ВЕСТНИК
САРАТОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011

№3 (57)
Выпуск 1

Научно-технический журнал

Издается с 2003 г.
Выходит один раз в квартал
Сентябрь 2011 г.

Журнал включен в перечень ведущих рецензируемых журналов и научных изданий, утвержденный президиумом ВАК Министерства образования и науки РФ, в которых публикуются основные научные результаты диссертаций на соискание ***ученых степеней доктора и кандидата наук***

Адрес редакции:
Саратов, 410054, ул. Политехническая, 77
Телефон: (845 2) 99-88-27
E-mail: vestnik @ sstu. ru
http://dni. sstu. ru/vestnik.nsf
Факс: (845 2) 52-53-02

Подписано в печать 14.09.11
Усл. печ. л. 41,5 Уч.-изд. л. 19,0
Тираж 100 экз. Заказ 239
Отпечатано в Издательстве ГАУ
«Саратов-Медиа»,
410031 г., Саратов, ул. Волжская, 28

Полная электронная версия журнала размещена в системе РИНЦ
в открытом доступе на платформе eLIBRARY.RU

Подписной индекс 18378
(каталог «Газеты. Журналы» на 2-е полугодие 2011 г.)

ISSN 1999-8341

VESTNIK
SARATOV STATE TECHNICAL UNIVERSITY 2011

№ 3 (57)
Issue 1

Scientific Journal

Since 2003
Once in a quarter
September 2011

This journal is included into the list of leading reviewed journals and scientific publications approved by the presidium of Ministry of Education and Sciences of Russian Federation where major scientific thesis's results for academic degree competition for a doctor and a candidate of sciences

Editorial office: 77, Politechnicheskaya Street
Saratov, 410054
Russia
Telephone: +8452/99-88-27
E-mail: vestnik @ sstu. ru
http://dni. sstu. ru/vestnik.nsf
Fax: +8452/52-53-02

Sighned for publishing: 15.06.11
Apr. tp. l. 41,5 Acc.-pbl. l. 19,0
Edition 100 psc. Order 239
Printed in publishing house
"Saratov-Media",
28, Volgskaya St., Saratov, 410031,
Russia

ISSN 1999-8341

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ФИЗИКА, РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

ХИМИЯ И ХИМИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ

ФИЛОСОФИЯ, СОЦИОЛОГИЯ И КУЛЬТУРОЛОГИЯ

ЭКОЛОГИЯ

ЭКОНОМИКА

CONTENTS

MATHEMATICS AND MECHANICS

PHYSICS, RADIOENGINEERING AND ELECTRONICS

CHEMISTRY AND CHEMICAL TECHNOLOGIES

ENGINEERING AND MACHINE-BUILDING

MEASURING ENGINEERING AND INSTRUMENTATION ENGINEERING

POWER ENGINEERING AND ELECTRICAL ENGINEERING

TRANSPORT

INFORMATION TECHNOLOGIES

AUTOMATION AND CONTROL

PHILOSOPHY, SOCIOLOGY AND CULTUROLOGY

ECOLOGY

ECONOMICS

УДК 519.83

Т.Ф. Савина

ВЛОЖЕНИЯ ИГР С ОТНОШЕНИЯМИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ В ИГРЫ С ФУНКЦИЯМИ ВЫИГРЫША

Введено понятие вложения игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша. Указаны необходимые и достаточные условия вложимости игры в фактор-игру. Найдены необходимые, а также достаточные условия существования вложения игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша.

Игра с отношениями предпочтения, гомоморфизм, конгруэнтность, вложение

T.F. Savina

INCLUSION MAPS OF GAMES WITH PREFERENCE RELATIONS INTO GAMES WITH PAYOFF FUNCTIONS

The concept of the inclusion map of game with preference relations into a game with payoff functions is introduced. Necessary and sufficient conditions of the embeddability of game in factor-game are indicated. A necessary condition and also sufficient conditions for the existence of the inclusion of game with preference relations into a game with payoff functions are found.

