

Олимпиада 2003 года

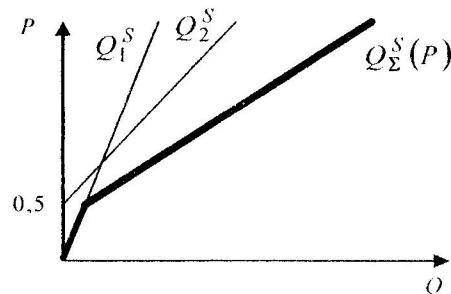
ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ КОММЕНТАРИИ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

1. б) уменьшилась;
2. г) оценить невозможно;
3. б) комплементы;
4. в) 4 млн. евро;
5. в) спрос на товар X для отдельной фирмы эластичен по цене;
6. а) 3,2;
7. г) 5;
8. в) 5;
9. а) 21;
10. в) ввести субсидии на продажу лекарства;
11. в) не изменится;
12. а) 10;
13. а) около 10950 у.е.;
14. б) 0,625;
15. б) -1%.

КОММЕНТАРИИ И ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Задача 1

Построим суммарную кривую предложения $Q_{\Sigma}^S(P)$ (складывая объем предложения по горизонтали, см. рисунок):



$$Q_{\Sigma}^S(P) = Q_1^S(P) + Q_2^S(P) = \begin{cases} -1 + 3P, & P > 0,5; \\ P, & P \in [0; 0,5] \end{cases}$$

Вычислим равновесие на рынке:

$$Q_{\Sigma}^S(P^*) = Q^D(P^*): \quad \begin{cases} -1 + 3P^* = 99 - 2P^*, \\ P^* > 0,5. \end{cases}$$

Отсюда получим, что $P^* = 20$. Таким образом, объем поставок первой фирмы $Q_1^S(P^*) = 20$ ед., объем поставок второй фирмы $Q_2^S(P^*) = 39$ ед.

Пусть НДС составляет $a \times 100\%$. Тогда цена на рынке $P = P'(1+a)$, где P' – цена производителя. Вследствие этого, функции предложения фирм соответственно равны:

$$Q_1^S = P'(1+a), \quad Q_2^S = -1 + 2P'(1+a).$$

Если НДС отсутствует, то $P' \equiv P$, поэтому рыночное предложение равно

$$Q_{\Sigma}^S(P) = \begin{cases} -1 + 3P(1+a), & P > \frac{1}{2(1+a)}; \\ (1+a)P, & 0 \leq P \leq \frac{1}{2(1+a)}. \end{cases}$$

Приравнивая спрос и предложение, найдем равновесную цену после отмены НДС:

$$\begin{cases} -1 + 3P^{**}(1+a) = 99 - 2P^{**}; \\ P^{**} > \frac{1}{2(1+a)}; \end{cases} \quad \begin{cases} P^{**} = 20 - \frac{3}{5}a; \\ P^{**} > \frac{1}{2(1+a)}. \end{cases}$$

Равновесные объемы поставок хлеба на рынок фирмами при равновесной цене P^{**} представляются в виде

$$Q_1^S(P^{**}) = (1+a)\left(20 - \frac{3}{5}a\right) = 20 + 19,4a - \frac{3}{5}a^2;$$

$$Q_2^S(P^{**}) = -1 + 2(1+a)\left(20 - \frac{3}{5}a\right) = 39 + 38,8a - 1,2a^2.$$

Изменение объема поставок в результате отмена налога будет определяться следующим образом:

$$\Delta Q_1^S = Q_1^S(P^*) - Q_1^S(P^{**}) = 19,4a - 0,6a^2;$$

$$\Delta Q_2^S = Q_2^S(P^*) - Q_2^S(P^{**}) = 38,8a - 1,2a^2.$$

Если считать, что НДС на хлебобулочные изделия равен 10 % (т.е. $a = 0,1$), то получим, что первая фирма увеличит объем поставок на

$$\Delta Q_1^S = 1,94 - 0,006 = 1,934 \text{ ед.},$$

вторая фирма увеличит объем поставок на

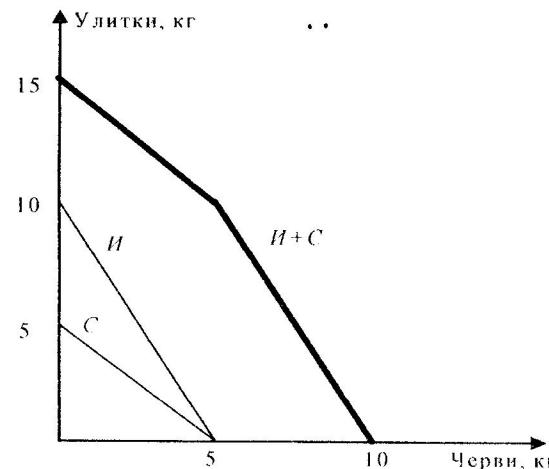
$$\Delta Q_2^S = 3,88 - 0,012 = 3,868 \text{ ед.}$$

Ответ.

