НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ И МЯГКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений

Том 7, номер 1, июнь 2012

Основан в 2006 году. Выходит 2 раза в год.

Учредитель: *ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет»*

Главный редактор:
170002, Садовый переулок, 35
Тел./факс: (4822) 58-54-10
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru

Ответственный секретарь:
170002, Садовый переулок, 35
Тел./факс: (4822) 58-57-43
E-mail: soldis@tversu.ru

МЕЖДУНАРОДНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

FUZZY SYSTEMS AND SOFT COMPUTING

SCIENTIFIC JOURNAL
of Russian Association for Fuzzy Systems and Soft Computing

Volume 7, Issue 1, June 2012

Founded in 2006. Published 2 times a year.

Founder: *Tver State University*

Editor-in-chief:
170002, Russia, Tver, Sadoviy, 35
Phone/fax: 7 (4822) 58-54-10
E-mail: Alexander.Yazenin@tversu.ru

Responsible Assistant:
170002, Russia, Tver, Sadoviy, 35
Phone/fax: 7 (4822) 58-57-43
E-mail: soldis@tversu.ru

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 519.237.8

УСЛОВНЫЕ НЕЧЕТКИЕ МЕРЫ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И НЕЧЕТКИЕ ВЕЛИЧИНЫ В РАМКАХ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПОДХОДА

Броневич А.Г.[*,**], **Розенберг И.Н.**[**]
[*]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва
[**]ОАО «Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт информатизации, автоматизации и связи на железнодорожном транспорте», г. Москва

Поступила в редакцию 18.06.2012, после переработки 22.06.2012.

В данной работе рассматриваются основные принципы теории нечетких мер в рамках вероятностного подхода, которые являются обобщением классических принципов традиционной теории вероятностей. В результате вводятся понятия условных нечетких мер, нечетких величин, а также их числовых характеристик.

In the paper we consider basic principles of the fuzzy measure theory in the framework of probabilistic approach. As a result we introduce notions of conditional fuzzy measures, fuzzy variables and its numerical characteristics.

Ключевые слова: нечеткая мера, нижние и верхние вероятности, нечеткие величины.
Keywords: fuzzy measure, lower and upper probabilities, fuzzy variables.

1. Введение

В статьях [1, 2] были подробно описаны и исследованы основные выпуклые семейства нечетких мер, которые можно интерпретировать, как нижние или верхние оценки вероятностей событий. Следующий шаг развития теории состоит во введении базовых понятий, аналогичных в теории вероятностей или аддитивной теории меры. В рамках данного исследования используется так называемый «интуитивный» подход, который в некотором смысле близок к модели неточных вероятностей, основанных на множествах вероятностных мер [3]. Аналогичные результаты могут быть получены из совсем других аксиоматических предпосылок, например, на основе согласованных нижних (верхних) предвидений[1] [4], а также принципов избежания потерь[2] и естественного продолжения[3], или согласованных нижних (верхних) средних по Кузнецову [5]. Однако, по всей видимости, предлагаемый подход является более наглядным и понятным, несмотря на то, что указанные принципы имеют экономическую интерпретацию [4].

[1]coherent lower (upper) previsions (в английском варианте)
[2]avoiding sure loss (в английском варианте)
[3]natural extension (в английском варианте)

Отметим, что до сих пор в теории нечетких мер или шире – в теории неточных вероятностей, нет единого мнения, как определять такие базовые понятия как условные нечеткие меры, понятие независимости, декартового произведения нечетких мер и понятий более высокого уровня. Это может объясняться до сих пор глубоко неизученным, тонким взаимодействием различных видов моделируемой неопределенности, включающих неполноту, неточность, случайность и противоречивость анализируемых данных. Кроме того, здесь нужно учитывать специфику логических построений, например, при переходе от безусловных к условным вероятностям, мы можем потерять важную информацию. Такие же свойства сопутствуют понятию независимости нечетких величин, т.е. в данном случае в силу неточности данных, мы не можем судить о независимости нечетких величин по их совместному распределению, а можем с некоторой точностью говорить о степени их зависимости. Такая ситуация приводит к аналогичным выводам, например, при поиске подходящей меры информативности по Шеннону (энтропии Шеннона) для функций доверия, а также для меры полной неопределенности [6, 7].

Неоднозначность определения, например, условной нечеткой меры может объясняться наличием дополнительной априорной информации, выбором статистической модели порождения нечеткой меры [8, 9], кроме того, в задачах, которые не имеют вероятностную интерпретацию, условные нечеткие меры могут иметь другой содержательный смысл, например, условной информативности относительно частичной информации. В этих случаях условные нечеткие меры могут выбираться совсем из других принципов [10].

С учетом этого, в статье обсуждаются и исследуются такие базовые понятия как условные нечеткие меры, функциональные нечеткие распределения, нечеткие величины, а также их числовые характеристики, принцип обобщения в теории нечетких мер. В основном данные понятия вводятся вначале для точных нижних вероятностей, а затем полученные результаты обобщаются на более широкие семейства нечетких мер. Также приводятся теоремы, обобщающие классические утверждения из теории вероятностей.

2. Основные понятия и определения

В дальнейшем мы будем использовать основные результаты и определения, рассмотренные в статьях [1, 2]. Наиболее важные определения и утверждения описываются ниже.

