Математические заметки

Том 84 выпуск 3 сентябрь 2008

УДК 517.27+517.544.4

Принцип выбора для поточечно ограниченных последовательностей функций

Ю. В. Третьяченко, В. В. Чистяков

Для числа $\varepsilon > 0$ и вещественной функции f на отрезке $[a,b]$ обозначим через $N(\varepsilon, f, [a,b])$ супремум множества тех номеров n, для которых в $[a,b]$ существует набор неналегающих отрезков $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$ $(\sup \varnothing = 0)$. Доказана следующая теорема: *если $\{f_j\}$ – поточечно ограниченная последовательность вещественных функций на отрезке $[a,b]$ такая, что $n(\varepsilon) \equiv \limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [a,b]) < \infty$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a,b]$ сходится к некоторой функции f такой, что $N(\varepsilon, f, [a,b]) \leqslant n(\varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$.* Показано, что основное условие в этой теореме, связанное с верхним пределом, необходимо для равномерно сходящейся последовательности $\{f_j\}$ и "почти" необходимо для всюду сходящейся последовательности измеримых функций и что многие поточечные принципы выбора, обобщающие классическую теорему Хелли, вытекают из этой теоремы, а также приводятся примеры, иллюстрирующие ее точность.

Библиография: 16 названий.

1. Основные результаты. Цель настоящей заметки – представить новое достаточное условие на поточечно ограниченную последовательность вещественных функций $\{f_j\} \equiv \{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ на отрезке $[a,b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$, при котором эта последовательность имеет сходящуюся всюду на $[a,b]$ подпоследовательность. Наш основной результат, теорема 1, содержит в качестве частных случаев и классические принципы выбора Хелли для монотонных функций и функций ограниченной вариации по Жордану ([1; гл. VIII, § 4]) и, как будет показано в п. 4, большинство их обобщений ([2; часть III, § 2], [3]–[9] и ссылки в этих работах). Отметим, что теорема 1 остается справедливой для поточечно относительно компактной последовательности функций $\{f_j\}$, действующих из непустого подмножества $\mathbb{R}$ в метрическое пространство. Однако для того, чтобы представить идеи в наиболее простой форме и иметь возможность сравнения с другими принципами выбора, в этой работе рассматриваются только вещественные функции на отрезке $[a,b]$.

Для числа $\varepsilon > 0$ и функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ определим величину

$$N(\varepsilon, f, [a,b]) \in \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

как супремум множества тех номеров $n \in \mathbb{N}$, для которых в $[a,b]$ существует набор неналегающих отрезков $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$, таких, что $|f(a_i)-f(b_i)|>\varepsilon$ для всех $i=1,\dots,n$ (с соглашением о том, что $\sup\varnothing=0$). Одним из известных свойств этой величины является следующее (теорема 2.1 в [2; часть III]): функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ имеет односторонние конечные левый и правый пределы во всех точках отрезка $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $N(\varepsilon,f,[a,b])<\infty$ для всех $\varepsilon>0$; в этом случае функция f ограничена.

Основной результат работы – другое применение определенной выше величины $N(\varepsilon,f,[a,b])$ – это следующий *поточечный принцип выбора.*

Теорема 1. *Пусть $\{f_j\}$ – поточечно ограниченная последовательность вещественных функций на отрезке $[a,b]$ такая, что*

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b])<\infty \qquad \text{для любого}\quad \varepsilon>0. \tag{1}$$

Тогда $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a,b]$ сходится к некоторой функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ такой, что $N(\varepsilon,f,[a,b])$ не превосходит верхнего предела в (1) при любом $\varepsilon>0$.

Интересно отметить, что как и ранее найденное в [7; теорема 2] и [10; лемма 4] условие (9), приводимое в п. 4.4, предположение (1) теоремы 1, является необходимым для равномерно сходящейся последовательности $\{f_j\}$ и “почти” необходимым для (почти) всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ измеримых функций – это установлено в следующей ниже теореме 2. Однако предположения в большинстве известных принципов выбора (ср. с пп. 4.1–4.3 и 4.5) не являются необходимыми.

Заметим, что понятие величины $N(\varepsilon,f,E)$ для функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ можно определить на любом множестве $\varnothing\ne E\subset[a,b]$, если дополнительно считать, что концы a_i и b_i неналегающих отрезков $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$, упомянутых ранее, лежат в E.

Теорема 2. (a) *Если последовательность $\{f_j\}$ вещественных функций сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ такой, что $N(\varepsilon,f,[a,b])<\infty$ для всех $\varepsilon>0$, то выполнено условие (1), а точнее,*

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant \lim_{\delta\to\varepsilon-0} N(\delta,f,[a,b]) \qquad \text{для всех}\quad \varepsilon>0.$$

(b) *Если последовательность вещественных измеримых функций $\{f_j\}$ сходится на $[a,b]$ всюду (или почти всюду) к некоторой функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей для всех $\varepsilon>0$ условию $N(\varepsilon,f,[a,b])<\infty$, то для каждого $\eta>0$ в $[a,b]$ найдется измеримое по Лебегу множество E_η, мера которого не превосходит η, такое, что*

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b]\setminus E_\eta)<\infty \qquad \text{для всех}\quad \varepsilon>0.$$

Эти теоремы будут доказаны в следующем пункте. В п. 3 точность условий теорем 1 и 2 иллюстрируется примерами. В последнем п. 4 приводится сравнение теоремы 1 с наиболее известными к настоящему времени поточечными принципами выбора, обобщающими теорему Хелли.