Первая фирма увеличит объем поставок на 1,934 ед., вторая фирма увеличит объем поставок на 3,868 ед.

Задача 2

Построим границы производственных возможностей (кривые производственных возможностей – КПВ) каждого из племен (*«И»* и *«С»*) и совместную двух племен *«И+С»* (см. рисунок).



1) Для Игуан альтернативные издержки сбора 1 кг улиток равны 0,5 кг червей, для Скорпионов альтернативные издержки сбора 1 кг улиток равны 1 кг червей Поэтому, чтобы оба племени специализировались на сборе улиток, цена 1 кг улиток на соседних островах должна быть больше, чем 1 кг червей или, что то же самое, цена 1 кг червей должна быть меньше цены 1 кг улиток. Таким образом, цена 1 кг червей должна быть меньше 2 раковин: $P_u < 2$ раковин.

2) Чтобы оба племени специализировались на сборе червей, цена 1 кг улиток на соседних островах должна быть меньше стоимости 0,5 кг червей, т.е., цена 1 кг червей должна быть больше стоимости 2 кг улиток. Отсюда следует, что цена 1 кг червей должна быть больше 4 раковин: $P_u > 4$ раковин.

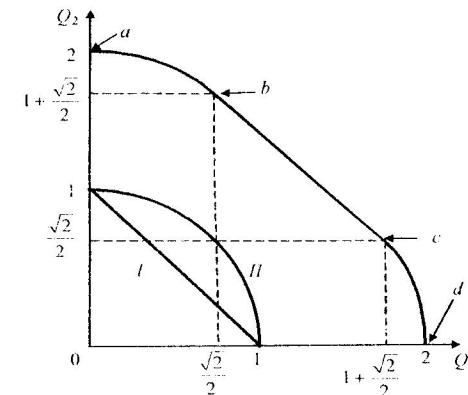
3) Для разделения обязанностей по собираанию улиток и червей, цена 1 кг улиток на соседних островах должна быть больше, чем стоимость 0,5 кг червей, и меньше, чем цена 1 кг червей. Таким образом, пересчитывая в количество раковин, получим, что цена 1 кг червей должна быть больше 2 раковин, но меньше 4 раковин: $P_u \in (2, 4)$ раковин.

Ответ.

- 1) $P_u < 2$ раковин;
- 2) $P_u > 4$ раковин;
- 3) $P_u \in (2, 4)$ раковин.

Задача 3

На рисунке построены индивидуальные границы производственных возможностей 1 и 2 фирмы и совокупная граница производственных возможностей.

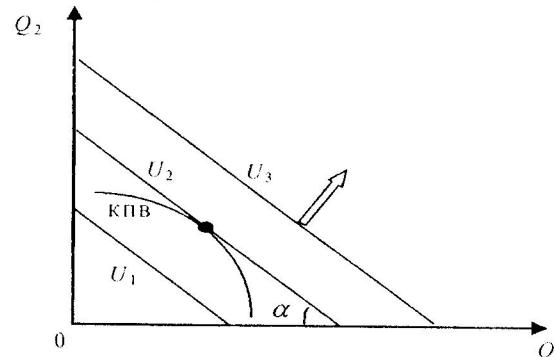


Если обе фирмы будут выпускать только продукт Q_1 , то суммарный выпуск будет равен 2. если необходимо выпустить «чуть-чуть» продукта Q_2 то, естественно, необходимо это сделать на фирме *II*, т.к. альтернативные издержки выпуска Q_2 в этой точке меньше, чем у фирмы *I*. Напомним, что альтернативные издержки выпуска единицы продукта Q_i – это модуль тангенса угла наклона касательной к оси Q_i . По мере увеличения выпуска товара Q_2 на фирме *II*, ее альтернативные издержки возрастают и при объеме выпуска $Q_2 = \sqrt{2}/2$ сравниваются с альтернативными издержками фирмы *I*, а при дальнейшем увеличении выпуска Q_2 их превосходят. Поэтому, начиная с объема выпуска $Q_2 = \sqrt{2}/2$ и больше, необходимо выпускать товар Q_2 на *I* фирме (участок *bc*). Затем, когда фирма *I* полностью переключилась на выпуск товара Q_2 (точка *c*), последующее увеличение производства Q_2 возможно только на фирме *II*, за счет дальнейшего снижения выпуска товара Q_1 (участок *cd*), тем самым совместная кривая производственных возможностей *abed*, приведенная на рисунке, алгебраически выглядит следующим образом:

