ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 426, № 3, с. 318–320

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.8

ОБ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЯХ В ОРДИНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

© 2009 г. Ф. Т. Алескеров, А. Н. Субочев

Представлено академиком С.Н. Васильевым 24.07.2008 г.

Поступило 03.12.2008 г.

Введено понятие k-устойчивой альтернативы. Определена связь классов k-устойчивых альтернатив с доминирующим, непокрытым и слабоустойчивым множествами.

Ординальная задача группового выбора определяется конечным множеством альтернатив и тем, что мнения участников относительно альтернатив выражаются в виде бинарных отношений предпочтений; решение задачи ищется в виде выбора наилучшей альтернативы. В качестве такой альтернативы обычно принимается так называемый победитель Кондорсе [1] – альтернатива, которая более предпочтительна по сравнению с другими для большинства участников при парном сравнении. Однако условия его существования являются весьма ограничивающими [2], и победитель Кондорсе в общем случае отсутствует.

Были предприняты многочисленные попытки по расширению множества выбираемых альтернатив до некоторых всегда непустых подмножеств общего множества альтернатив, строящихся с помощью отношения мажоритарного доминирования μ, в котором альтернатива a предпочитается альтернативе b, если большинство участников имеет такое предпочтение. Будучи различными воплощениями идеи оптимального коллективного выбора, эти множества-решения дают возможность сравнивать и оценивать процедуры коллективного выбора. Наличие связи множества с какой-либо процедурой сокращает число альтернатив, которые могут стать коллективным решением, т.е. позволяет делать предсказания относительно результата выбора.

В настоящей работе в рамках такого класса отношений мажоритарного доминирования μ, как турниры (связные ($\forall x, y \Rightarrow x\mu y \vee y\mu x$) и асимметричные ($\forall (x, y)$: $(x, y) \notin \mu \Rightarrow (y, x) \in \mu$) отношения), рассматриваются три концепции решений: доминирующее множество [3–6], слабоустойчивое множество [7], непокрытое множество [5, 8]. Показано, что иерархия доминирующих множеств может рассматриваться как макроструктура турнира. Сформулирован критерий, определяющий принадлежность альтернативы объединению минимальных слабоустойчивых множеств, и как следствие доказывается, что непокрытое множество является подмножеством объединения минимальных слабоустойчивых множеств. Далее идея устойчивости используется для обобщения концепций слабоустойчивого и непокрытого множеств. Вводится понятие k-устойчивых альтернатив. Определяются их свойства и соотношение с указанными выше концепциями решений.

Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дано конечное множество альтернатив[1] A, $|A| > 2$. Есть конечное число участников $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, $|N| > 1$, у которых имеются предпочтения относительно альтернатив из A. В общем случае эти индивидуальные предпочтения могут быть произвольными бинарными отношениями. В теории группового выбора, как правило, предполагается, что они описываются слабыми порядками P_i, $i \in N$, т.е. отношениями, в которых о любых двух альтернативах всегда можно сказать, что либо одна из них предпочтительнее другой, либо они равноценны.

Формально, отношение строгого предпочтения P_i удовлетворяет условиям антирефлексивности ($x\bar{P}_i x$), транзитивности (xP_iy & $yP_iz \Rightarrow xP_iz$) и отрицательной транзитивности ($x\bar{P}_i y$ & $y\bar{P}_i z \Rightarrow x\bar{P}_i z$). Отношение равноценности $I_i = A \times A \backslash (P_i \cup P_i^-)$ для P_i, где $P_i^- = \{(x, y) | (y, x) \in P_i\}$, является отношением эквивалентности, т.е. рефлексивным (xI_ix), симметричным ($xI_iy \Rightarrow yI_ix$) и транзитивным отношением.

Отношение мажоритарного доминирования есть бинарное отношение μ, $\mu \subset A \times A$, конструи-

[1] Определения и обозначения, используемые в настоящем разделе, заимствованы, в основном, из [7].

руемое так: $(x, y) \in \mu$, если альтернатива x более предпочтительна, чем альтернатива y для большинства (так или иначе определенного) участников. Для абсолютного большинства $x\mu y \Leftrightarrow \mathrm{card}\{i \in N, xP_iy\} > \mathrm{card}\{i \in N, y(P_i \cup I_i)x\}$. Если верно $x\mu y$, то говорится, что альтернатива x доминирует над альтернативой y, а альтернатива y доминируема альтернативой x. По предположению, большинство определено таким образом, что μ асимметрично, т.е. $(x, y) \in \mu \Rightarrow (y, x) \notin \mu$.