2. Доказательство основных теорем.

Доказательство теоремы 1. 1. Покажем, что существует подпоследовательность в $\{f_j\}$, снова обозначаемая через $\{f_j\}$, и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует неубывающая ограниченная функция $n_k\colon [a,b] \to \mathbb{N}$ такие, что

$$\lim_{j\to\infty} N(1/k, f_j, [a,t]) = n_k(t) \qquad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N} \text{ и } t \in [a,b]. \tag{2}$$

Прежде всего заметим, что в силу условия (1) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера $M(\varepsilon), j_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $N(\varepsilon, f_j, [a,b]) \leqslant M(\varepsilon)$ для всех $j \geqslant j_0(\varepsilon)$. Последовательность

$$\{t \mapsto N(1, f_j, [a,t])\}_{j\geqslant j_0(1)},$$

состоящая из неубывающих функций, равномерно ограничена на $[a,b]$ постоянной $M(1)$. По принципу выбора Хелли для монотонных функций в последовательности $\{f_j\}_{j\geqslant j_0(1)}$, и, тем самым, в исходной последовательности $\{f_j\}$, найдется подпоследовательность $\{f_{J_1(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ (здесь последовательность $J_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, также, как и встречающиеся ниже подобные ей последовательности J_k при $k \geqslant 2$, является строго возрастающей) такая, что $N(1, f_{J_1(j)}, [a,t])$ сходится при $j \to \infty$ к $n_1(t)$ для всех $t \in [a,b]$, где $n_1\colon [a,b] \to \mathbb{N}$ – некоторая неубывающая ограниченная функция. Выберем наименьший номер $j_1 \in \mathbb{N}$ такой, что $J_1(j_1) \geqslant j_0(1/2)$. Тогда последовательность неубывающих функций

$$\{t \mapsto N(1/2, f_{J_1(j)}, [a,t])\}_{j\geqslant j_1}$$

равномерно ограничена на $[a,b]$ постоянной $M(1/2)$. Снова применяя принцип выбора Хелли, в $\{f_{J_1(j)}\}_{j\geqslant j_1}$ найдем подпоследовательность $\{f_{J_2(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $N(1/2, f_{J_2(j)}, [a,t])$ сходится при $j \to \infty$ к $n_2(t)$ для всех $t \in [a,b]$, где $n_2\colon [a,b] \to \mathbb{N}$ – также неубывающая ограниченная функция. Выберем минимальный номер $j_2 \in \mathbb{N}$ такой, что $J_2(j_2) \geqslant j_0(1/3)$. Теперь по индукции предположим, что для номера $k \geqslant 3$ подпоследовательность $\{f_{J_{k-1}(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ в исходной последовательности $\{f_j\}$ и наименьший номер $j_{k-1} \in \mathbb{N}$ такой, что $J_{k-1}(j_{k-1}) \geqslant j_0(1/k)$, уже выбраны. Применим теорему Хелли к последовательности неубывающих функций

$$\{t \mapsto N(1/k, f_{J_{k-1}(j)}, [a,t])\}_{j\geqslant j_{k-1}},$$

которая равномерно ограничена на $[a,b]$ постоянной $M(1/k)$: существуют подпоследовательность $\{f_{J_k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{f_{J_{k-1}(j)}\}_{j\geqslant j_{k-1}}$ и неубывающая ограниченная функция $n_k\colon [a,b] \to \mathbb{N}$ такие, что $N(1/k, f_{J_k(j)}, [a,t])$ сходится при $j \to \infty$ к $n_k(t)$ для всех $t \in [a,b]$. Замечая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\{f_{J_j(j)}\}_{j\geqslant k}$ является подпоследовательностью в $\{f_{J_k(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, в силу приведенных рассуждений найдем, что диагональная последовательность $\{f_{J_j(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, снова обозначаемая через $\{f_j\}$, удовлетворяет условию (2).

2. При любом $k \in \mathbb{N}$ множество $S_k \subset [a,b]$ точек разрыва монотонной функции n_k не более чем счетно. Положим $S = ([a,b] \cap \mathbb{Q}) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$, где $\mathbb{Q}$ – множество всех рациональных чисел. Тогда S – счетное всюду плотное подмножество $[a,b]$ такое, что

$$\text{функция } n_k \text{ непрерывна на } [a,b] \setminus S \text{ при любом } k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Поскольку последовательность $\{f_j\}$ поточечно ограничена и S счетно, без ограничения общности предполагаем (при необходимости переходя к подпоследовательности в $\{f_j\}$ при помощи стандартного диагонального процесса), что при каждом $s \in S$ последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится в $\mathbb{R}$ при $j \to \infty$ к некоторой точке, обозначаемой через $f(s)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{f_j(t)\}$ фундаментальна в любой точке $t \in [a,b] \setminus S$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем и зафиксируем номер $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $1/k \leqslant \varepsilon/3$. Так как в силу (3) t есть точка непрерывности функции n_k и S всюду плотно в $[a,b]$, найдется точка $s = s(k,t) \in S$, таким образом зависящая лишь от ε, такая, что $n_k(t) = n_k(s)$. Пусть для определенности $s < t$ (случай, когда $t < s$, аналогичен). Используя (2), выберем номера $J_1 = J_1(k,t), J_2 = J_2(k,s) \in \mathbb{N}$, также зависящие лишь от ε, такие, что $N(1/k, f_j, [a,t]) = n_k(t)$ для всех $j \geqslant J_1$ и $N(1/k, f_j, [a,s]) = n_k(s)$ для всех $j \geqslant J_2$. Тогда при $j \geqslant \max\{J_1, J_2\}$ получим, что

$$N\left(\frac{1}{k}, f_j, [s,t]\right) \leqslant N\left(\frac{1}{k}, f_j, [a,t]\right) - N\left(\frac{1}{k}, f_j, [a,s]\right) = n_k(t) - n_k(s) = 0,$$

