики рынка до тех пор, пока принятый в допущении ценовой процесс не включает функцию стохастического влияния на цену. Альмгрен и Крисс [Almgren, 1999a] рассматривают случай меняющихся во времени параметров функции влияния на цену.

2.4.2. Модель Альмгрена и Крисса

В работе Альмгрена и Крисса [Almgren, 1999a] представлена подробно специфицированная модель для оптимизации издержек, связанных с исполнением сделок.

Пусть инвестор имеет блок из X единиц актива, который он желает полностью ликвидировать до окончания момента времени T . Авторы делят период T на N интервалов длиной $\tau = T/N$ каждый и определяют дискретные величины $t_k = k\tau$ для $k = 0, \dots, N$. В данной модели торговая

¹³ Понятие «implementation shortfall» введено в обращение Перолдом [Perold, 1988].

траектория (trading trajectory) определяется как ряд x_0, \dots, x_N , где x_k — число единиц актива, которые инвестор планирует держать в момент времени t_k . Начальная позиция равна $x_0 = X$, и условие ликвидации в момент времени T требует $x_N = 0$. Любой стратегии можно также поставить в соответствие ряд торговли n_0, \dots, n_N . Работа рассматривает случай ликвидации длинной позиции продаж X единиц актива. Случай покупки против короткой позиции, по утверждению авторов, требует схожего анализа.

Торговая стратегия определяется как правило для определения n_k на основе информации, доступной в момент времени t_{k-1} . Существуют два основных типа стратегий: *статические стратегии* определяются в преддверие торговли; в *динамических стратегиях*, наоборот, каждый n_k зависит от всей доступной до этого момента информации, включая на момент времени t_{k-1} .

Пусть начальная цена актива равна S_0 . Следовательно, начальная рыночная стоимость позиции инвестора равна XS_0 . Цена актива изменяется согласно двум экзогенным факторам (под действием случайных сил, независимых от совершаемых инвестором сделок) — волатильности и смещения, и одного эндогенного фактора, вызванного торговлей с участием инвестора — эффекта влияния на цену. Альмгрен и Крисс [Almgren, 1999a] подразделяют оказываемое на равновесную цену влияние на временное и постоянное. Постоянное влияние имеет действие, по меньшей мере, в течение ликвидации всей позиции. В модели допускается, что цена актива изменяется согласно дискретному процессу арифметического случайного блуждания.

Треjder получает цену исполнения за продажу n_k единиц, которая рассчитывается корректировкой S_k на временное влияние на цену, моделируемое функцией $h(v)$ от среднего уровня торговли. Таким образом, полученная цена единицы актива, проданного в момент времени k , есть:

$$\tilde{S}_k = S_{k-1} - h\left(\frac{n_k}{\tau}\right).$$

Общие издержки от исполнения заявки — разность между XS_0 (начальным значением позиции, выраженной рыночной стоимостью) и $\sum_{k=0}^N n_k \tilde{S}_k$ (выручка от завершения всех торгов, т.е. произведение суммы проданных единиц актива n_k в каждом из интервалов времени и эффективной цены \tilde{S}_k за каждую такую продажу. Таким образом, это стандартная ex-post мера транзакционных издержек, используемая в оценке

деятельности, которую Перолд [Perold, 1988] назвал **дефицитом исполнения** (implementation shortfall).

В этой модели дефицит исполнения является случайной величиной. Поэтому для анализа используются математическое ожидание и дисперсия данной величины:

$$E(x) = \sum_{k=1}^N \tau x_k g\left(\frac{n_k}{\tau}\right) + \sum_{k=1}^N n_k h\left(\frac{n_k}{\tau}\right) \quad (16)$$

$$V(x) = \sigma^2 \sum_{k=1}^N \tau x_k^2 = \sigma^2 T \sum_{k=1}^N \frac{\tau}{T} x_k^2 \quad (17)$$

Дисперсия дефицита исполнения зависит только от экзогенной волатильности. Функции, выражающие эффект влияния на цену, признаются детерминистическими. Стоит отметить, что $V(x)$ рассчитывается как потенциальные потери вследствие шока, равного волатильности на временном горизонте T , позиции, размер которой есть средневзвешенная по времени квадратов объемов позиции, поддерживаемой между t_0 и t_N . Альмгрен и Крисс [Almgren, 1999a] также показали в своей работе, что для каждого значения неприятия к риску существует однозначно определенная стратегия исполнения.

При наличии торговой стратегии $x = (x_1, \dots, x_N)$ можно определить VaR_p как уровень транзакционных издержек, порождаемых стратегией X , который не будет превышен с вероятностью, большей чем p .

При условии арифметического броуновского движения общие издержки нормально распределены с известным математическим ожиданием и дисперсией. Следовательно, VaR для стратегии x определяется формулой:

$$VaR_p(x) = \lambda_v \sqrt{V(x)} + E(x) \quad (18)$$

Таким образом, с вероятностью p торговая стратегия не приведет к потерям, большим чем $VaR_p(x)$ от рыночной стоимости торговли. Стратегия x является эффективной, если она имеет наименьшее возможное значение $VaR_p(x)$ для заданной вероятности p .