Game with preference relation, homomorphism, congruence relation, inclusion map

Введение

Игра с отношениями предпочтения представляет собой математическую модель конфликта, в которой интересы участвующих в ней сторон формализованы бинарными отношениями предпочтения. На практике обычно стремятся ввести оценку предпочтения в числовой форме так, чтобы более предпочтительный объект имел большую оценку, а одинаково предпочтительные – равные оценки. Соответствующая математическая конструкция называется вложением структуры предпочтения в числовую структуру предпочтений. Отметим, что игры с отношениями предпочтения являются алгебраическими системами, а для алгебраических систем условия их вложимости в определенные классы представляют традиционную алгебраическую проблему [1, 2].

В первой части настоящей работы доказан ряд структурных теорем, относящихся к вложениям игр с отношениями предпочтения. Во второй части найдены необходимые, а также достаточные условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша. Приведен пример построения такого вложения. В работе используются некоторые результаты о вложимости структур предпочтения [3].

В частности, используем следующую символику: ρ^* – строгая часть, ρ^s – симметрическая часть отношения предпочтения ρ [3].

I. Структурные теоремы о вложении игр с отношениями предпочтения

Игра игроков $\{1,\dots,n\}$ с отношениями предпочтения определяется как система объектов

$$G=\langle X_1,\dots,X_n,A,\rho_1,\dots,\rho_n,F\rangle, \tag{1}$$

где X_i – множество *стратегий* игрока i $(i=1,\dots,n)$,

A – множество *исходов*,

ρ_i – бинарное отношение, выражающее предпочтения игрока i, заданное на A;

F – функция реализации, т.е. отображение множества *ситуаций* игры $X=X_1\times\ldots\times X_n$ в множество исходов A.

Рассмотрим, наряду с игрой G, еще одну игру с отношениями предпочтения игроков $\{1,\dots,n\}$: $H=\langle U_1,\dots,U_n,B,\sigma_1,\dots,\sigma_n,\Phi\rangle$.

Для игр с отношениями предпочтения как для алгебраических систем естественным образом определено понятие гомоморфизма [4].

Определение 1. Набор отображений $f=(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi)$, где $\varphi_i:X_i\to U_i$ $(i=1,\dots,n)$ и $\psi:A\to B$, называется *гомоморфизмом* игры G в игру H, если выполняются следующие два условия:

для любого индекса $i=1,\dots,n$ и любых элементов $a_1,a_2\in A$

$$a_1\overset{\rho_i}{\le}a_2\Rightarrow\psi(a_1)\overset{\sigma_i}{\le}\psi(a_2), \tag{2}$$

$$\psi(F(x_1,\dots,x_n))=\Phi(\varphi_1(x_1),\dots,\varphi_n(x_n)). \tag{3}$$

Гомоморфизм f называется *строгим гомоморфизмом*, если условие (2) заменяется более сильной системой условий:

$$a_1\overset{\rho_i^*}{<}a_2\Rightarrow\psi(a_1)\overset{\sigma_i^*}{<}\psi(a_2),\ (i=1,\dots,n) \tag{4}$$

$$a_1\overset{\rho_i^s}{\sim}a_2\Rightarrow\psi(a_1)\overset{\sigma_i^s}{\sim}\psi(a_2)\ (i=1,\dots,n). \tag{5}$$

Определение 2. Под *вложением* игры G в класс игр K будем понимать строгий гомоморфизм f игры G в некоторую игру $H\in K$. Вложение называется *изоморфным*, если в условиях (4) и (5) вместо $\Rightarrow$ выполнена $\Leftrightarrow$.

Замечание. Для структуры предпочтений введено понятие представления [3]. *Представлением* структуры предпочтения $\langle A,\rho\rangle$ в числовую прямую называется строгий гомоморфизм $\psi:A\to R$, для которого выполняются условия:

$$a_1\overset{\rho^*}{<}a_2\Rightarrow\psi(a_1)<\psi(a_2), \tag{6}$$

$$a_1\overset{\rho^s}{\sim}a_2\Rightarrow\psi(a_1)=\psi(a_2). \tag{7}$$

Под *ядром* гомоморфизма $f=(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\psi)$ понимается набор отношений эквивалентности $\bar{\varepsilon}_f=(\varepsilon_{\varphi_1},\dots,\varepsilon_{\varphi_n},\varepsilon_\psi)$, состоящий из ядер указанных отображений. *Отношением конгруэнтности* в игре G называется набор эквивалентностей $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\varepsilon)$, где $\varepsilon_i\subseteq X_i^2$ $(i=1,\dots,n)$, $\varepsilon\subseteq A^2$, удовлетворяющее условию согласованности для функции реализации