откуда $N(1/k, f_j, [s,t]) = 0$, что благодаря определению величины слева в последнем равенстве означает, в частности, что $|f_j(s) - f_j(t)| \leqslant 1/k \leqslant \varepsilon/3$. Поскольку последовательность $\{f_j(s)\}$ сходится, она фундаментальна, поэтому существует номер $J_3 = J_3(\varepsilon, s) \in \mathbb{N}$ такой, что $|f_j(s) - f_l(s)| \leqslant \varepsilon/3$ для всех $j, l \geqslant J_3$. Следовательно, номер $J = \max\{J_1, J_2, J_3\}$ зависит только от ε, и для всех $j, l \geqslant J$ находим, что

$$|f_j(t) - f_l(t)| \leqslant |f_j(t) - f_j(s)| + |f_j(s) - f_l(s)| + |f_l(s) - f_l(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Из фундаментальности последовательности $\{f_j(t)\}$ вытекает ее сходимость. Обозначим предел этой последовательности через $f(t)$. Тем самым определена функция $f\colon [a,b] = S \cup ([a,b] \setminus S) \to \mathbb{R}$, к которой всюду на $[a,b]$ сходится последовательность $\{f_j\}$, являющаяся подпоследовательностью исходной последовательности $\{f_j\}$. Осталось заметить, что

$$N(\varepsilon, f, [a,b]) \leqslant \liminf_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [a,b]) \leqslant \limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [a,b]) \tag{4}$$

для всех $\varepsilon > 0$, и установить здесь неравенство слева.

Для этого без ограничения общности считаем, что $N(\varepsilon, f, [a,b]) > 0$. Достаточно показать, что если номер $n \in \mathbb{N}$ такой, что в $[a,b]$ найдутся неналегающие отрезки $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, для которых $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$, то

$$n \leqslant \liminf_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [a,b]).$$

Для любого числа $\varepsilon' = \varepsilon'(n)$ со свойством $\min_{1\leqslant i\leqslant n} |f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon' > \varepsilon$ в силу сходимости всюду на $[a,b]$ f_j к f существует номер $J = J(n) \in \mathbb{N}$ такой, что значения $|f(a_i) - f_j(a_i)|$ и $|f_j(b_i) - f(b_i)|$ не превосходят $(\varepsilon' - \varepsilon)/2$ для всех $i = 1, \dots, n$ и $j \geqslant J$. Отсюда для этих же i и j найдем, что

$$\begin{aligned}\varepsilon' &< |f(a_i) - f(b_i)| \leqslant |f(a_i) - f_j(a_i)| + |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + |f_j(b_i) - f(b_i)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} + |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{2} = |f_j(a_i) - f_j(b_i)| + \varepsilon' - \varepsilon,\end{aligned}$$

а потому, $|f_j(a_i)-f_j(b_i)|>\varepsilon$, $i=1,\dots,n$. По определению $N(\varepsilon,f_j,[a,b])$ тогда имеем $n\leqslant N(\varepsilon,f_j,[a,b])$ для всех $j\geqslant J$ и, следовательно,

$$n\leqslant \inf_{j\geqslant J} N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant \liminf_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b]),$$

что завершает доказательство неравенства и вместе с ним теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. (a) По условию функция f ограничена (см. п. 1), а из равномерной сходимости $\{f_j\}$ к f вытекает, что

$$\sup_{s,t\in[a,b]}|(f_j-f)(s)-(f_j-f)(t)|\leqslant 2\sup_{t\in[a,b]}|f_j(t)-f(t)|\to 0 \qquad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Кроме того, для любых $\varepsilon>0$ и $j\in\mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant N(\varepsilon-\delta,f_j-f,[a,b])+N(\delta,f,[a,b]) \qquad \text{для всех} \quad 0<\delta<\varepsilon. \tag{5}$$

Действительно, без потери общности считая, что левая часть неравенства в (5) больше нуля, предположим, что номер $n\in\mathbb{N}$ такой, что существует набор $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$, неналегающих отрезков в $[a,b]$, для которого $|f_j(a_i)-f_j(b_i)|>\varepsilon$ для всех $i=1,\dots,n$. Поскольку для таких i имеем

$$\varepsilon<|f_j(a_i)-f_j(b_i)|\leqslant|(f_j-f)(a_i)-(f_j-f)(b_i)|+|f(a_i)-f(b_i)|,$$

то $|(f_j-f)(a_i)-(f_j-f)(b_i)|>\varepsilon-\delta$ или $|f(a_i)-f(b_i)|>\delta$; в первом случае отнесем индекс i к множеству $I_1\subset\{1,\dots,n\}$, а во втором случае – к множеству $I_2\subset\{1,\dots,n\}$, и обозначим через $|I_1|$ и $|I_2|$ количество (возможно нулевое) элементов соответственно в I_1 и I_2. Ясно, что $|I_1|+|I_2|\geqslant n$. С другой стороны, из определения величины $N(\cdots)$ в п. 1 следует, что

$$|I_1|\leqslant N(\varepsilon-\delta,f_j-f,[a,b]) \qquad \text{и} \qquad |I_2|\leqslant N(\delta,f,[a,b]).$$

Таким образом, $n\leqslant N(\varepsilon-\delta,f_j-f,[a,b])+N(\delta,f,[a,b])$, откуда получаем (5) в силу произвольности упомянутых номеров n.