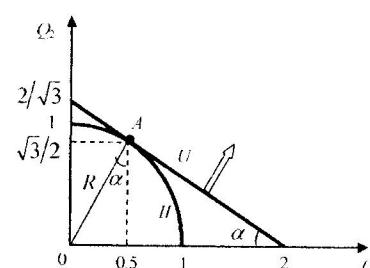
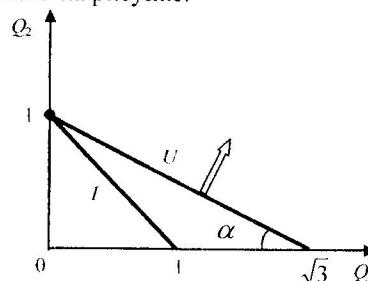
$$\begin{cases} Q_1^2 + (Q_2 - 1)^2 = 1, & Q_1 \in [0, \sqrt{2}/2]; \\ Q_2 = 1 + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - Q_1, & Q_1 \in [\sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2]; \\ (Q_1 - 1)^2 + Q_2^2 = 1, & Q_1 \in [\sqrt{2}/2 + 1, 2]. \end{cases}$$

Задача 4

Обозначим через U удовлетворенность потребителей: $U = Q_1 + \sqrt{3}Q_2$. Построим семейство линий равной «удовлетворенности потребителей» (кривые безразличия) $U_i = \text{const}$, $U_1 < U_2 < U_3$ (на рисунке стрелкой показано направление роста удовлетворенности потребителей). Очевидно, что максимально достижимая линия $U_i = \text{const}$ (и, следовательно, максимально достижимый уровень удовлетворенности) является касательной к кривой производственных возможностей (КПВ). При этом тангенс угла наклона касательной равен $\tan \alpha = 1/\sqrt{3}$, т.е. $\alpha = 30^\circ$.

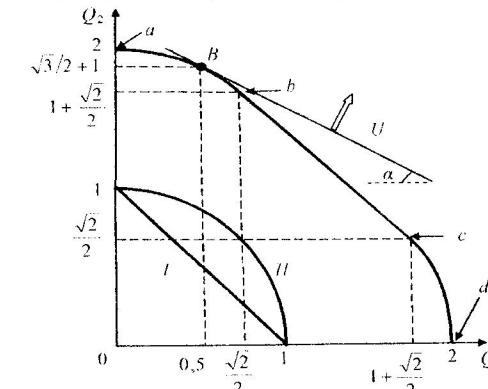


а). Когда предприятия действуют по отдельности, то первое предприятие производит только благо Q_2 в максимально возможном количестве, т.к. кривые безразличия достигают максимального уровня в угловой точке $Q_2 = 1$, $Q_1 = 0$ границы производственных возможностей I , как показано на рисунке.



Второе предприятие производит оба блага в точке A на своей кривой производственных возможностей II , в которой тангенс угла наклона касательной равен $\tan \alpha = 1/\sqrt{3}$. В силу свойств окружности касательная перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания. Следовательно, координата точки A (см. рисунок) $Q_1^A = \sin \alpha = 0,5$; $Q_2^A = \cos \alpha = \sqrt{3}/2$.

б). Найдем точку на совместной границе производственных возможностей (см. рисунок), в которой касательная имеет тангенс угла наклона равный $\tan \alpha = 1/\sqrt{3}$. Построение кривой производственных возможностей при объединении предприятий проведено при решении задачи 3.



Искомая точка B (по построению — «образ» точки A на рисунке индивидуальной границы производственных возможностей для второго предприятия) имеет координаты $(Q_1^B, Q_2^B) = (0,5; \sqrt{3}/2 + 1)$. Следовательно, для максимально полного удовлетворения интересов потребителей необходимо производить 0,5 ед. блага 1 и $\sqrt{3}/2 + 1$ ед. блага 2.