$$\left.\begin{array}{l} x_1' \overset{\varepsilon_1}{\equiv} x_1 \\ x_2' \overset{\varepsilon_2}{\equiv} x_2 \\ \ldots \\ x_n' \overset{\varepsilon_n}{\equiv} x_n \end{array}\right\} \Rightarrow F(x_1', x_2', \ldots, x_n') \overset{\varepsilon}{\equiv} F(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{8}$$

Легко проверить:

Утверждение 1. Ядро всякого гомоморфизма является отношением конгруэнтности.

Пусть $\bar{\varepsilon}$ – отношение конгруэнтности в игре G, тогда корректно определена фактор-игра $G/\bar{\varepsilon} = \left\langle (X_i/\varepsilon_i)_{i=1,\ldots,n}, A/\varepsilon, (\rho_i/\varepsilon)_{i=1,\ldots,n}, F_\varepsilon \right\rangle$, где $F_\varepsilon\left([x_1]_{\varepsilon_1}, \ldots, [x_n]_{\varepsilon_n}\right) \overset{df}{=} [F(x_1, \ldots, x_n)]_\varepsilon$.

Сформулируем ряд теорем о строгих гомоморфизмах, необходимых для дальнейшего изложения.

Теорема 1. Пусть f – строгий гомоморфизм игры G в игру H. Тогда f может быть представлено в виде композиции строгого гомоморфизма игры G на фактор-игру $G/\bar{\varepsilon}_f$ и строгого инъективного гомоморфизма фактор-игры на игру H, т.е. $\varphi_1 = h_1 \circ \varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_n = h_n \circ \varphi_{\varepsilon_n}, \psi = h \circ \psi_\varepsilon$ (в краткой записи $f = \bar{h} \circ f_{\bar{\varepsilon}}$).

Доказательство теоремы 1.

Нужно доказать, что каноническое отображение $f_{\bar{\varepsilon}}$ игры G на фактор-игру $G/\bar{\varepsilon}_f$ будет строгим гомоморфизмом.

Возьмем пару элементов a_1, a_2, для которой имеет место $a_1 \overset{\rho}{<} a_2$, а следовательно, и $a_1 \overset{\rho}{\leq} a_2$, тогда $[a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_2]_\varepsilon$ по определению фактор-отношения. Предположим, что $[a_2]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} [a_1]_\varepsilon$. Тогда для некоторых $a_1', a_2' \in A$, таких, что $\psi_\varepsilon(a_1') = \psi_\varepsilon(a_1), \psi_\varepsilon(a_2') = \psi_\varepsilon(a_2)$, будет выполнено $a_2' \overset{\rho}{\leq} a_1'$. Так как f – строгий гомоморфизм, из $a_1 \overset{\rho}{<} a_2$ следует, что $\psi_\varepsilon(a_1) \overset{\rho/\varepsilon}{<} \psi_\varepsilon(a_2)$. Получаем следующую систему $\begin{cases} \psi_\varepsilon(a_1') \overset{\rho/\varepsilon}{<} \psi_\varepsilon(a_2'), \\ \psi_\varepsilon(a_2') \overset{\rho/\varepsilon}{\leq} \psi_\varepsilon(a_1') \end{cases}$.

Последняя система несовместна, следовательно, наше предположение не верно, значит, выполнено $[a_1]_\varepsilon \overset{\rho/\varepsilon}{<} [a_2]_\varepsilon$, т.е. гомоморфизм $f_{\bar{\varepsilon}}$ является строгим.

Аналогично доказывается, что $\bar{h}$ является строгим гомоморфизмом. Инъективность гомоморфизма $\bar{h}$ из фактор-игры на игру H доказана в работе [5].

Теорема 1 доказана.

Доказательство следующих двух теорем приведено в работе [5].