Пусть теперь $\varepsilon>0$ и $0<\delta<\varepsilon$ произвольны. Найдется такой номер $J\in\mathbb{N}$, зависящий от ε и δ, что $|(f_j-f)(s)-(f_j-f)(t)|\leqslant\varepsilon-\delta$ для всех $s,t\in[a,b]$ и $j\geqslant J$. Отсюда по определению $N(\,\cdot\,)$ первое слагаемое справа в неравенстве (5) обращается в нуль и, значит, $N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant N(\delta,f,[a,b])$ для всех $j\geqslant J$. Следовательно,

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant\sup_{j\geqslant J} N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant N(\delta,f,[a,b]).$$

Осталось принять во внимание невозрастание функции $\delta\mapsto N(\delta,f,[a,b])$ и перейти к пределу в последнем неравенстве при $\delta\to\varepsilon-0$.

(b) По теореме Егорова [1; гл. IV, § 3] из сходимости (почти) всюду $\{f_j\}$ к f вытекает, что для любого $\eta>0$ в $[a,b]$ существует такое измеримое множество E_η меры $\leqslant\eta$, что $\{f_j\}$ сходится к f на $[a,b]\backslash E_\eta$ равномерно. Заменяя в рассуждениях (a) отрезок $[a,b]$ на $[a,b]\setminus E_\eta$, придем к оценке

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[a,b]\setminus E_\eta)\leqslant\lim_{\delta\to\varepsilon-0} N(\delta,f,[a,b]\setminus E_\eta)\leqslant\lim_{\delta\to\varepsilon-0} N(\delta,f,[a,b])<\infty$$

для любого $\varepsilon>0$, что и требовалось установить.

3. Примеры. В этом разделе собраны некоторые примеры последовательностей функций $\{f_j\}$ на отрезке $[0,1]$ (кроме пп. 3.2 и 3.4, где $[a,b]=[0,2\pi]$), показывающие точность предположений и заключений теорем 1 и 2.

Поскольку колебание $\operatorname{osc}(f,[a,b])=\sup_{s,t\in[a,b]}|f(s)-f(t)|$ ограниченной функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ конечно, имеем: если $\operatorname{osc}(f,[a,b])=0$, то f постоянна, откуда $N(\varepsilon,f,[a,b])=0$ для всех $\varepsilon>0$, а если $\varepsilon\geqslant\operatorname{osc}(f,[a,b])>0$, то $N(\varepsilon,f,[a,b])=0$ по определению. Поэтому ниже оценки для $N(\varepsilon,f,[a,b])$ будут выписываться только для случая, когда $0<\varepsilon<\operatorname{osc}(f,[a,b])$. Например, если $V_a^b(f)$ обозначает обычную вариацию по Жордану функции f на отрезке $[a,b]$ (см. также п. 4.1 при $\varphi(t,u)=u$), то

$$\operatorname{osc}(f,[a,b])\leqslant V_a^b(f)\quad\text{и}\quad N(\varepsilon,f,[a,b])\leqslant\frac{1}{\varepsilon}V_a^b(f)\qquad\text{при}\quad 0<\varepsilon<\operatorname{osc}(f,[a,b]).\tag{6}$$

3.1. Условие поточечной ограниченности $\{f_j\}$ в теореме 1 существенно: последовательность $f_j(t)=0$ при $0\leqslant t<1$ и $f_j(1)=j$ не имеет всюду сходящейся подпоследовательности, однако, $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=1$ при $0<\varepsilon<j$, а потому

$$\limsup_{j\to\infty}N(\varepsilon,f_j,[0,1])=1\qquad\text{для всех}\quad\varepsilon>0.$$

В то же время условие поточечной ограниченности не является необходимым: последовательность $f_j(t)=0$ при $0\leqslant t<1$ и $f_j(1)=j^{(-1)^j}$ содержит всюду сходящуюся подпоследовательность, соответствующую нечетным номерам j, и является неограниченной в точке $t=1$, причем, как и выше,

$$\limsup_{j\to\infty}N(\varepsilon,f_j,[0,1])=1\qquad\text{для всех}\quad\varepsilon>0.$$

3.2. Без предположения (1) теорема 1 не имеет места. Действительно, известно, что последовательность $f_j(t)=\sin(jt)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, не имеет ни одной подпоследовательности, которая сходится всюду на $[0,2\pi]$. С другой стороны, покажем, что

$$4j\leqslant N(\varepsilon,f_j,[0,2\pi])\leqslant\frac{4j}{\varepsilon}\qquad\text{для всех}\quad 0<\varepsilon<1.\tag{7}$$

Поскольку $\operatorname{osc}(f_j,[0,2\pi])=2$ и $V_0^{2\pi}(f_j)=4j$, в силу (6) при $0<\varepsilon<2$ получим неравенство справа. Пусть теперь $0<\varepsilon<1$. Для $j\in\mathbb{N}$ положим $t_i^j=\pi i/(2j)$, $i=0,1,\dots,4j$, и $[a_i,b_i]=[t_{i-1}^j,t_i^j]$, $i=1,\dots,4j$. Тогда для всех $i=1,\dots,4j$ найдем, что

$$|f_j(a_i)-f_j(b_i)|=\left|\sin\left(\frac{\pi i}{2}\right)-\sin\left(\frac{\pi(i-1)}{2}\right)\right|=1>\varepsilon,$$

откуда по определению величины $N(\,\cdot\,)$ вытекает неравенство слева в (7), из которого следует, что $\limsup_{j\to\infty}N(\varepsilon,f_j,[0,2\pi])=\infty$ для всех $0<\varepsilon<1$.