в). Путем объединения кривых производственных возможностей во многих задачах удается получить выигрыши в количестве потребляемых благ. Но в данной задаче этот механизм не срабатывает. Причиной является то, что для первого предприятия при независимой работе оптимальным является угловое решение $Q_1 = 0$, $Q_2 = 1$. В результате суммарное количество производимых благ не зависит от того, работают ли предприятия по отдельности или объединились в одно. Объединение предприятий в данной задаче не повышает благосостояния потребителей, уровень удовлетворенности потребителей одинаков в обоих случаях.

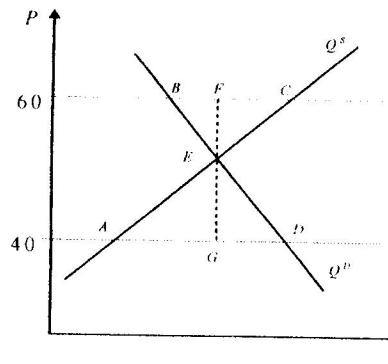
Ответ.

- На первом предприятии производится 1 единица второго блага $Q_2 = 1$, на втором производятся 0,5 единиц первого блага $Q_1 = 0,5$ и $\sqrt{3}/2$ единиц второго блага.
- При объединении совместное предприятие должно выпускать товаров столько же, сколько выпускают вместе предприятия в пункте а): $Q_1 = 0,5$ и $Q_2 = \sqrt{3}/2 + 1$.

- в) Уровень удовлетворенности потребителей при отдельной работе предприятий такой же, как при их объединении в одно предприятие.

Задача 5

Представим условия задачи графически (см. рисунок).



Несложно видеть, что треугольники AED и CEB подобны (по трем углам). Следовательно, $\frac{|AD|}{|BC|} = \frac{|EF|}{|EG|}$. Пусть $|EF| = x$. Тогда, учитывая, что $|AD| = 30$, $|BC| = 20$, $|FG| = 20$, получаем цепочку уравнений для величины x :

$$\frac{30}{20} = \frac{x}{20-x}; \quad 600 - 30x = 20x; \quad x = 12.$$

В итоге равновесная цена равна $P = 40 + x = 40 + 12 = 52$.
Ответ.

Равновесная цена равна $P = 52$.

Задача 6

Рассчитаем объем выпуска стали металлургическим комбинатом. Прибыль комбината описывается уравнением:

$$\Pi_C(Q_C) = P_C Q_C - TC_C(Q_C).$$

Необходимое условие максимума прибыли: $\frac{d\Pi_C(Q_C)}{dQ_C} \Big|_{Q_C=Q_C^*} = 0$,

таким образом: $P_C = MC_C(Q_C^*)$, т.е. $102 = 2 + 2Q_C^*$, следовательно, $Q_C^* = 50$ тыс. тонн. Так как предельные издержки $MC_C = 2 + 2Q_C$ возрастают с ростом выпуска, то достаточное условие максимума прибыли также

выполняется. Подставим в функцию издержек производства меда значение $Q_C = 50$ и вычислим прибыль пасечника:

$$\begin{aligned} \Pi_M(Q_M) &= P_M^D(Q_M)Q_M - TC_M(Q_M, Q_C) \Big|_{Q_C=50} = \\ &= (400 - Q_M)Q_M - 30 - 1,5(Q_M + 50)^2. \end{aligned}$$

Здесь $P_M^D(Q_M) = 400 - Q_M$ – обратная функция спроса на мед. Найдем объем выпуска, максимизирующий прибыль пасечника.

Необходимое условие максимума: $\frac{d\Pi(Q_M)}{dQ_M} \Big|_{Q_M=Q_M^*} = 0$. Отсюда:

$MR_M(Q_M^*) = MC_M(Q_M^*)$, т.е. $400 - 2Q_M = 3Q_M + 150$, следовательно, $Q_M^* = 50$. Достаточное условие максимума прибыли также выполняется, т.к. функция предельной выручки $MR_M(Q_M) = 400 - 2Q_M$ убывает, а функция предельных издержек пасечника $MC_M(Q_M) = 3Q_M + 150$ растет с ростом выпуска.

Рассчитаем величину прибыли пасечника

$$\Pi(Q_M) \Big|_{Q_M=50} = 350 \times 50 - 30 - 1,5 \times 100^2 = 2470.$$

Ответ.

Объем выпуска меда, максимизирующий прибыль пасечника, равен 50 кг.

Задача 7

Приведенной информации вполне хватает для вычисления индекса Джини.