Теорема 2. Пусть $\bar{\varepsilon}$ – отношение конгруэнтности в игре G, тогда канонический гомоморфизм $f_{\bar{\varepsilon}}$ игры G на $G/\bar{\varepsilon}$ будет строгим тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \overset{\rho_i}{\leq} a_2 \\ a_1' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_1 \\ a_2' \overset{\varepsilon}{\equiv} a_2 \\ a_2' \overset{\rho_i}{\leq} a_1' \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \overset{\rho_i}{\sim} a_2. \tag{9}$$

Теорема 3. Для того чтобы конгруэнтность $\bar{\varepsilon}$ в игре G совпадала с ядром некоторого гомоморфизма, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (9).

Условие (9) эквивалентно тому, что $\bar{\varepsilon}$ совпадает с ядром некоторого строгого гомоморфизма.

II. Условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша

В этом разделе находятся как необходимые, так и достаточные условия вложимости игры с отношениями предпочтения в игру с функциями выигрыша.

Гомоморфизм игры $G = \langle X_1, \dots, X_n, A, \rho_1, \dots, \rho_n, F \rangle$ в игру с функциями выигрыша с теми же множествами стратегий игроков $\Gamma = \langle X_1, \dots, X_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$ может быть определен как набор отображений $\psi_1 : A \to R, \dots, \psi_n : A \to R$, такой что

$$a_1 \overset{\rho_i}{\leq} a_2 \Rightarrow \psi_i(a_1) \leq \psi_i(a_2);$$

при этом гомоморфизм будет *строгим* тогда и только тогда, когда для всех $i \in \{1, \dots, n\}$

$$a_1 \overset{\rho_i}{<} a_2 \Rightarrow \psi_i(a_1) < \psi_i(a_2).$$

Следующая теорема дает достаточное условие такой вложимости.

Теорема 4. Пусть G – конечная игра с отношениями предпочтения вида (1). Если для каждого игрока $i\ (i = 1, \dots, n)$ структура предпочтений $\langle A, \rho_i \rangle$ ациклична, то существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша.

Доказательство теоремы 4 основано на следующей лемме.

Лемма 1. Ациклическая структура предпочтений на конечном множестве имеет представление в числовую прямую.

Доказательство леммы 1. Пусть $\langle A, \rho \rangle$ – структура предпочтений, где множество A конечно и ρ ациклично. Тогда его симметричная часть совпадает с тождественным отношением: $\rho^s = \Delta_A$ (в противном случае, если $(a,b) \in \rho$ и $(b,a) \in \rho$ и $b \neq a$, то получаем цикл $a \overset{\rho}{\to} b \overset{\rho}{\to} a$, что противоречит условию ацикличности отношения ρ). Асимметричная часть отношения ρ определяется здесь равенством: $\rho^* = \rho \setminus \Delta_A$, причем ρ^* будет строго ацикличным. Таким образом, в графе $\langle A, \rho^* \rangle$ отсутствуют циклы и петли, а так как множество A конечно, то все пути в графе $\langle A, \rho \rangle$ имеют конечную длину и их длины ограничены в совокупности. Для произвольного элемента $a \in A$ полагаем:

$h(a)$ – максимальная длина пути в графе $\langle A, \rho \rangle$, ведущего в вершину a.

Натуральное число $h(a)$ называется *высотой* элемента a, причем

$$0 \leq h(a) \leq n - 1, \tag{10}$$

где $n = |A|$.

Проверим, что функция h реализует строгий гомоморфизм структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую структуру.

Пусть $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$. Положим $h(a_1) = k_1$. Тогда существует путь длины k_1 в графе $\langle A, \rho^* \rangle$, ведущий в вершину a_1. Добавляя к нему дугу $a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2$, получим путь длины $k_1 + 1$, ведущий в вершину a_2, значит $h(a_2) \geq k_1 + 1 > k_1 = h(a_1)$, т.е. $h(a_1) < h(a_2)$. Показали справедливость импликации:

$$a_1 \overset{\rho^*}{<} a_2 \Rightarrow h(a_1) < h(a_2). \tag{11}$$

Учитывая, что в нашем случае структура предпочтения антисимметрична $\left(\rho^s = \Delta_A\right)$, имеем очевидное следование

$$a_1 \overset{\rho^s}{\sim} a_2 \Rightarrow h(a_1) = h(a_2). \tag{12}$$

Формулы (11) и (12) показывают, что *для ацикличной структуры предпочтения на конечном множестве функция высоты* h *задает ее представление в числовую прямую*.