3.3. Условие (1) не является необходимым, так что теорема 2, (a) нарушается для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$. Пусть $\mathscr{D}$ есть функция Дирихле: $\mathscr{D}(t)=1$ при $t\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ и $\mathscr{D}(t)=0$ при $t\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}$. Тогда $N(\varepsilon,\mathscr{D},[0,1])=\infty$ при $0<\varepsilon<1=\operatorname{osc}(\mathscr{D},[0,1])$. На $[0,1]$ рассмотрим последовательность

$$f_j(t)=\lim_{m\to\infty}(\cos(j!\,\pi t))^{2m};$$

она принимает значение 1, если $j!\,t$ – целое число, и значение 0 в противном случае, а потому всюду на $[0,1]$ сходится к функции Дирихле $\mathscr{D}$. Поскольку $\operatorname{osc}(f_j,[0,1])=1$ и $V_0^1(f_j)=2\cdot j!$, то $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=2\cdot j!$ при $0<\varepsilon<1$, так что

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[0,1])=\infty \qquad \text{для всех} \quad 0<\varepsilon<1.$$

Отметим, что здесь также показано, что для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ из условия $N(\varepsilon,f_j,[0,1])<\infty$ для всех $\varepsilon>0$ и $j\in\mathbb{N}$ не следует, что

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[0,1])<\infty \qquad \text{для всех} \quad \varepsilon>0.$$

Кроме того, возможен случай, когда все функции f_j последовательности $\{f_j\}$ не удовлетворяют условию $N(\varepsilon,f_j,[a,b])<\infty$ для всех $\varepsilon>0$, тогда как предельная функция f из теоремы 1 всегда этому условию удовлетворяет: последовательность $f_j(t)=\mathscr{D}(t)/j$ равномерно на $[0,1]$ сходится к нулевой функции, $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=\infty$ при $0<\varepsilon<1/j=\operatorname{osc}(f_j,[0,1])$ и $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=0$ для всех $\varepsilon>0$ и $j\geqslant 1/\varepsilon$.

3.4. Другим примером всюду сходящейся (к нулю) последовательности $\{f_j\}$, для которой нарушается условие (1), служит пример из [10; пример 4]: положив $f_j(t)=\sin(j^2t)$ при $0\leqslant t\leqslant 2\pi/j$ и $f_j(t)=0$ при $2\pi/j\leqslant t\leqslant 2\pi$, найдем, что выполняются неравенства (7).

3.5. Левый предел при $\delta\to\varepsilon-0$ в неравенстве теоремы 2, (a) нельзя заменить выражением $N(\varepsilon,f,[a,b])$: последовательность $f_j(t)=0$ при $0\leqslant t<1$ и $f_j(1)=1+(1/j)$ сходится равномерно на $[0,1]$ к функции $f(t)=0$ при $0\leqslant t<1$ и $f(1)=1$, так что при $\varepsilon=1$ имеем $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=1$ для всех $j\in\mathbb{N}$ и $N(\delta,f,[0,1])=1$ для всех $0<\delta<\varepsilon$, тогда как $N(\varepsilon,f,[0,1])=0$.

3.6. Для всюду сходящейся последовательности $\{f_j\}$ условие (1) может быть выполнено, а неравенство в теореме 2, (a) – нет: последовательность $f_j(t)=1$ при $t=1/(j+1)$ и $f_j(t)=0$ при $t\neq 1/(j+1)$ сходится всюду на $[0,1]$ к функции $f(0)=1$ и $f(t)=0$ при $0<t\leqslant 1$, причем если $0<\varepsilon<1$, то $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=2$ для всех $j\in\mathbb{N}$ и $N(\varepsilon,f,[0,1])=1$.

3.7. Здесь приводится пример последовательности $\{f_j\}$ на $[0,1]$, которая не ограничена равномерно и для которой применима теорема 1. Положим $f_j(t)=j$ при $t=1/(j+1)$ и $f_j(t)=0$ при $t\neq 1/(j+1)$. Тогда $\{f_j\}$ всюду сходится к $f\equiv 0$, поэтому $\{f_j\}$ поточечно ограничена; более того, $\{f_j(t)\}=\{0\}$ при $t\notin\{1/(k+1)\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{f_j(t)\}=\{0,k\}$ при $t=1/(k+1)$, $k\in\mathbb{N}$. Далее, $\operatorname{osc}(f_j,[0,1])=j$ (стремится к бесконечности при $j\to\infty$) и в силу (6) $N(\varepsilon,f_j,[0,1])=2$ при $0<\varepsilon<j$, откуда

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon,f_j,[0,1])=2 \qquad \text{для всех} \quad \varepsilon>0.$$