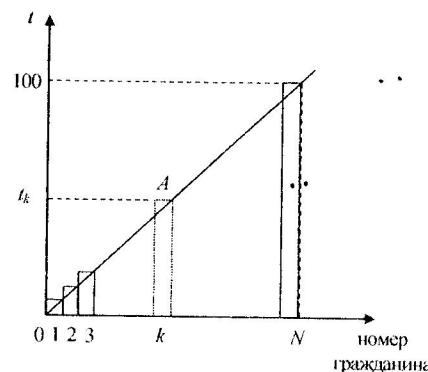
Для этого необходимо построить кривую Лоренца, т.е. зависимости доли доходов населения $Y(x)$ от x – доли населения, ранжированного по доходу. Пусть i – номер гражданина в ранжированном списке, t_i – его доход. Поскольку чистый ежегодный среднедушевой доход граждан растет линейно от нуля до 100 условных денежных единиц на человека, то $t_i = 100i/N$, где N – количество жителей в стране (см. рисунок).

Тогда суммарный доход первых k жителей равен:

$$T(k) = t_1 + t_2 + \dots + t_k = \sum_{i=1}^k t_i.$$

Несложно видеть, что эта сумма равна:

$$T(k) = \sum_{i=1}^k t_i = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^k i = \frac{50k(k+1)}{N}$$



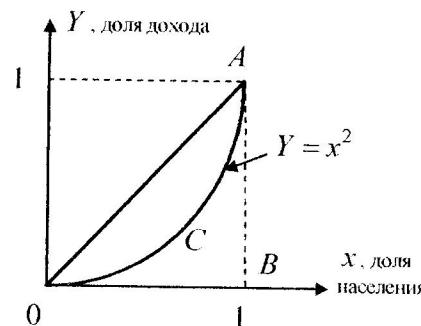
и приближенно может быть представлена площадью треугольника OAk на рисунке. Доход всех жителей равен:

$$T(N) = \sum_{i=1}^N t_i = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N i = \frac{50N(N+1)}{N} = 50(N+1).$$

Отсюда доля дохода k первых граждан (или $x = k/N$ части населения) находится в виде

$$Y(x) = \frac{T(k)}{T(N)} = \frac{50k(k+1)}{N} \cdot \frac{1}{50(N+1)} = \frac{k(k+1)}{N(N+1)} = \frac{x(x+1/N)}{1+1/N}, \quad (0 \leq x \leq 1).$$

При условии, что число жителей достаточно велико, приближенно получаем, что $Y(x) = x^2$ (см. рисунок).



Индекс Джини можно вычислить с помощью отношения площади замкнутого сегмента $OACO$ к площади треугольника ΔOAB на рисунке:

$$I_J = S_{OACO} / S_{\Delta OAB}.$$

По свойству интегралов площадь под кривой Лоренца равна

$$S_{OCA} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Площадь прямоугольного треугольника ΔOAB с катетами равными единице легко вычислить: $S_{\Delta OAB} = 0,5$. Таким образом, индекс Джини равен

$$I_J = \frac{S_{OACO}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{S_{OCA}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{1/3}{1/2} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

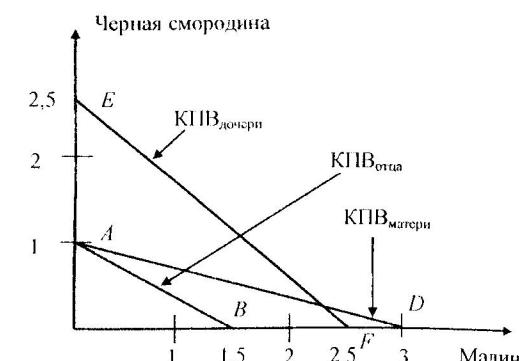
По всей видимости, на других островах неравенство по доходам и индекс Джини ниже, чем на данном острове, поэтому на соседних островах уровень преступности ниже.

Ответ.

Индекс Джини равен $I_J = 1/3$.

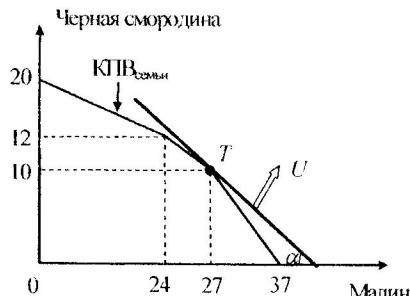
Задача 8

Построим кривых производственных возможностей (КПВ) всех членов семьи за один час работы. Считаем, что КПВ линейны и для разных членов семьи независимы друг от друга (поскольку иного в условии задачи не сказано).