Лемма 1 доказана.

Искомое вложение игры G строится так. Игра Γ с функциями выигрыша задается следующим образом: $\Gamma = \left\langle X_1,\ldots,X_n, h_1 \circ F,\ldots,h_n \circ F\right\rangle$, где h_i – функция высоты в $\left\langle A,\rho_i\right\rangle$ $(i = 1,\ldots,n)$. Набор отображений $\psi_i = h_i$ $\left(i = 1,\ldots,n\right)$ будет искомым вложением игры G с отношениями предпочтения в игру Γ с функциями выигрыша. Теорема 4 доказана.

Необходимое и достаточное условие такой вложимости дает следующая теорема.

Теорема 5. Для того чтобы конечная игра G была вложима в класс игр с функциями выигрыша, необходимо и достаточно, чтобы для каждого i отношение ρ_i было ацкиличным относительно ρ_i^s.

Доказательство теоремы 5 основано на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 2. Для того чтобы структура предпочтений $\left\langle A,\rho\right\rangle$, заданная на конечном множестве A, имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы отношение ρ было ацикличным относительно своей симметричной части ρ^s.

Доказательство леммы 2.

Необходимость условия леммы 2 может быть установлена даже без предположения конечности множества A. Действительно, пусть при некотором натуральном n выполнено $a_1 \overset{\rho}{\le} a_2 \overset{\rho}{\le} \ldots \overset{\rho}{\le} a_n \overset{\rho}{\le} a_1$. Тогда для каждого $k = 1,\ldots,n-1$ имеет место $a_k \overset{\rho^*}{<} a_{k+1}$ или $a_k \overset{\rho^s}{\sim} a_{k+1}$. Предположим, что для некоторого $l = 1,\ldots,n-1$ не выполнено $a_l \overset{\rho^s}{\sim} a_{l+1}$. Тогда $a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1}$ значит, $a_1 \overset{\rho}{\le} a_2 \overset{\rho}{\le} \ldots \overset{\rho}{\le} a_l \overset{\rho^*}{<} a_{l+1} \overset{\rho}{\le} \ldots \overset{\rho}{\le} a_n \overset{\rho}{\le} a_1$.

Согласно (6), (7), получаем из последней цепочки соотношений:

$$\psi(a_1) \le \psi(a_2) \le \ldots \le \psi(a_l) < \psi(a_{l+1}) \le \ldots \le \psi(a_n) \le \psi(a_1).$$

Откуда $\psi(a_1) < \psi(a_1)$, что невозможно. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

Утверждение 2. Пусть отношение ρ ациклично относительно своей симметричной части ρ^s. Тогда каноническое отображение из A в A/ε_ρ будет строгим гомоморфизмом структуры предпочтений $\left\langle A,\rho\right\rangle$ на фактор-структуру $\left\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho\right\rangle$.

Пояснение. Здесь ε_ρ есть отношение эквивалентности, классами которой являются циклы графа $\left\langle A,\rho\right\rangle$.

Известно [3], что фактор-отношение ρ/ε_ρ, полученное «стягиванием циклов», ациклично.

Доказательство утверждения 2.

Так как фактор-отношение ρ/ε_ρ ациклично, оно будет антисимметричным. Полагая для краткости $\rho_0 = \rho/\varepsilon_\rho$, получаем $\rho_0^s = \Delta, \rho_0^* = \rho_0 \setminus \Delta$. Пусть $a \overset{\rho^*}{<} a'$. Тогда выполняется