Авторы отмечают, что $VaR_p(x)$ — сложная нелинейная функция от всех x_j , составляющих x . Другими словами, можно легко оценить ее для любой заданной траектории, но прямое нахождение минимизирующей траектории представляет трудную задачу, для решения которой нужно оценивать функции полезности и т.д. Несмотря на все эти трудности, авторы предлагают использовать наименьшее возможное значение $VaR_p(x)$ как информативную меру потенциальных потерь портфеля от-

носителем начального значения с учетом ликвидности рынка. Это значение, названное в работе «*VaR* с учетом ликвидности» (**Liquidity-adjusted *VaR***), зависит от времени для ликвидации и от выбранного уровня вероятности, а также от рыночных параметров, таких как коэффициент влияния на цену.

Альмгрен и Крисс получили такие результаты, используя статические процедуры оптимизации, которые ведут к оптимальным торговым траекториям, определяемым в преддверии непосредственной торговли. Они рассматривают статично оптимальные стратегии как эталон (benchmark) для сравнения с динамическими стратегиями, использующими поступающую в течение ликвидации позиции информацию.

Таким образом, Альмгрен и Крисс (Almgren, 1999a) провели очень тщательный и впечатляющий анализ. Их подход включает процедуру оценивания *LVaR* при условии заданной функции влияния на цену со стабильными параметрами. Неприятности, возникающие вследствие неожиданных событий, воздействующих на влияние на цену, обсуждаются, но не встраиваются в модель. Изыскания касательно стратегий оптимального исполнения имеют больший практический интерес, чем предлагаемое в модели управление риском ликвидности.

2.4.3. Модель Джэрроу и Субраманиана

Другой подход к оптимальной ликвидации портфеля и риску рыночной ликвидности представлен в модели Джэрроу и Субраманиана [Jarrow, 1997]. Данная модель задумывалась авторами для решения двух задач:

- определить формулу расчета ожидаемой ликвидационной цены, чтобы использовать ее для замены текущей цены при приведении к рыночной стоимости портфеля;
- определить формулу *VaR* с учетом ликвидности (*LVaR*).

В рамках модели предполагается, что трейдеры максимизируют ожидаемую ликвидационную стоимость портфеля, состоящего из S единиц рискованного актива, за срок, равный T , при заданном постоянном эффекте влияния на цену. Последний моделируется как случайная функция от двух аргументов: *дисконта за количество (quantity discount)* и случайного *лага исполнения (execution lag)*. Дисконт за количество, в свою очередь, является функцией от текущей рыночной цены. Оба аргумента зависят от объема совершаемой сделки. Модель определяет оптимальную стратегию ликвидации, которая отражает желаемое распределение ликвидационной стоимости во времени.

Основной вывод данной модели заключается в том, что при наличии экономии на масштабе при торговле активом¹⁴ закрытие всей позиции одной заявкой (блоком) всегда является оптимальной стратегией. Исходя из этого умозаключения, авторы выводят стохастическую ликвидационную цену, на основании которой можно посчитать как ожидаемую ликвидационную цену, так и *LVaR*.

Джэрроу и Субраманиан [Jarrow, 1997] предлагают следующую структуру рынка. Они называют рискованый актив в своей модели акцией. Для простоты авторами допускается риск-нейтральность трейдеров. Однако модель может быть модифицирована без потери общности для случая несклонных к риску трейдеров.

Рыночная цена акции определяется как последняя за день торгуемая цена за один полный лот (при покупке или продаже). Пусть $p(t)$ означает рыночную цену акции в момент времени t . Авторы допускают, что между сделками, т.е. когда трейдер отсутствует на рынке, $p(t)$ следует геометрическому броуновскому движению, т.е.

$$dp(t) = p(t)[\alpha dt + \sigma dW(t)], \quad (19)$$

где α — ожидаемая доходность акции, σ — стандартное отклонение доходности (в данной модели является постоянной величиной, которая относится к моменту сделки) и $W(t)$ — стандартное броуновское движение. Когда трейдер продает $s \leq S$ акций в момент времени t при данной рыночной цене $p(t)$, цена в расчете на одну акцию, которую он получает, выглядит так:

$$c(s)p(t), \quad (20)$$

где $c(s)$ представляет коэффициент дисконта за количество, на который наложены следующие ограничения: $c(s)$ — неубывающая по s функция, имеющая значения из интервала между 0 и 1. Дисконт за количество допускается авторами случайной величиной без специфицированного распределения и (для простоты) независимой от процесса рыночной цены $p(t)$. Данная величина признается случайной, потому что ее размер может быть неизвестным до совершения сделки.

