Некоторые факториальные классы графов, определяемые двумя запрещёнными графами

Алексеев В.Е., Замараев В.А., Лозин В.В., Мэйхилл Колин
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Все рассматриваемые здесь графы являются обыкновенными, помеченными, с множеством вершин $\{1,\dots,n\}$. Множество графов X называется наследственным классом графов, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из X, также принадлежит X. В [1] доказано, что для любого бесконечного наследственного класса графов, отличного от класса всех графов, справедливо:

$$\log_2|X_n| = \left(1-\frac{1}{c(X)}\right)\frac{n^2}{2}+o(n^2) \qquad (1)$$

где $c(X)$ - натуральное число, называемое индексом класса X и определенное в [1]. При этом множество всех бесконечных наследственных классов графов, отличных от класса всех графов, разбивается на слои, где каждому слою принадлежат классы с одним и тем же значением индекса. Слой с индексом равным единице, который называется унитарным, представляет особый интерес, так как при $c=1$ соотношение (1) не даёт асимптотики для величины $\log_2|X_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса X [2]. В [3] было исследовано асимптотическое поведение функции $|X_n|$ для классов из нижней части унитарного слоя. В [4] были рассмотрены четыре самых нижних яруса (множество классов с одинаковым порядком функции $\log_2|X_n|$) унитарного слоя, для которых $\log_2|X_n|$ по порядку совпадает с 1, $\log n$, n, $n\log n$. Данные ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным соответственно. Для первых трёх ярусов даны структурные описания, и в каждом из четырёх найдены все минимальные элементы [4]. Факториальный ярус до сих пор остается наименее изученным ярусом нижней части унитарного слоя. В то же время этому ярусу принадлежат многие известные классы: леса, планарные графы, рёберные графы, интервальные графы, кографы и др. Известно, что любой наследственный класс графов X можно определить с помощью множества M запрещённых подграфов, при этом принято писать, что $X = Free(M)$. В данном докладе приводятся недавние результаты относительно факториальности некоторых наследственных классов, у которых множество запрещённых графов состоит из двух элементов. Перед тем как сформулировать основные результаты, введём некоторые обозначения. Через $\Phi_{s,t}$ обозначим граф, состоящий из двух звёзд: $K_{1,s+1}$ и $K_{1,t+1}$, которые имеют ровно одну общую листовую вершину. Через $T_{1,2,3}$ обозначим граф, полученный из звезды $K_{1,3}$ одиночным подразбиением одного из её ребер и двойным подразбиением другого её рёбра. Граф, получаемый из полного $n-$вершинного графа удалением одного ребра, обозначим через $K_n - e$. Основные результаты сформулируем в виде нескольких теорем:

Теорема 1. *Для любых натуральных* $p \ge 3, s,t \ge 1$, *классы* $Free(\Phi_{s,t}+O_1, K_p)$ *и* $Free(T_{1,2,3}, K_p)$ *– факториальные.*

Теорема 2. *Для любых натуральных* $s,t \ge 1$, *классы* $Free(\Phi_{s,t}+O_1, \overline{K_{1,2}+K_1})$ *и* $Free(T_{1,2,3}, \overline{K_{1,2}+K_1})$ *- факториальные*

Теорема 3. *Для любых натуральных* $l \ge 1, n \ge 2$ *и* $m \ge 4$, *классы* $Free(K_{1,n}+O_l, K_m - e)$ *– факториальные.*

Теорема 4. *Для любого натурального* $m \ge 4$, *классы* $Free(2K_2, K_m - e)$ *– факториальные.*

Теорема 5. *Для любых натуральных* $n,m \ge 3$ *классы* $Free(K_{1,n}, K_m + O_1)$ *– факториальные.*

Литература:

1. Алексеев В. Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная Математика. – 1992. – Т. 4, вып. 2. – С. 148-157.
2. Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов // В сб. Проблемы кибернетики. вып. 39 / Под ред. С. В. Яблонского. – М.: Наука, 1982. – С. 151-164.
3. Scheinerman E. R. and Zito J. On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory – 1994. – V. 61, Ser. B. – P. 16-39.
4. Алексеев В.Е. О нижних ярусах решётки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций, – 1997. – Серия 1, Т. 4. – С. 3-12.

Алгоритм решения задачи упорядочения матриц на основе метода вложенных сечений

Краснова С.Ю.
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

При решении систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом исключений Гаусса разреженные матрицы коэффициентов претерпевают заполнение. Разреженные матрицы больших порядков представляют в сжатом виде [2] – хранят по возможности только ненулевые значения. Если в процессе решения СЛАУ появляются новые ненулевые элементы, то необходимо выделять память под их хранение. Заполнение матрицы можно изменять, если осуществлять упорядочивание- симметричную перенумерацию строк/столбцов матрицы коэффициентов. Таким образом, возникает задача поиска упорядочения матрицы коэффициентов, которое приведет к системе хранения матриц с минимизацией затрат на хранение матрицы коэффициентов с учетом ее последующего заполнения и минимизацией числа новых ненулевых элементов. Задача упорядочения является NP- трудной [1]. Для прикладных задач больших порядков применяются быстрые эвристические методы их решения.

При решении СЛАУ заполнению подвергается только элементы из ленты матрицы [2]. Более эффективными на практике оказываются профильные методы [2], минимизирующие локальные ленты матриц (профиль). В работе предлагается графовый метод упорядочения матриц, направленные на минимизацию заполнения, но контролирующий размер сжатой матрицы коэффициентов. Сформулируем задачу упорядочения симметричных матриц в терминах графов. Если известен факт, есть ли в заданной строке и заданном столбце ненулевой элемент, то матрица A ассоциируется с графом $G=G(A)=(V,E)$. Тогда графовый аналог задачи упорядочения матрицы формулируется так: требуется найти упорядочение $f=(f_1,\dots,f_n)$ множества вершин графа G, обеспечивающее минимальную ширину ленты $F(f)=\max\limits_{\{u,v\}\in E}|f(u)-f(v)| \to \min$. Эта задача известна под название «ширина графа» [2].

В основе предлагаемого метода лежит алгоритм вложенных сечений, основанный на рекурсивном разбиении графа. Алгоритм строит корневую структуру уровней смежности и в качестве разделителя выбирает средний уровень. Предлагается выбирать разделитель на основе решения задачи бипразбиения графа, минимизируя количество ребер, связывающих подграфы разбиения. Метод решения задачи бипразбиения основывается на алгоритме Кернигана-Лина, заключается в обмене вершинами между подмножествами разбиения. Граф $G(V,E)$ разбивается на 2 подграфа (V_1,V_2), сечение C – множество ребер, связывающих вершины из разных подграфов; множество S - множество вершин инцидентных ребрам сечения. После выделения разделителя, выполняется процесс перенумерации вершин-