$[a]_{\varepsilon_\rho} \overset{\rho_0}{\le} [a']_{\varepsilon_\rho}$. Предположим, что $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$. Тогда $a \overset{\varepsilon_\rho}{\equiv} a'$, и в графе $\langle A, \rho \rangle$ существует путь из вершины a' в вершину $a : a' \overset{\rho}{\le} x_1 \overset{\rho}{\le} \ldots \overset{\rho}{\le} x_k \overset{\rho}{\le} a$. Добавляя к нему дугу $a \overset{\rho}{\le} a'$, получаем в итоге цикл, и по свойству ацикличности ρ относительно ρ^s должно быть $a \overset{\rho^s}{\sim} a'$, что противоречит предположению $a \overset{\rho^*}{<} a'$. Итак, в соотношении $[a]_{\varepsilon_\rho} \overset{\rho_0}{\le} [a']_{\varepsilon_\rho}$ равенство $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$ исключено; учитывая, что $\rho_0 \setminus \Delta = \rho_0^*$, получаем $[a]_{\varepsilon_\rho} \overset{\rho_0^*}{<} [a']_{\varepsilon_\rho}$ и в итоге показана справедливость импликации

$$a \overset{\rho^*}{<} a' \Rightarrow [a]_{\varepsilon_\rho} \overset{\rho_0^*}{<} [a']_{\varepsilon_\rho}. \tag{13}$$

Далее, так как условие $a \overset{\rho^s}{\sim} a'$ влечет $a \overset{\varepsilon_\rho}{\equiv} a'$ и $[a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}$, то справедлива импликация

$$a \overset{\rho^s}{\sim} a' \Rightarrow [a]_{\varepsilon_\rho} = [a']_{\varepsilon_\rho}. \tag{14}$$

Утверждение 2 состоит в выполнимости формул (13), (14).

Перейдем к доказательству достаточности в лемме 2. Согласно утверждению 2, каноническое отображение из A в A/ε_ρ является строгим гомоморфизмом структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ на фактор-структуру $\langle A/\varepsilon_\rho, \rho/\varepsilon_\rho \rangle$. Поскольку последняя ациклична, функция высоты h будет ее строгим гомоморфизмом в числовую структуру предпочтений. Тогда их композиция задает строгий гомоморфизм из $\langle A, \rho \rangle$ в числовую структуру предпочтений, т.е. является представлением структуры предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ в числовую прямую.

Завершение доказательства теоремы 5 проводится аналогично завершению доказательства теоремы 4. Теорема 5 доказана.

Рассмотрим теперь бесконечные игры, т.е. такие, в которых хотя бы один из игроков (или все) имеет бесконечное множество стратегий.

Теорема 6. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1). Если существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша, то для каждого игрока i отношение ρ_i должно быть ацикличным относительно своей симметричной части ρ_i^s.

Необходимость этого условия доказана в теореме 5.

Достаточное условие существования вложимости для игры со счетным множеством исходов дает следующая теорема.

Теорема 7. Пусть G – игра с отношениями предпочтения вида (1) и мощность множества A не более чем счетна. Если для каждого i отношение ρ_i ациклично относительно своей симметричной части ρ_i^s, то существует вложение игры G в некоторую игру с функциями выигрыша.

Доказательство теоремы 7.

Если для каждого i отношение ρ_i ациклично относительно своей симметричной части ρ_i^s, то верно включение $\rho_i \subseteq \hat{\rho}_i$, где $\hat{\rho}_i$ – отношение достижимости, которое здесь будет отношением порядка. Так как по теореме Шпильрайна [1] всякий порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве, то $\hat{\rho}_i \subseteq \overline{\rho}_i$, где $\overline{\rho}_i$ – линейный порядок. По теореме 22 [5] существует строго изотонное отображение из $\langle A, \overline{\rho}_i \rangle$ во множество действительных чисел, снабженное естественным порядком. Таким образом, обозначая через $(\psi_i)_{i=1,\ldots,n}$ соответствующий набор строго изотонных отображений, получаем, что он будет определять вложение игры G в построенную игру с функциями выигрыша $\Gamma = \langle X_1,\ldots,X_n,\psi_1 \circ F,\ldots,\psi_n \circ F\rangle$.

Теорема 7 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда A – произвольное бесконечное множество любой мощности. В этом случае главную роль играют следующие понятия.