Воздействие, оказываемое сделками на рыночную цену, является кумулятивным, т.е. перманентным в терминологии Альмгрена и Крисса [Almgren, 1999a]. После исполнения сделки новая рыночная цена начи-

¹⁴ Джэрроу и Субраманиан [Jarrow, 1997] характеризуют экономию на масштабе ситуацией, когда разделение объема актива на две немедленно исполняемые последовательные заявки всегда дороже, чем исполнение заявки на весь размер позиции того же самого объема.

нает колебаться от значения, определенного количественным дисконтом, т.е. $p(t^+) = c(s)p(t)$, где t^+ означает момент времени, следующий за t .

Кроме того, при условии, что заявка трейдера на продажу размещена в момент времени t , авторы допускают, что она исполняется в момент времени $t + \Delta(s)$, где $\Delta(s) \geq 0$ — лаг исполнения (execution lag), который также по построению модели считается неубывающей функцией от s . Другими словами, чем крупнее сделка, тем большее время требуется для ее исполнения. Лаг исполнения — случайная величина (он может быть неизвестен до совершения сделки), независящая от процесса рыночной цены $p(t)$ и дисконта за количество $c(s)$.

Поступления от ликвидации вкладываются на денежном рынке под доходность r .

Для отражения факта, что ликвидация имеет стоимость, накладывается следующее ограничение:

$$c(s)\exp[(\alpha - r)\Delta(s)] \leq 1 \text{ для всех } s \quad (21)$$

Следовательно, влияние дисконта за количество больше, чем влияние, оказываемое ожидаемым значением цены акции до исполнения, дисконтированным на настоящий момент времени.

Как уже отмечалось, трейдер хочет ликвидировать S акций за время от $t = 0$ до T . По своему усмотрению он может продать акции одним блоком или небольшими частями, но за более длительный период.

Формально трейдер продает акции, руководствуясь торговой стратегией, определенной как ряд дат (t_1, t_2, \dots, t_n) и соответствующий ему ряд проданных акций (s_1, s_2, \dots, s_n) , таких что $s_1 + s_2 + \dots + s_n = S$. Последняя из возможных заявок может быть размещена в момент времени T . Если так, то она будет исполнена в момент времени $t + \Delta(s_n)$.

Проблема ликвидации для трейдера сводится к выбору торговой стратегии, максимизирующей ожидаемую стоимость дисконтированных поступлений от продаж S акций к моменту времени T :

$$\max_{(s_i, t_i)} \left[E_0 \left(\sum_{i=1}^n s_i c(s_i) p(t_i + \Delta(s_i)) \exp(-r[t_i + \Delta(s_i)]) \right) \right], \quad (22)$$

$$\text{где } p(t_i + \Delta(s_i)) = p(0) \exp \left\{ \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right] (t_i + \Delta(s_i)) + \sigma [W(t_i + \Delta(s_i)) - W(t_i)] \right\}$$

Если нет риска ликвидности, проблема может быть сформулирована следующим образом:

$$\max_{(s_i, t_i)} \left[E_0 \left(\sum_{i=1}^n s_i p(t_i) \exp(-r[t_i]) \right) \right], \quad (23)$$

$$\text{где } p(t_i) = p(0) \exp \left\{ \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right] t_i + \sigma [W(t_i) - W(0)] \right\}$$

Решая задачу нахождения оптимальной стратегии ликвидации, можно получить $u^*(p, S)$, максимальные дисконтированные поступления от продажи S акций, когда текущая рыночная цена равна p и нет риска ликвидности. При допущении о риск-нейтральности оптимальная стратегия зависит непосредственно от превышения ожидаемой доходности акции над процентной ставкой: если $\alpha > r$, то оптимальный вариант — ждать до момента времени T , чтобы ликвидировать S акций продажей одним блоком с целью получения положительного прироста доходности. Когда $\alpha < r$, то немедленная продажа блоком всех S акций дает лучшее ожидаемое значение. В обоих случаях оптимальная стратегия заключается в совершении одной-единственной сделки и, следовательно, не наблюдается никаких выгод от дробления позиции. Авторы получают следующее выражение для оптимальной ожидаемой ликвидационной стоимости:

$$u^*(p, S) = \begin{cases} Sp & \text{если } \alpha \leq r \\ Sp \exp[(\alpha - r)T] & \text{если } \alpha > r \end{cases} \quad (24)$$

Данный результат показывает, что при отсутствии риска ликвидности рыночная стоимость Sp всегда дает справедливую ликвидационную стоимость портфеля. Текущая практика приведения к рыночной стоимости допускает стоимость, равную ликвидационной без риска рыночной ликвидности, определенного при гипотезе $\alpha \leq r$.

При наличии риска рыночной ликвидности не может быть получено единственное решение для проблемы ликвидации трейдером своей позиции. Это может быть либо продажа блоком S , как при отсутствии риска ликвидности, либо медленная ликвидация различными порциями, в сумме равных S акциям.