3.8. Существуют всюду сходящиеся к нулю последовательности $\{f_j\}$ (а потому, поточечно ограниченные), для которых нарушается условие (1) и

$$\limsup_{j\to\infty} \operatorname{osc}(f_j,[0,1])=\infty.$$

Положим $f_j(t) = jt^j$ при $0 \leqslant t < 1$ и $f_j(1) = 0$. Тогда $\operatorname{osc}(f_j, [0,1]) = j$, $V_0^1(f_j) = 2j$ и, потому, в силу (6) $N(\varepsilon, f_j, [0,1]) \leqslant 2j/\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < j$. Покажем, что

$$N(\varepsilon, f_j, [0,1]) \geqslant [j/(2\varepsilon)] \qquad \text{при} \quad j > 2\varepsilon$$

(здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа), откуда будет следовать, что

$$\limsup_{j\to\infty} N(\varepsilon, f_j, [0,1]) = \infty \qquad \text{для всех} \quad \varepsilon > 0.$$

Действительно, для $j > 2\varepsilon$ положим $t_i = (2i\varepsilon/j)^{1/j}$, $i = 0, 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$, и $[a_i, b_i] = [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$. Тогда $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{[j/(2\varepsilon)]} \leqslant 1$ и

$$|f_j(a_i) - f_j(b_i)| = j(t_i)^j - j(t_{i-1})^j = j\,\frac{2i\varepsilon}{j} - j\,\frac{2(i-1)\varepsilon}{j} = 2\varepsilon > \varepsilon$$

для всех $i = 1, \dots, [j/(2\varepsilon)]$, откуда следует искомое неравенство.

3.9. В определении величины $N(\varepsilon, f, [a,b])$ в п. 1 требуется, чтобы неналегающие отрезки $[a_i, b_i]$ обладали свойством: $|f(a_i) - f(b_i)| > \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, n$. Если здесь заменить неравенство $> \varepsilon$ на $\geqslant \varepsilon$ и новую величину обозначить через $N_{\geqslant}(\varepsilon, f, [a,b])$, то для нее неравенство слева в (4) может нарушаться: последовательность $f_j(t) = 1$ при $t = 0$, $f_j(t) = 0$ при $0 < t < 1$ и $f_j(t) = 1 - (1/j)$ при $t = 1$ сходится равномерно на $[0,1]$ к функции $f(0) = f(1) = 1$ и $f(t) = 0$ при $0 < t < 1$, и при $\varepsilon = 1$ найдем, что $N_{\geqslant}(\varepsilon, f_j, [0,1]) = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $N_{\geqslant}(\varepsilon, f, [0,1]) = 2$.

4. Сравнение с известными принципами выбора.

4.1. Пусть функция $\varphi\colon [a,b] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$, удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) при любом $t \in [a,b]$ функция $\varphi(t, \cdot\,)$ второго аргумента не убывает и непрерывна на $\mathbb{R}^+$ и $\varphi(t,u) \to \infty$ при $u \to \infty$;

(ii) $\varphi(t, 0) = 0$ при любом $t \in [a,b]$ и $\inf_{t\in[a,b]} \varphi(t,u) > 0$ для любого $u > 0$.

Следуя [3], для функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ положим

$$V_\varphi(f, [a,b]) = \sup \sum_{i=1}^{n} \varphi(t_i, |f(a_i) - f(b_i)|),$$

где супремум берется по всем $n \in \mathbb{N}$, всем наборам $[a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$, неналегающих отрезков из $[a,b]$ и всем точкам $t_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, \dots, n$. Эта обобщенная вариация функции f соответствует φ-вариации по Винеру–Янгу при $\varphi(t,u) = \varphi(u)$ и обычной вариации по Жордану $V_a^b(f)$ при $\varphi(t,u) = u$. В цитированной работе установлено следующее обобщение теоремы Хелли: *если последовательность функций $\{f_j\}$ на отрезке $[a,b]$ ограничена в некоторой точке из $[a,b]$ и*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} V_\varphi(f_j, [a,b]) = C < \infty,$$

то $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая всюду на $[a,b]$ сходится к некоторой функции f такой, что $V_\varphi(f, [a,b]) \leqslant C$. Этот результат сразу вытекает из теоремы 1 (вместе с теоремой Хелли при $\varphi(t,u)=u$ и ее обобщением из [4; теорема 1.3] при $\varphi(t,u)=\varphi(u)$), если принять во внимание оценки (ср. с оценками из доказательства теоремы 9 из [12]):

$$\operatorname{osc}(f_j,[a,b])\leqslant 2\max\{u\in\mathbb{R}^+ \mid \varphi(a,u)\leqslant V_\varphi(f_j,[a,b])\},$$
$$N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant \frac{V_\varphi(f_j,[a,b])}{\inf_{t\in[a,b]}\varphi(t,\varepsilon)}\qquad \text{для}\quad 0<\varepsilon<\operatorname{osc}(f_j,[a,b]),$$

а также секвенциальную полунепрерывность снизу функционала V_φ: если последовательность $\{f_j\}$ сходится всюду на $[a,b]$ к функции f, то

$$V_\varphi(f,[a,b])\leqslant \liminf_{j\to\infty} V_\varphi(f_j,[a,b])\leqslant C.$$

4.2. Пусть $\Phi=\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – последовательность, состоящая из непрерывных неубывающих неограниченных функций $\varphi_i\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ таких, что $\varphi_i(u)=0$ лишь при $u=0$, и удовлетворяющих следующим двум условиям:

(a) $\varphi_{i+1}(u)\leqslant\varphi_i(u)$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и $u\in\mathbb{R}^+$;

(b) $\sum_{i=1}^\infty\varphi_i(u)=\infty$ для всех $u>0$.