Для построения КПВ отца, матери и дочери найдем на рисунке точки пересечения с осями координат (малина по оси абсцисс, черная смородина по оси ординат). Для отца координаты точек $A(0; 1)$ и $B(1,5; 0)$ очевидны. Для матери, т.к. она собирает малину в 2 раза быстрее отца, то КПВ проходит через точки $A(0; 1)$ и $D(3; 0)$. Для дочери, т.к. дочь собирает за час $10/4 = 2,5$ литра или малины или смородины, то КПВ проходит через точки $F(2,5; 0)$, $E(0; 2,5)$.

Поскольку в течение дня отец собирает ягоды 2 часа, мать – 8 часа и дочь – 4 часа, то индивидуальные КПВ за 1 день могут быть получены пропорциональным увеличением КПВ, построенных для 1 часа работы. Затем, сложив индивидуальных, получим совместную КПВ всей семьи за день работы (см. рисунки).



Рассмотрим альтернативную стоимость (AC) сбора 1 литра малины членами семьи:

для отца $AC \text{ 1 л малины} = 2/3 \text{ л смородины } (P_o = 2/3)$;

для матери $AC \text{ 1 л малины} = 1/3 \text{ л смородины } (P_m = 1/3)$;

для дочери $AC \text{ 1 л малины} = 1 \text{ л смородины } (P_d = 1)$.

Из условия задачи можно сделать вывод, что кривые безразличия семьи представляются прямыми линиями с наклоном $tg\alpha = 3/4$ по отношению к горизонтальной оси на рисунке (удовольствие от варенья из 1 л малины равно удовольствию от варенья из $3/4$ л смородины).

Значит, оптимальная с точки зрения максимизации полезности точка T на совместной КПВ имеет координаты 27 литров малины и 10 литров смородины. Альтернативная стоимость сбора 1 л малины отцом и матерью меньше, чем стоимость удовольствия от 1 л малины, поэтому они должны собирать малину. Альтернативная стоимость сбора 1 л малины дочерью больше, чем стоимость удовольствия от 1 л малины, поэтому дочь должна собирать смородину. Следовательно, за день отец соберет 3 л малины, мать соберет 24 л малины и дочь соберет 10 л смородины.

Ответ.

Отец соберет 3 л малины, мать 24 л малины, дочь 10 л смородины.

Олимпиада 2004 года

ОТВЕТЫ И КРАТКИЕ КОММЕНТАРИИ К ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

1. г) все вышеперечисленное.
Не важно, насколько задействован каждый пример экономических ресурсов.
2. в) может быть произведено при перераспределении ресурсов.
Ответы б) и г) не являются правильными, т.к. не только увеличение имеющихся ресурсов и не только развитие торговли с другими странами являются способами увеличения объема производства продукта.
3. б) способность тратить меньше рабочего времени на получение товаров и услуг.
4. в) растет, если растет ставка процента по вкладам в банках.
5. г) может быть и 30 рублей, и 70 рублей.
В данном случае величина альтернативной стоимости зависит от того, в какой день будет отдыхать почтальон: в будний или в праздничный.
6. б) цена импортного шоколада увеличится, и объем продаж увеличится.
Это произойдет из-за увеличения спроса на импортный шоколад поскольку данные товары являются заменителями.
7. г) возможно все перечисленное выше.
Закрытие подпольных заводов приведет к уменьшению предложения пиратских CD-дисков. Это, в свою очередь, вызовет изменение рыночного равновесия: рыночная цена на пиратские CD-диски вырастет, а объем продаж снизится, равновесная величина спроса также уменьшится. Спрос на дополнительные товары (проигрыватели CD-дисков) также упадет.
8. а) снижение цены и количества продаж товара Б.
Увеличение субсидии приведет к росту предложения товара А, это вызовет снижение его равновесной цены. Поскольку товар Б является заменителем товара А, спрос на товар Б снизится, что приведет к снижению и равновесной цены, и равновесного объема продаж на рынке товара Б.
9. в) 12 конфет и 4 чашки чая.
Кривые безразличия для абсолютных товаров имеют форму «уголков», причем точки А(8;2) и Б(6;8) лежат на одной кривой безразличия (первая координата – количество конфет, вторая – количество чашек чая). Отметим эти точки на графике и проведем через них кривую безразличия. Понятно, что вершина кривой будет в точке С(6;2), откуда следует, что товары дополняют друг друга в пропорции 6 конфет: 2 чашки чая или 3:1.
Остальные кривые безразличия получаются из нарисованной кривой параллельным переносом вдоль прямой $C = K/3$.