Удивителен тот факт, что на основе данного анализа можно продемонстрировать, что компромиссный выбор между этими двумя альтернативами зависит от единственного условия, называемого экономией на масштабе от торговых условий. Ликвидационная стоимость, задаваемая ожидаемой рыночной ценой в момент времени $t + \Delta(s)$, скорректированной на величину дисконта за количество и дисконтированной к

моменту времени t по ставке денежного рынка, всегда больше для продажи блоком, чем для пары идентичных по объему заявок (вторая размещается незамедлительно за исполнением первой), в сумме равных блоку. Проще говоря, экономия на масштабе для торговли приводит к тому, что издержки на совершение двух сделок больше, чем на одну.

Для этого условия Джэрроу и Субраманиан [Jarrow, 2001] демонстрируют, что нет никаких преимуществ от дробления всего объема на серию лотов. Следовательно, оптимальной стратегией всегда будет продажа блока. В этом случае также могут быть легко посчитаны ожидаемые поступления от оптимальной ликвидации S акций.

Решая задачу оптимальной ликвидации в выражении (22), авторы определяют $u(p, S)$ — максимальные дисконтированные поступления от продажи S акций при текущей рыночной цене p и в присутствии риска ликвидности. При наличии риска ликвидности и экономии на масштабе оптимальная политика зависит от превышения ожидаемой доходности: положительное превышение над доходностью ведет к ликвидации в момент времени T , в то время как отрицательное превышение над доходностью ведет к мгновенной ликвидации. Следовательно, выражение для оптимальной ожидаемой ликвидационной стоимости может быть получено в следующей форме:

$$u^*(p, S) = \begin{cases} Spc(S) \exp[(\alpha - r)\Delta(s)] & \text{если } \alpha \leq r \\ Spc(S) \exp[(\alpha - r)(T + \Delta(S))] & \text{если } \alpha > r \end{cases} \quad (25)$$

Торговая стратегия идентична той стратегии, что не включает риск ликвидности. Однако в отличие от ситуации без риска ликвидности, максимальные поступления, полученные от ликвидации, отличаются из-за дисконта за количество и лага исполнения. По условию дисконтированные ожидаемые поступления от ликвидации при наличии риска ликвидности всегда меньше.

Имея в распоряжении такое решение, можно проанализировать, является ли полученная оптимальная ликвидационная стоимость приемлемой мерой для приведения портфеля к рыночной стоимости. Эта мера подходит для случая, когда доходность акции меньше, чем ставка дисконтирования, но является неприемлемой в случае превышения данной ставки. В последнем случае у трейдера появляется стимул для выявления активов с положительной доходностью при продаже. Ликвидация таких активов будет им откладываться, чтобы отразить на балансе не-

медленное повышение стоимости во время процедуры приведения к рыночной стоимости.

Эlegantная процедура оценивания, предложенная в работе, решает эту проблему путем обобщения рыночного подхода, используемого в случае без риска ликвидности. Идея заключается в определении гипотетической начальной цены на рынке без риска ликвидности, которая обеспечила бы те же поступления, что и решение с риском ликвидности. Так как без риска ликвидности начальная рыночная цена является справедливой оценкой ликвидационной стоимости, то можно рассматривать эту цену при совершенной ликвидности как справедливую ожидаемую стоимость.

Джэрроу и Субраманиан [Jarrow, 1997] определяют ликвидационную стоимость акции как начальную рыночную цену p^* , такую что трейдер, не сталкивающийся с риском ликвидности, получит те же ожидаемые поступления, что и трейдер, сталкивающийся с риском ликвидности и текущей рыночной ценой p . Таким образом, ликвидационная стоимость равна p^* , такой что:

$$u^*(p^*, S) = u(p, S), \quad (26)$$

что при наличии экономии на масштабе в условиях торговли может быть введено в:

$$\begin{cases} Sp^* = Spc(S) \exp[(\alpha - r)\Delta(s)] & \text{если } \alpha \leq r \\ Sp^* c(S) \exp[(\alpha - r)T] = Spc(S) \exp[(\alpha - r)(T + \Delta(s))] & \text{если } \alpha > r \end{cases} \quad (27)$$

Решая данную систему уравнений для цены ликвидации p^* , можно получить одно и то же выражение в обоих случаях ($\alpha \leq r$ и $\alpha > r$), т.е.

$$p^* = pc(s) \exp[(\alpha - r)\Delta(S)] \quad (28)$$

Следовательно, ликвидационная стоимость портфеля может быть получена приведением к рыночной цене с использованием цены p^* , а не p , т.е. ликвидационная стоимость портфеля равна p^*S . Из (21) явно следует, что p^* меньше, чем p , т.е. ликвидационная цена ниже рыночной цены. Разность между p и p^* учитывает издержки ликвидации, приведенные к рыночной стоимости.