Следуя [8], для функции $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ положим

$$V_\Phi(f,[a,b])=\sup\sum_{i=1}^n\varphi_i(|f(a_i)-f(b_i)|),$$

где супремум берется по всем $n\in\mathbb{N}$ и всем неупорядоченным наборам $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$, неналегающих отрезков из $[a,b]$. Такая обобщенная вариация функции f соответствует вариации по Жордану $V_a^b(f)$ при $\varphi_i(u)=u$, φ-вариации по Винеру–Янгу при $\varphi_i(u)=\varphi(u)$ и Λ-вариации по Уотерману [9] при $\varphi_i(u)=u/\lambda_i$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и $u\in\mathbb{R}^+$, где $\Lambda=\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ – неубывающая последовательность положительных чисел, для которой $\sum_{i=1}^\infty 1/\lambda_i=\infty$. Обобщение теоремы Хелли из [8; теорема 2.8] (и его частный случай из [9; теорема 5]) формулируется так же, как соответствующее утверждение в п. 4.1 с заменой V_φ на V_Φ. Этот результат вытекает из теоремы 1, благодаря следующим оценкам (ср. с оценками из доказательства теоремы 10 в [12]):

$$\operatorname{osc}(f_j,[a,b])\leqslant \max\{u\in\mathbb{R}^+ \mid \varphi_1(u)\leqslant V_\Phi(f_j,[a,b])\},$$
$$N(\varepsilon,f_j,[a,b])\leqslant \max\biggl\{n\in\mathbb{N}\biggm| \sum_{i=1}^n\varphi_i(\varepsilon)\leqslant V_\Phi(f_j,[a,b])\biggr\}\qquad \text{при}\quad 0<\varepsilon<\operatorname{osc}(f_j,[a,b]),$$

а также свойству секвенциальной полунепрерывности снизу функционала V_Φ.

4.3. Из теоремы 1 вытекает и установленный другим способом принцип выбора типа Хелли из работы [2; часть III, § 2, предложение 2.8], в котором для справедливости заключения теоремы 1 предполагается значительно больше, а именно, что последовательность $\{f_j\}$ равномерно ограничена,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\operatorname{osc}(f_j,[a,b])<\infty\quad\text{и}\quad \sup_{j\in\mathbb{N}}N(\varepsilon,f_j,[a,b])<\infty\qquad\text{для всех}\quad \varepsilon>0. \tag{8}$$

4.4. Напомним, что *модулем изменения по Чантурия* [13] функции $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ называется последовательность $\{\nu(n,f,[a,b])\}_{n\in\mathbb{N}}$, определяемая правилом

$$\nu(n,f,[a,b]) = \sup\sum_{i=1}^{n} |f(a_i)-f(b_i)|,$$

где для фиксированного $n\in\mathbb{N}$ супремум берется по всем наборам $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,n$, неналегающих отрезков из $[a,b]$. Как отмечено в [13; теорема 5] (см. также [7; теорема 3]), функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ имеет односторонние конечные левый и правый пределы во всех точках $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\nu(n,f,[a,b])=o(n)$ (т.е. $\nu(n,f,[a,b])/n\to 0$ при $n\to\infty$). Отметим [2; часть III, § 2, теорема 2.2], что для последовательности функций $\{f_j\}$ условия (8) эквивалентны одному условию:

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \nu(n,f_j,[a,b]) = o(n).$$

В работе [7; теорема 1] (и ее обобщениях [10]–[12]) установлен следующий принцип выбора, обобщающий теорему Хелли: *если последовательность функций* $\{f_j\}$ *на* $[a,b]$ *ограничена в некоторой точке из* $[a,b]$ *и*

$$\limsup_{j\to\infty} \nu(n,f_j,[a,b]) = o(n), \tag{9}$$

то $\{f_j\}$ *содержит подпоследовательность, которая всюду на* $[a,b]$ *сходится к некоторой функции* f *такой, что* $\nu(n,f,[a,b])=o(n)$. Этот результат вытекает из теоремы 1, если учесть, что условие (9) эквивалентно сразу паре условий – условию (1) и $\limsup_{j\to\infty}\operatorname{osc}(f_j,[a,b])<\infty$. Заметим, что во всех приведенных выше обобщениях теоремы Хелли, кроме теоремы 1, из их предположений вытекает равномерная ограниченность исходной последовательности $\{f_j\}$.

4.5. Для знакопеременной функции $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ обозначим через $\mathscr{P}(f)$ множество всех наборов точек $\{t_1,\dots,t_n\}\subset[a,b]$, где $n\in\mathbb{N}$, таких, что $t_1<\dots<t_n$, и либо $(-1)^i f(t_i)>0$ для всех $i=1,\dots,n$, либо $(-1)^i f(t_i)<0$ для всех $i=1,\dots,n$, либо $(-1)^i f(t_i)=0$ для всех $i=1,\dots,n$, и следуя [14], положим

$$T(f,[a,b]) = \sup\biggl\{\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)| \biggm| n\in\mathbb{N} \text{ и } \{t_i\}_{i=1}^{n}\in\mathscr{P}(f)\biggr\};$$