Отношение μ называется турниром, если оно полно, т.е. $(y, x) \notin \mu \Rightarrow (x, y) \in \mu$. В настоящей статье рассматриваются только турниры.

Упорядоченная пара $x \to y$ ($x \to y \Leftrightarrow x\mu y$) называется шагом. Путь $x \to y_1 \to y_2 \to \ldots \to y_{k-2} \to y_{k-1} \to \to y$ от x до y есть начинающаяся с x и заканчивающаяся в y последовательность шагов, в которой вторая альтернатива каждого шага совпадает с первой альтернативой следующего шага. Иными словами, путь есть последовательность альтернатив $x, y_1, y_2, \ldots, y_{k-2}, y_{k-1}, y$, в которой каждая альтернатива доминирует над следующей за ней, т.е. $x\mu y_1, y_1\mu y_2, \ldots, y_{k-2}\mu y_{k-1}, y_{k-1}\mu y$. Число шагов в пути называется его длиной. Альтернатива y называется достижимой за k шагов из x, если существует путь длины k от x до y.

Нижний контур альтернативы x в μ есть множество $L(x)$ всех альтернатив, доминируемых x, т.е. $L(x) = \{y \in A: x\mu y\}$. Соответственно верхний контур альтернативы x в μ есть множество $D(x)$ всех альтернатив, доминирующих над x, т.е. $D(x) = \{y \in A: y\mu x\}$. Поскольку μ – турнир, то $L(x) \cup \cup D(x) \cup \{x\} = A$.

Победитель Кондорсе CW есть альтернатива, доминирующая над всеми остальными альтернативами, т.е. $\forall x: x \neq \mathrm{CW} \Rightarrow \mathrm{CW}\mu x$.

Множество $D \subseteq A$ называется доминирующим (также мажоритарное множество [3]), если любая альтернатива из D доминирует над любой альтернативой, не принадлежащей D, т.е. D – доминирующее множество $\Leftrightarrow (\forall(x, y): (x \in D \;\&\; y \in \in A\backslash D) \Rightarrow (x, y) \in \mu)$ [2, 3]. Доминирующее множество MD называется минимальным доминирующим множеством (недоминируемое множество (множество Кондорсе) [6], GETCHA [9]; слабый верхний цикл [10]), если ни одно из его подмножеств (кроме него самого) не является доминирующим множеством [5, 6, 10]. Множество MD всегда существует и единственно [6].

Говорят, что альтернатива x покрывает альтернативу y, если $x\mu y$ и $D(x) \subseteq D(y)$ [5, 8]. Таким образом, x непокрыта $\Leftrightarrow (\forall y: y\mu x \Rightarrow \exists z: (x\mu z \;\&\; z\mu y))$. Непокрытое множество [8] UC состоит из всех непокрытых альтернатив. Множество UC всегда непусто и является подмножеством MD, $UC \neq \varnothing$, $UC \subseteq MD$ [8].

СЛАБОУСТОЙЧИВОЕ МНОЖЕСТВО И УСТОЙЧИВЫЕ АЛЬТЕРНАТИВЫ

Множество WS называется слабоустойчивым множеством [7], если оно обладает следующим свойством: если x принадлежит WS и какая-то альтернатива y, не принадлежащая WS, доминирует над x, то в WS обязательно найдется альтернатива z, доминирующая над y, т.е. WS слабоустойчивое $\Leftrightarrow (\forall x, y: (x \in WS \;\&\; y \in A\backslash WS \;\&\; y\mu x) \Rightarrow \exists z: (z \in WS \;\&\; z\mu y))$. В терминах $D(x)$ и $L(x)$ WS – слабоустойчивое множество $\Leftrightarrow (\forall y: (y \notin WS \;\&\; WS \cap \cap L(y) \neq \varnothing) \Rightarrow WS \cap D(y) \neq \varnothing)$. Слабоустойчивое множество MWS называется минимальным слабоустойчивым множеством, если ни одно из его подмножеств (кроме него самого) не является слабоустойчивым множеством. Если минимальное слабоустойчивое множество неединственно, то функция группового выбора определяется как объединение таких множеств [7], которое будет обозначаться через $UMWS$.