Когда нет экономии на масштабе в условиях торговли, (28) не является больше справедливой оценкой ожидаемой ликвидационной цены от оптимального исполнения. Это связано с тем, что продажа блоком в начальный или конечный момент времени не будет больше оптимальной стратегией. Следовательно, можно избежать неблагоприятного вли-

яния на цену, разделяя позицию на несколько порций. Тем не менее p^* можно все-таки использовать для консервативной оценки ликвидационной стоимости портфеля. В этом случае ликвидационная стоимость от стратегии отдельных торгов будет, по крайней мере, равна такой же величине, что и стоимость, полученная от продажи блоком в (28).

Теперь можно перейти к измерению риска ликвидности для расчета VaR . Для сравнения сначала следует рассчитать стандартный VaR для портфеля трейдера. Пусть δ — горизонт, за который рассматривается изменение стоимости портфеля. Стоит отметить, что горизонт и количество проданных акций — независимые величины. Устанавливая доверительный интервал величиной в два стандартных отклонения, можно легко рассчитать стандартный VaR как следующую величину:

$$VaR = pS \left| E \left[\ln \left(p(\delta) / p \right) \right] - 2 \text{std} \left[\ln \left(p(\delta) / p \right) \right] \right|, \quad (29)$$

где $p = p(0)$ и $\text{std} [.]$ представляет стандартное отклонение. При заданном в (19) ценовом процессе простой расчет дает:

$$VaR = pS \left| \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right] \delta - 2\sigma\sqrt{\delta} \right| \quad (30)$$

Это выражение представляет потери в денежном эквиваленте портфеля из-за движения цены на 2 величины стандартного отклонения ниже среднего.

Используя консервативную оценку ликвидационной стоимости, заданную выражением (28) [которое представляет собой стохастическую функцию от трех независимых стохастических переменных p , $c(S)$ и $\Delta(S)$], можно рассчитать VaR с учетом ликвидности рынка ($LVaR$) в следующем виде:

$$LVaR = pS \left| E \left[\ln \left(p(\Delta(S))c(S) / p \right) \right] - 2 \text{std} \left[\ln \left(p(\Delta(S))c(S) / p \right) \right] \right| \quad (31)$$

Используя выражение (22), авторы нетривиальным способом получают следующий результат:

$$LVaR = pS \left| \left[\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right] E[\Delta(S)] + E(\ln c(S)) - 2 \left[\sigma \sqrt{E[\Delta(S)]} + \left| \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right| \text{std}[\Delta(S)] + \text{std}[\ln c(S)] \right] \right| \quad (32)$$

Потери в денежном выражении стоимости портфеля, включающего риск ликвидности, больше, чем подразумеваются стандартным VaR . Расчет $LVaR$ отличается от стандартного расчета по трем направлениям:

- Во-первых, ликвидационный горизонт δ замещается ожидаемым лагом исполнения в продаже S акций, $E[\Delta(S)]$. Он может отличаться из-за объема акций в портфеле;

- Во-вторых, начальный дисконт по проданным акциям должен быть включен. Речь идет о выражении $E[\ln c(S)]$. Он отрицателен из-за $c(S) \leq 1$.

- В-третьих, волатильность изменений в стоимости должна быть увеличена, чтобы включить волатильность времени исполнения, $\left| \alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right| \text{std}[\Delta(S)]$, так же как и волатильность дисконта за количество, $\text{std}[\ln c(S)]$.

Описанная в данной работе величина $LVaR$ рассчитывается достаточно простым образом только в теории. Ее расчет требует оценки среднего и стандартного отклонения движения рыночной цены (α, σ), оценки среднего и стандартного отклонения дисконта за количество ($E[\ln c(S)]$, $\text{std}[\ln c(S)]$) и оценки среднего и стандартного отклонения времени исполнения для блока из S акций ($E[\Delta(S)]$, $\text{std}[\Delta(S)]$). В принципе они должны быть легко оцениваемы, чтобы иметь применение на практике.

Так дело обстоит только в случае среднего и стандартного отклонения рыночной цены, значения которых получаются стандартными статистическими техниками. Расчет остающихся параметров более проблематичен. Для того чтобы вывести параметры распределений $c(S)$ и $\Delta(S)$, финансовым институтам нужно собирать данные о временных рядах торгуемых акций, получаемых цен и статистику времени исполнения заявок разного объема.

Модель Джэрроу и Субраманиана [Jarrow, 1997] представляет собой увлекательную попытку применения риск-нейтрального подхода к управлению риском ликвидности. Ликвидационная стоимость зависит только от размера позиции S и «объективных» рыночных переменных, т.е. ожидаемого лага исполнения $\Delta(S)$ и количественного дисконта $c(S)$. Субъективные параметры политики или ограничения, такие как верхний предел времени ликвидации T не являются релевантными. В этой модели концепция динамической оптимизации обеспечивает только процедуру для получения компактной оценки ликвидационной стоимости и $LVaR$. Модель структурирована для того, чтобы сделать такие меры полностью

независимыми от произвольных (получаемых в результате дробления) стратегий исполнения.