если же функция f всюду на $[a,b]$ неотрицательна или всюду на $[a,b]$ неположительна, то полагаем $T(f,[a,b])=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$. Так определенная величина $T(f,[a,b])$ называется *осцилляцией* f *на* $[a,b]$ *в смысле Шрадера.*

В работе [14; теорема 1.2] установлено следующее обобщение теоремы Хелли: *если последовательность функций* $\{f_j\}$ *на отрезке* $[a,b]$ *такова, что*

$$\sup_{j,k\in\mathbb{N}} T(f_j-f_k,[a,b]) < \infty,$$

то она содержит подпоследовательность, которая сходится всюду на $[a,b]$. Такая последовательность $\{f_j\}$ является поточечно ограниченной, но никаких свойств "регулярности" предельной функции, как в предыдущих обобщениях пп. 4.1–4.4, не утверждается. Приведем примеры, показывающие, что этот результат и теорема 1 независимы (некоторое развитие понятия осцилляции по Шрадеру приведено в работе [15], где установлено соответствующее обобщение теоремы Хелли – теорема 2.1; этот результат и теорема 1 также независимы [16]): последовательность из примера 3.7 удовлетворяет теореме 1, но не удовлетворяет ни одному из приведенных выше обобщений теоремы Хелли, в то время как последовательность $f_j(t) = (-1)^j \mathscr{D}(t)$ на $[0,1]$ удовлетворяет принципу выбору Шрадера, но не удовлетворяет никакому другому приведенному выше принципу выбора.

4.6. Модуль непрерывности $\omega(\,\cdot\,,f)\colon [0,b-a] \to \mathbb{R}^+$ непрерывной функции $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ определяется как обычно правилом

$$\omega(\rho,f) = \sup\{|f(s)-f(t)| : s,t \in [a,b],\ |s-t| \leqslant \rho\} \qquad \text{при} \quad 0<\rho\leqslant b-a$$

и

$$\omega(0,f) = \lim_{\rho\to+0} \omega(\rho,f) = 0.$$

По теореме Вейерштрасса $\operatorname{osc}(f,[a,b])$ конечна. Последовательность функций $\{f_j\}$ на $[a,b]$ называется равностепенно непрерывной, если

$$\lim_{\rho\to+0} \sup_{j\in\mathbb{N}} \omega(\rho,f_j) = 0.$$

Имеет место следующая известная теорема Асколи: *поточечно ограниченная равностепенно непрерывная последовательность вещественных функций $\{f_j\}$ на $[a,b]$ содержит всюду сходящуюся подпоследовательность*. Эта теорема является следствием теоремы 1, если принять во внимание, что

$$N(\varepsilon,f_j,[a,b]) \leqslant \frac{b-a}{\min\{\rho\in\mathbb{R}^+ \mid \omega(\rho,f_j)=\varepsilon\}} \qquad \text{для} \quad 0<\varepsilon<\operatorname{osc}(f_j,[a,b]).$$

Авторы выражают признательность В. С. Балаганскому (Институт математики и механики Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, Россия) и К. Манискалко (C. Maniscalco, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy) за заинтересованное обсуждение результатов работы и ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974.

[2] R. M. Dudley, R. Norvaiša, *Differentiability of Six Operators on Nonsmooth Functions and p-Variation*, With the collaboration of Jinghua Qian, Lecture Notes in Math., **1703**, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[3] S. Gniłka, "On the generalized Helly's theorem", *Funct. Approximatio Comment. Math.*, **4** (1976), 109–112.

[4] J. Musielak, W. Orlicz, "On generalized variations. I", *Studia Math.*, **18** (1959), 11–41.

[5] В. В. Чистяков, "О многозначных отображениях конечной обобщенной вариации", *Матем. заметки*, **71**:4 (2002), 611–632.

[6] V. V. Chistyakov, "Selections of bounded variation", *J. Appl. Anal.*, **10**:1 (2004), 1–82.

[7] V. V. Chistyakov, "A selection principle for functions of a real variable", *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia*, **53**:1 (2005), 25–43.

[8] M. Schramm, "Functions of Φ-bounded variation and Riemann–Stieltjes integration", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **287**:1 (1985), 49–63.

[9] D. Waterman, "On Λ-bounded variation", *Studia Math.*, **57**:1 (1976), 33–45.

[10] V. V. Chistyakov, "The optimal form of selection principles for functions of a real variable", *J. Math. Anal. Appl.*, **310**:2 (2005), 609–625.

[11] В. В. Чистяков, "Принцип выбора для функций со значениями в равномерном пространстве", *Докл. РАН*, **409**:5 (2006), 591–593.

[12] В. В.Чистяков, "Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве", *Матем. тр.*, **9**:1 (2006), 176–204.

[13] З. А. Чантурия, "Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье", *Докл. АН СССР*, **214**:1 (1974), 63–66.

[14] K. Schrader, "A generalization of the Helly selection theorem", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **78**:3 (1972), 415–419.

[15] L. Di Piazza, C. Maniscalco, "Selection theorems, based on generalized variation and oscillation", *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **35**:3 (1986), 386–396.

[16] C. Maniscalco, "A comparison of three recent selection theorems", *Math. Bohem.*, **132**:2 (2007), 177–183.

Ю. В. Третьяченко
Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского
E-mail: tretyachenko_y_v@mail.ru

Поступило
08.06.2007

В. В. Чистяков
Государственный университет – Высшая школа экономики
(Нижегородский филиал)
E-mail: czeslaw@mail.ru