Из определения следует, что любое доминирующее множество является слабоустойчивым. Следовательно, из того, что MD всегда непусто, вытекает, что $UMWS$ тоже всегда непусто.

Л е м м а. *Любое минимальное слабоустойчивое множество является подмножеством* MD, $MWS \subseteq MD$.

С л е д с т в и е. Поскольку $UMWS$ и UC всегда непусты, то если есть победитель Кондорсе CW, множества MD, $UMWS$ и UC совпадают и содержат только одну альтернативу CW, $MD = UMWS = = UC = \{\mathrm{CW}\}$.

Определение слабоустойчивого множества, данное в [7], глобально. Для практических вычислений необходим локальный критерий принадлежности, т.е. способ определять, принадлежит ли данная альтернатива какому-либо минимальному слабоустойчивому множеству или нет. Теорема 1 формулирует такой критерий.

Т е о р е м а 1. *Альтернатива x принадлежит объединению минимальных слабоустойчивых множеств UMWS тогда и только тогда, когда либо* 1) *x непокрыта, либо* 2) *какая-то из альтернатив, принадлежащих нижнему контуру x, непокрыта, т.е.* $x \in UMWS \Leftrightarrow (x \in UC \vee \exists y: (y \in L(x) \;\&\; y \in UC))$.

С л е д с т в и е. *Непокрытое множество является подмножеством объединения минимальных слабоустойчивых множеств*, $UC \subseteq UMWS$.

Следовательно, все рассматриваемые в данной работе множества связаны отношением включения $UC \subseteq UMWS \subseteq MD \subseteq A$. Можно показать, что существуют турниры, где все включения строгие, т.е. $UC \subset UMWS \subset MD \subset A$.

Можно расширить понятия непокрытого и слабоустойчивого множеств, если обратиться к исследованию относительной устойчивости отдельных альтернатив и их множеств. Альтернатива x будет называться обобщенно устойчивой (или просто устойчивой), если любая альтернатива в A достижима из x, в противном случае x считается неустойчивой. Любая альтернатива в A достижима из x тогда и только тогда, когда x принадлежит MD [6], таким образом, все альтернативы из MD и только они обобщенно устойчивы.

Поскольку A конечно, то, если y достижима из x, существует путь от x до y наименьшей длины. Введем функцию наименьшего расстояния $l(x, y)$. Она принимает значения из множества целых неотрицательных чисел, равные длине кратчайшего пути от x до y. Функция $l(x, y)$ обладает свойством $l(x, y) > 1 \Rightarrow l(y, x) = 1$.

Для x и y таких, что $x \in D$, $y \in A \backslash D$, где D – доминирующее множество, значение функции $l(y, x)$ не определено, так как x недостижима из y. Для таких пар оно предполагается равным ∞, $l(y, x) = \infty$. Если x принадлежит к MD, то значения $l(x, y)$ определены и конечны для всех $y \in A \backslash \{x\}$. Также полагаем $l(x, x) = 0$, чтобы $l(x, y)$ была определена на всем множестве A. В терминах $l(x, y)$ альтернатива x обобщенно устойчива, если $\forall y$: $y \in A \Rightarrow l(x, y) < \infty$.

Пусть $l_{\max}(x)$ обозначает функцию максимума длин кратчайших путей от x до остальных альтернатив, $l_{\max}(x) = \max\limits_{y \in A} l(x, y)$. Если $l_{\max}(x) = k < \infty$, то любой альтернативы в A можно достичь из x не более чем за k шагов, но при этом существует, по крайней мере, одна альтернатива, достижимая из x минимум за k шагов. Значение функции $l_{\max}(x)$ будет называться порядком устойчивости альтернативы x. Если порядок устойчивости x равен k, $k < \infty$, то x будет называться k-устойчивой альтернативой[1]. Пусть $SP_{(k)}$ обозначает класс k-устойчивых альтернатив, $x \in SP_{(k)} \Leftrightarrow l_{\max}(x) = k$.