2.5. Сравнение моделей риска рыночной ликвидности

К сожалению, каждый из рассмотренных подходов не отличается отражением всех четырех атрибутов ликвидности, рассмотренных в главе 1. Тем не менее, с данной точки зрения, наиболее полным и, как следствие, самым эффективным является расчет дисконта за ликвидность, изложенный в работах Джэрроу и Субраманиана [Jarrow, 1997, 2001]. Однако применение такого способа учета риска рыночной ликвидности на практике остается до сегодняшнего дня фактически неразрешимой задачей, что вызвано особой требовательностью модели к исходным данным. Если анализировать подходы, основанные на учете транзакционных издержек и оптимальной стратегии ликвидации, то они, также обладая концептуальной привлекательностью, не рассматривают совместно бид-аск спрэд и эндогенную стратегию ликвидации. Подходы, основанные на учете экзогенного бид-аск спрэда, не охватывают эндогенную ликвидность. Метод учета риска ликвидности через анализ ценовой эластичности, предложенный Берковицем [Berkowitz, 2000], также анализирует только эндогенную ликвидность, пренебрегая другими измерениями ликвидности.

Огромным преимуществом модели Бангя — Диеболда — Шуерманна — Страугхайера является ее относительная простота для применения как на уровне актива, так и на портфельном уровне при условии доступности надежных данных по котировкам цен покупки и продажи. В отличие от модели Альмгрена — Крисса, в модели Джэрроу — Субраманиана время ликвидации не является эндогенной (оптимизируемой) переменной. Таким образом, модель не рассчитывает ни оптимальное время для ликвидации, ни оптимальную последовательность торгов. Формат получаемых в конечном итоге формул напоминает подход Бангя — Диеболда — Шуерманна — Страугхайера, основанный на расчете квантиля рыночного спрэда. В модели Джэрроу — Субраманиана издержки ликвидации требуют оценки функции постоянного эффекта влияния на цену (дисконта за количество) и лага исполнения, в то время как в модели Бангя — Диеболда — Шуерманна — Страугхайера допускается, что котироваемые спрэды включают такую информацию и, следовательно, размер позиции не важен.

Применение модели Джэрроу — Субраманиана сталкивается с портящими задачами. Прежде всего, необходимо моделирование рас-

пределений лага исполнения и дисконта за количество. Так как, в силу различных причин, требуемые моделью данные пока еще не накоплены, придется найти способ использовать данные, по которым имеется статистика, для отражения параметров модели.

Тем не менее в предположениях и непосредственном анализе авторы предлагают альтернативный, более практический подход, который исходит напрямую из оценки волатильности цены ликвидации, устраняя трехфакторный процесс. Таким образом, элегантная по построению, как может справедливо показаться, данная модель не предлагает жизнеспособного подхода к управлению риском ликвидности.

Что касается релевантности модели Альмгрена — Крисса, можно отметить, что методика определения оптимальных стратегий исполнения имеет больший практический интерес, нежели выводы модели о риске ликвидности и его управлении.

Таким образом, риск ликвидности является до сих пор малоизученной проблемой, если судить об этом по рассмотренной литературе. В принципе, можно допустить, что определенные финансовые институты располагают методикой учета ликвидности в оценке потенциальных потерь портфеля, но не обнародовали ее вплоть до настоящего времени, чтобы, таким образом, иметь сравнительное преимущество перед конкурентами¹⁵.

На практике требования по наличию данных для расчета *LVaR*, охватывающего все виды издержек при ликвидации позиции (особенно значительного объема), впечатляют. Так, исследования ликвидности, учитывающие глубину рынка, требуют обработки колоссальных объемов исторических данных. Для анализа необходимы временные срезы рынка с максимально возможной глубиной (например, на РТС в интерактивном режиме можно наблюдать всего пять лучших выставленных заявок на покупку и пять лучших выставленных заявок на продажу). Такая информация, несомненно, представляет огромную ценность для учета ликвидности в различных практических процедурах управления финансовыми рисками. Однако для ее сбора нужно вести фактически непрерывный мониторинг рынка, что является само по себе трудновыполнимой задачей, решение которой под силу только или организаторам торгов, или основным участникам.

¹⁵ Мне представляется такая ситуация вполне возможной, если учесть интерес, который возник к управлению риском ликвидности после краха LTCM. Однако трудно предположить, что за столь короткий срок, прошедший после этого знаменательного события (1999 г.), можно накопить данные, которые до того момента никому не приходило в голову собирать.

К сожалению, такая информация стала накапливаться только в последние несколько лет, что вызвано потребностями в колоссальной вычислительной мощи и в надлежащих устройствах хранения данных. Однако, эти необходимые для анализа ликвидности данные, как правило, отсутствуют в публичных отчетах о состоянии рынка. На данный момент доступны лишь данные маркет-мейкеров о заключаемых сделках по выставленным ими котировкам. Очевидно, что значительная часть сделок осуществляется без участия маркет-мейкера по ценам внутри рыночного спреда между заинтересованными сторонами.