Определение 3. Подмножество $S \subseteq A$ называется *мажорантно стабильным*, если оно удовлетворяет условию

$$a \in S, a' \overset{\rho}{\geq} a \Rightarrow a' \in S \,. \tag{15}$$

Будем говорить, что семейство F мажорантно стабильных подмножеств является *разделяющим*, если для любых $a' \overset{\rho^*}{>} a$ найдется $S \in F$, для которого $a \notin S$ и $a' \in S$.

Теорема 8. Для того чтобы бесконечная игра G вида (1) была вложима в некоторую игру с функциями выигрыша, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $i = 1,\ldots,n$ во множестве исходов A игры G существовало не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств относительно отношения ρ_i.

Доказательство теоремы 8 основано на следующей лемме.

Лемма 3. Для того чтобы структура предпочтений $\langle A, \rho\rangle$, заданная на множестве A, имела представление в числовую прямую, необходимо и достаточно, чтобы в $\langle A, \rho\rangle$ существовало не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств.

Доказательство леммы 3.

<u>Необходимость</u>. Пусть ψ – представление структуры предпочтений в числовую прямую. Рассмотрим нумерацию $(r_n)_{n=1,2,\ldots}$ множества рациональных чисел. Для любого натурального $n \in N$ положим $S_n = \{a \in A : \psi(a) \geq r_n\}$. Каждое подмножество S_n мажорантно стабильно, и семейство $(S_n)_{n \in N}$ не более чем счетно. Пусть $a' \overset{\rho^*}{>} a$. Тогда согласно (6): $\psi(a') > \psi(a)$. Возьмем рациональное число r_k, для которого $\psi(a) < r_k < \psi(a')$. Тогда подмножество S_k разделяет элементы a и a', т.к. $a \notin S_k$, $a' \in S_k$.

<u>Достаточность</u>. Пусть $F = (S_n)_{n \in N}$ – не более чем счетное разделяющее семейство мажорантно стабильных подмножеств. Обозначим через χ_n характеристическую функцию подмножества S_n. Положим

$$\psi(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_n(a)}{2^n}. \tag{16}$$

Заметим, что числовой ряд, стоящий в правой части (16), является сходящимся при любом наборе подмножеств $(S_n)_{n \in N}$. Покажем, что функция ψ является искомым представлением. Пусть $a' \overset{\rho^*}{>} a$. Тогда согласно (15), всякое мажорантно стабильное подмножество, содержащее a, содержит также a', откуда $\chi_n(a') \geq \chi_n(a)\,(n = 1,2,\ldots)$. Так как семейство F разделяющее, то найдется $k \in N$, для которого $a \notin S_k$ и $a' \in S_k$, т.е. $\chi_k(a) = 0$ и $\chi_k(a') = 1$, отсюда $\psi(a') - \psi(a) > \frac{1}{2^k}$, значит, $\psi(a') > \psi(a)$ и (6) доказано.

Для проверки (7) заметим, что если $a' \overset{\rho^s}{\sim} a$, то при любом $n \in N$ выполняется равносильность:

$$a' \in S_n \Leftrightarrow a \in S_n,$$

отсюда $\chi_n(a') = \chi_n(a)$, значит $\psi(a') = \psi(a)$. Лемма 3 доказана.

Для доказательства теоремы 8 достаточно в качестве строгого гомоморфизма взять функции ψ_i в виде (16) и положить функции выигрыша в игре Γ равными $\lambda_i = \psi_i \circ F$.

Пример.

Рассмотрим игру двух игроков $G = \langle X, Y, A, \rho_1, \rho_2, F \rangle$, в которой множество стратегий первого игрока $X = \{1,2,3\}$, второго игрока $Y = \{1,2,3\}$, множество исходов $A = \{p, q, r, s, u, v, w\}$, функция реализации задана табл. 1.

Таблица 1

Функция реализации игры

F	1	2	3
1	v	r	w
2	p	u	r
3	r	s	q

На рис. 1, 2 представлены отношения предпочтения игроков 1 и 2, заданные графами.