Из определения следует, что порядок устойчивости x равен единице тогда и только тогда, когда x – это победитель Кондорсе, x = CW. Следовательно, $SP_{(1)} = \{\mathrm{CW}\}$. Также очевидно, что если $SP_{(1)} \neq \varnothing$, то все остальные классы $SP_{(k > 1)} = \varnothing$, ибо CW недостижим ни из одной альтернативы в A.

Из определения отношения покрытия следует, что x имеет порядок устойчивости $k = 2$ тогда и только тогда, когда x непокрыта. Таким образом, класс $SP_{(2)}$ – это непокрытое множество, $SP_{(2)} = UC$.

Т е о р е м а 2. $\exists m$: 1) $SP_{(k)} = \varnothing$, $\forall k$: $k > m$; 2) $SP_{(m)} \neq \varnothing$; 3) $MD = SP_{(1)} + SP_{(2)} + SP_{(3)} + \ldots + SP_{(m)}$.

По построению, классы устойчивых альтернатив не пересекаются, $i \neq j \Rightarrow SP_{(i)} \cap SP_{(j)} = \varnothing$. Поскольку все устойчивые альтернативы принадлежат MD и только альтернативы из MD устойчивы, MD представимо в виде прямой суммы всех классов k-устойчивых альтернатив, $MD = SP_{(1)} + SP_{(2)} + SP_{(3)} + \ldots + SP_{(k)} + \ldots$ Поскольку A конечно, то существует, по крайней мере, одна обобщенно устойчивая альтернатива, чей порядок устойчивости максимален, $m = \max\limits_{x \in MD} l_{\max}(x)$.

Т е о р е м а 3 (непустота классов k-устойчивых альтернатив). *Если победитель Кондорсе отсутствует, то каждый класс устойчивых альтернатив порядка* k, *меньшего либо равного максимальному и большего единицы, непуст*, $\forall SP_{(k)} \neq \varnothing, 2 \leq k \leq m = \max\limits_{x \in MD} l_{\max}(x)$.

Наконец, пусть $P_{(k)}$ обозначает множество тех альтернатив, от которых можно достичь любой альтернативы в A не более чем за k шагов. По определению, $P_{(k)}$ есть прямая сумма всех классов устойчивых альтернатив порядка k и меньше, $P_{(k)} = SP_{(1)} + SP_{(2)} + \ldots + SP_{(k)}$. Следовательно, в MD возникает следующая система подмножеств:

1) $P_{(1)} = \{\mathrm{CW}\} = MD$; если $P_{(1)} = \varnothing$, то

2) $P_{(2)} = UC \neq \varnothing$ – непокрытое множество;

3) $P_{(1)} \subset P_{(2)} \subset P_{(3)} \subset \ldots \subset P_{(m-1)} \subset P_{(m)} = MD$, $m = \max\limits_{x \in MD} l_{\max}(x)$, причем все включения строгие согласно теореме 3.

По аналогии с k-устойчивыми альтернативами можно определить понятия обобщенно-устойчивого множества, минимального k-устойчивого множества и классов минимальных k-устойчивых множеств.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Научного фонда ГУ–ВШЭ, грант № 08–04–0008.

[1] Чем больше порядок устойчивости альтернативы, тем менее она устойчива.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arrow K.J.* Social Choice and Individual Values. New Haven: Yale Univ. Press, 1963 (1st ed. 1951).
2. *Plott C.* // Amer. Econ. Rev. 1967. V. 67. № 4. P. 787–806.
3. *Ward B.* // J. Conflict Resolution. 1961. V. 5. P. 379–389.
4. *Smith J.* // Econometrica. 1973. V. 41. № 6. P. 1027–1041.
5. *Fishburn P.* // SIAM J. Appl. Math. 1977. V. 33. P. 469–489.
6. *Miller N.* // Amer. J. Politic. Sci. 1977. V. 21. P. 769–803.
7. *Aleskerov F., Kurbanov E.* In: Current Trends in Economics: Theory and Applications B.; Heidelberg; N.Y.: Springer, 1999. P. 13–27.
8. *Miller N.* // Amer. J. Politic. Sci. 1980. V. 24. P. 68–96.
9. *Schwartz T.* The Logic of Collective Choice. N.Y.: Columbia Univ. Press, 1986.
10. *Duggan J.* // Social Choice and Welfare. 2007. V. 28. P. 491–506.