Более того, на практике оказывается, что большие объемы реализуются путем совершения договорных сделок с непосредственными переговорами между сторонами, что означает, как правило, конфиденциальность. Информация о таких сделках весьма ограничена. К примеру, практически никогда не известен период времени, в течение которого прилагались усилия по реализации (или приобретению) актива, следовательно, оценивать ликвидность как возможность *быстро и без потери в цене* совершить сделку практически невозможно. Следовательно, методами, описанными в главе 2, можно анализировать ликвидность только организованного биржевого рынка. Однако даже такая постановка задачи сталкивается с огромными трудностями при практическом исполнении.

К сожалению, на данный момент доступны лишь данные, которые характеризуют «сжатость» рынка, — данные о котированном спреде. Такого рода данных недостаточно, чтобы судить о глубине рынка и, следовательно, об оптимальной стратегии ликвидации портфеля. Другими словами, с помощью таких данных нельзя учесть в полной мере ликвидность рынка, если ликвидируемая позиция превышает значение глубины на рис. 2.

Заключение

В работе были продемонстрированы различные способы учета риска рыночной ликвидности, которым долгое время пренебрегала как финансовая теория, так и практика управления финансовыми рисками.

Риск рыночной ликвидности до сих пор не моделируется так тщательно, как рыночный, кредитный или операционный риск.

Для более полного отражения ликвидности необходимы исследования, учитывающие глубину рынка (чтобы можно было дать количествен-

ную оценку эффекта влияния на цену). Для моделирования глубины рынка требуется обработка колоссальных объемов исторических данных. Для ее сбора придется вести фактически непрерывный мониторинг рынка, что является само по себе трудновыполнимой задачей, решение которой под силу только на организованном рынке при условии доступа к торговым терминалам. Вполне возможно, что анализ риска рыночной ликвидности редко производится финансовыми институтами по причине отсутствия необходимых для анализа данных.

Тем не менее ряд вопросов определения параметров глубины рынка с целью последующего перехода к выводу функции влияния на цену может быть разрешен с помощью микроструктурных моделей рынка. Другими словами, требуется эмпирическая проверка таких моделей, что также является достаточно сложной задачей, если учесть их продолжающее расти количество. Вследствие отсутствия аппроксимации функции, выражающей эффект влияния на цену, модели определения оптимальной стратегии ликвидации актива, рассмотренные в работе, испытывают трудности в построении надежного показателя потенциальных потерь портфеля с учетом ликвидности рынка.

На мой взгляд, единственно верный на данном этапе выход в сложившейся ситуации заключается в использовании субъективных оценок на основе различных стратегий ликвидации.

Однако таких стратегий может быть невероятное количество, если не наложить ограничения на какие-либо из следующих параметров: время ликвидации портфеля, характер и функция влияния на цену, волатильность рыночного спреда, лаги в исполнении, стратегия ликвидации и т.д. В принципе, все многообразие таких стратегий заключено между двумя крайними случаями: мгновенной ликвидацией и постепенной ликвидацией одинаковыми порциями. Как было продемонстрировано в работе, сравнивать стратегии лучше всего на основе *VaR* с учетом ликвидности рынка (*LVaR*), требующего оценку функции, выражающей эффект влияния на цену (пусть и экзогенную).

Такие нововведения неизбежно приведут к тому, что под стоимостью портфеля будут понимать его ликвидационную стоимость, учитывающую как можно больше из изложенных в работе аспектов ликвидности: «сжатость», глубину, релаксацию и немедленность рынка. Данная стоимость может впоследствии заменить рыночную стоимость в различных методах управления рисками портфеля, так как лучше отражает потенциальные потери при немедленном закрытии позиции.

На мой взгляд, на основе показателя *LVaR* можно создать упорядоченную систему взглядов, позволяющую оценивать различные страте-

гии ликвидации позиции (как предлагали Альмгрен и Крисс [Almgren, 1999a] для упрощения выбора оптимальной стратегии). С другой стороны, данную систему можно использовать для нахождения оптимального значения ликвидационной стоимости, которое будет служить заменой рыночной стоимости (как предлагали Джэрроу и Субраманиан [Jarrow, 1997]) в процедурах приведения к рыночной стоимости (**marking-to-market**). Последнее предложение имеет основание, так как рыночная стоимость, будучи, несомненно, лучше балансовой стоимости в плане выявления возможных при немедленной ликвидации убытков, также не может быть получена трейдером при закрытии позиции. Другими словами, *LVaR* лучше использовать для сравнения стратегий и поиска наилучшей из них. Выбор на основании такого критерия намного проще в математическом отношении, чем поиск оптимальной стратегии исполнения, зависящей от различных факторов (времени исполнения, объема заявки, стратегии ликвидации, вида функции влияния на цену и т.д.). Однако в этом случае также невозможно обойтись без исторических данных о глубине рынка.