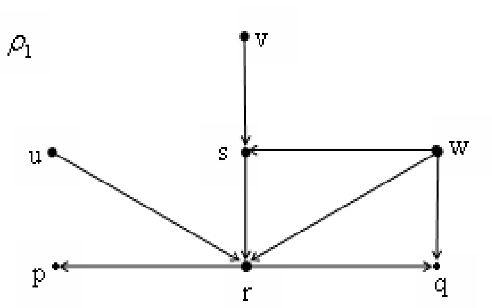

Рис. 1. Граф отношения предпочтения игрока 1

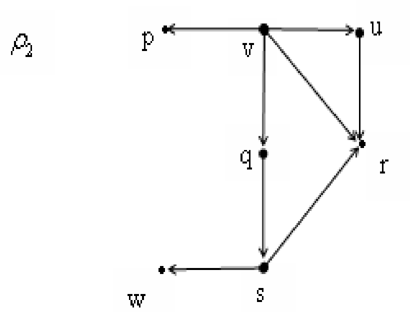

Рис. 2. Граф отношения предпочтения игрока 2

Так как в графах нет ни циклов (контуров), ни петель, то для каждого игрока отношение предпочтения является ацикличным относительно своей симметричной части, и по теореме 4 существует вложение этой игры в некоторую игру с функциями выигрыша. Для нахождения функций выигрыша требуется указать высоту каждого элемента в своем графе.

На рис. 3, 4 представлены диаграммы отношений предпочтения, которые представляют собой графы, вершины которых расположены по уровням в соответствии с их высотой.

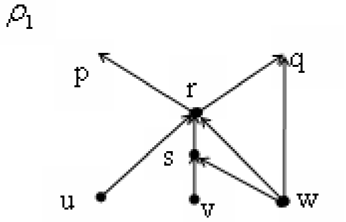

Рис. 3. Диаграмма отношения предпочтения игрока 1

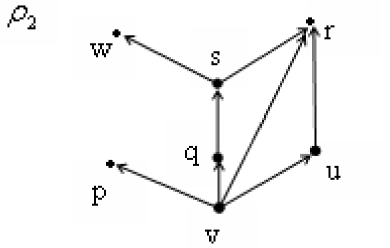

Рис. 4. Диаграмма отношения предпочтения игрока 2

Набор отображений $h_1, h_2 : A \to R$ представлен в табл. 2, 3.

Таблица 2

Отображение h_1 для игрока 1

Для игрока 1, функция высоты h_1							
исход	p	q	r	s	u	v	w
высота	3	3	2	1	0	0	0

Таблица 3

Отображение h_2 для игрока 2

Для игрока 2, функция высоты h_2							
исход	p	q	r	s	u	v	w
высота	1	1	3	2	1	0	3

Тогда на базе игры G построим игру $G_{(h_1,h_2)} = \langle X, Y, F \bullet h_1, F \bullet h_2 \rangle$, в которой выигрыш игрока в ситуации (x, y) равен высоте соответствующего исхода в графе.

Получаем биматричную игру с функциями выигрыша, заданную матрицей, представленной в табл. 4.

Таблица 4

Матрица функций выигрыша

$G_{(h_1,h_2)}$	1	2	3
1	(0,0)	(2,3)	(0,3)
2	(3,1)	(0,1)	(2,3)
3	(2,3)	(1,2)	(3,1)

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968. 431 с.
2. Розен В.В. Вложения упорядоченных множеств в упорядоченные линейные пространства // Известия высших учебных заведений. Математика. 1998. №7(434) С. 32–38.
3. Розен В.В. Структура отношений предпочтения: Учеб. пособие. Саратов: Изд-во СГУ, 2007. 57 с.
4. Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Наука. Физматлит, 1997. 368 с.
5. Savina T.F. Homomorphisms and Congruence Relations for Games with Preference Relations // Contributions to game theory and management. Vol. Ш. Collected papers on the Third International Conference Game Theory and Management. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2010, P. 387– 398.
6. Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

Савина Татьяна Федоровна –
ассистент кафедры «Менеджмент, Маркетинг, Логистика», Институт развития бизнеса и стратегий Саратовского государственного технического университета;
аспирант кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского

Savina Tatiana Fedorovna –
Assistant of the Department “Management, Marketing, Logistics”, Business and strategy development institute of Saratov State Technical University;
Post-graduate Student.of the Department “Geometry”, Saratov State University on name N.G. Chernyshevsky

Статья поступила в редакцию 02.03.2011, принята к опубликованию 18.07.2011