Литература

1. Смирнов С.Н. Риски рыночной ликвидности: измерение и управление / Международная конференция «Международный опыт риск-менеджмента и особенности развивающихся рынков». М., 2004.
2. Шарп У.Ф., Александер Г.Дж., Бэйли Дж.В. Инвестиции. М.: Инфра-М, 1999.
3. Шоломицкий А.Г. Теория риска. Выбор при неопределенности и моделирование риска. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2005.
4. Admati A.R., Pfleiderer P. A theory of intraday patterns: Volume and price variability // Review of Financial Studies. 1988. Vol. 1. P. 3–40.
5. Almgren R., Chriss N.A. Optimal Execution of Portfolio Transactions. University of Chicago, Department of Mathematics, 1999a.
6. Almgren R., Chriss N.A. Value Under Liquidation // Risk. Vol. 12. No. 12. P. 61–63.
7. Angelidis T., Benos A. Liquidity Adjusted Value-at-Risk Based on the Components of the Bid-Ask Spread. University of Piraeus, Department of Banking and Financial Management, 2005.
8. Auguy M., Le Saout E. Hidden Liquidity on the French Stock Market. 2000.

9. Bangia A., Diebold F.X., Schuermann T., Stroughair J.D. Modeling Liquidity Risk, With Implications for Traditional Market Risk Measurement and Management, Warton. 1998.

10. Bank for International Settlements. Amendment to Capital Accord to Incorporate Market Risks / Bank for International Settlements – Basle Committee. 1996 (January).

11. Bank for International Settlements. Market Liquidity: Research Findings and Selected Policy Implications / Bank for International Settlements – Monetary and Economic Department, Committee on the Global Financial System, Basel. 1999 (May).

12. Berkowitz J. Incorporating Liquidity Risk into VaR Models: Working Paper, Graduate School of Management, University of California, Irvine, 2000 (September).

13. Bertsimas D., Lo A. Optimal control of execution costs // Journal of Financial Markets. 1998. Vol. 1. No. 1. P. 1–50.

14. Black F. Towards a Fully Automated Exchange, Part I // Financial Analysts Journal. 1971. Vol. 27. P. 29–34.

15. Copeland T., Galai D. Information effects on the bid-ask spread // Journal of Finance. 1983. Vol. 38. P. 1457–1469.

16. Demsetz H. The Cost of Transacting // Quarterly Journal of Economics. 1968. Vol. 82. P. 33–53.

17. Diebold F.X., Hickman A., Inoue A., Schuermann T. Scale Models // Risk. 1998. Vol. 11. No. 1. P. 104–107.

18. Easley D., O'Hara M. Price, Trade Size, and Information in Securities Markets // Journal of Financial Economics. 1987. Vol. 19. P. 69–90.

19. François-Heude A., Van Wynendaele P. Integrating Liquidity Risk in a Parametric Intraday VaR Framework / University of Perpignan, 7th Belgian Financial Research Forum, Liege. 2002.

20. Glosten L. Is the Electronic Open Limit Order Book Inevitable? // Journal of Finance. 1994. Vol. 49. P. 1127–1161.

21. Hisata Y., Yamai Y. Research Toward the Practical application of Liquidity Risk Evaluation Methods: Discussion Paper, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, 2000.

22. Huang R.D., Stoll H.R. The Components of the Bid-Ask Spread: A General Approach // The Review of Financial Studies. 1997. Vol. 10. P. 995–1034.

23. Jarrow R., Subramanian A. Mopping Up Liquidity // Risk. 1997. Vol. 10. No. 12. P. 170–173.

24. Jarrow R., Subramanian A. The Liquidity Discount // Mathematical Finance. 2001. Vol. 11. No. 4. P. 447–474.

25. Jorion P. Value-at-risk: the new benchmark for managing financial risk. 2 ed. McGraw-Hill, 2000.
26. Lawrence C., Robinson G. Liquidity, Dynamic Hedging and Value at Risk // Risk Management for Financial Institutions. 1997. P. 63–72.
27. Le Saout E. Incorporating Liquidity Risk in VaR Models. University of Rennes, 2000.
28. Lippman S., McCall J.J. An Operational Measure of Liquidity // American Economic Review. 1986. Vol. 76. P. 43–55.
29. Perold A.F. The Implementation Shortfall: Paper versus Reality // Journal of Portfolio Management. 1988. Vol. 14. P. 4–9.
30. Stoll H.R. Friction // Journal of Finance. 2000. Vol. 55. No. 4. P. 1479–1514.

*Препринт WP16/2007/04
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука*

В.В. Науменко

Моделирование риска рыночной ликвидности с учетом глубины рынка

Публикуется в авторской редакции

Зав. редакцией *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

ЛР № 020832 от 15 октября 1993 г.
Отпечатано в типографии ГУ ВШЭ с представленного оригинал-макета.
Формат 60×84 ¹/₁₆, Бумага офсетная. Тираж 150 экз. Уч.-изд. л. 3,4.
Усл. печ. л. 3,1. Заказ № . Изд. № 820.

ГУ ВШЭ, 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография ГУ ВШЭ, 125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Тел.: (495) 772-95-71; 772-95-73

Для заметок