Функция множества g на конечной алгебре $\mathfrak{A} = 2^X$ конечного пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ называется нечеткой мерой, если она удовлетворяет условиям нормировки ($g(\emptyset) = 0$, $g(X) = 1$) и монотонности ($g(A) \leqslant g(B)$ при $A \subseteq B$). Множество всех нечетких мер обозначается M_0, M_P - множество всех вероятностных мер. Нечеткая мера $\neg g(A) = 1 - g(\bar{A})$ называется двойственной к нечеткой мере g. Отношение $g_1 \leqslant g_2$ означает, что $g_1(A) \leqslant g_2(A)$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.

В статьях [1, 2] были описаны и детально изучены следующие семейства нечетких мер, которые можно интерпретировать в качестве нижних оценок вероятностей:

$M_1 = \{g \in M_0 \,|\, \exists P \in M_P : g \leqslant P\}$ – множество всех нижних вероятностей на алгебре A. Здесь M_P - множество всех вероятностных мер на алгебре $\mathfrak{A}$;

$M_2 = \left\{g \in M_0 \,|\, \forall B \in \mathfrak{A},\ g(B) \neq 0 : g_B(A) = \frac{g(A\cap B)}{g(B)} \in M_1\right\}$ – множество всех обобщенных точных нижних вероятностей на алгебре $\mathfrak{A}$;

M_3 – множество всех нечетких мер на алгебре $\mathfrak{A}$, представляемых в виде выпуклой комбинации примитивных нижних вероятностей;

$M_4 = \{g \in M_0 \,|\, \forall A \in \mathfrak{A},\ \exists P \in M_P :\ g \leqslant P,\ g(A) = P(A)\}$ – множество всех точных нижних вероятностей на алгебре $\mathfrak{A}$;

M_5 – множество всех 2-монотонных мер на алгебре $\mathfrak{A}$, для которых выполняется неравенство: $g(A) + g(B) \leqslant g(A \cap B) + g(A \cup B)$ для любых $A, B \in \mathfrak{A}$;

M_6 – множество всех мер доверия на алгебре $\mathfrak{A}$.

В [2] было доказано, что данные выпуклые семейства нечетких мер являются идеалами, т.е. они замкнуты относительно операции перемножения нечетких мер. Имеют место следующие включения: $M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \left\{ \begin{array}{c} M_3 \\ M_4 \end{array} \right. \supset M_5 \supset M_6$, при этом, однако, $M_3 \not\subseteq M_4$ и $M_4 \not\subseteq M_3$.

3. Условные нечеткие меры

Пусть g – точная нижняя вероятность, определенная на конечной алгебре $\mathfrak{A} = 2^X$ конечного пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$. Рассмотрим, как определить условное распределение $g(A|B)$ оценок вероятностей в рамках вероятностного подхода.

Известно, что точная нижняя вероятность определяет семейство вероятностных мер $\Xi = \{P_i | g \leqslant P_i\}$, причем $g(A) = \inf\limits_{P_i \in \Xi} P_i(A)$. Далее можно ввести в рассмотрение условные вероятностные распределения $P_i(A|B)$, $P_i(B) \neq 0$, порожденные семейством вероятностных мер Ξ, а также точную нижнюю оценку вероятности $P(A|B)$ как

$$g(A|B) = \inf_{P_i \in \Xi | P_i(B) \neq 0} P_i(A|B). \tag{1}$$

С учетом этого нечеткую меру $g(A|B)$ естественно назвать условной нечеткой мерой, построенной по мере g.

Лемма 1. *Пусть* $\Xi = \{P = \alpha P_1 + (1-\alpha) P_2 | \alpha \in [0,1]\}$, *тогда*

$$g(A) = \min\{P_1(A), P_2(A)\} \text{ и } g(A|B) = \min\{P_1(A|B), P_2(A|B)\},$$

если $g(B) \neq 0$.

Доказательство. Первая формула леммы очевидным образом следует из способа определения точной нижней грани для данного случая. Докажем, что справедлива вторая формула леммы. Будем считать, что $A \subseteq B$. Тогда

$$g(A|B) = \inf_{\alpha \in [0,1]} \frac{\alpha P_1(A) + (1-\alpha) P_2(A)}{\alpha P_1(B) + (1-\alpha) P_2(B)}.$$

Дифференцируя выражение под знаком inf, получим

$$\frac{P_1(A) P_2(B) - P_1(B) P_2(A)}{\left[\alpha P_1(B) + (1-\alpha) P_2(B)\right]^2},$$

т.е. функция, стоящая под знаком inf, является монотонной на отрезке $\alpha \in [0,1]$. С учетом этого заключаем, что наибольшее значение данная функция будет принимать на концах отрезка, т.е. $g(A|B) = \min\{P_1(A|B), P_2(A|B)\}$, если $g(B) \neq 0$.⊠

Теорема 1. *Пусть* $\Xi = \left\{ P = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i P_i | \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0 \right\}$, *тогда*

$$g(A) = \min_{i=1,...,m} P_i(A) \text{ и } g(A|B) = \min_{i=1,...,m} P_i(A|B),\ g(B) \neq 0.$$

Теорема 1 – это, очевидно, следствие леммы 1.

Лемма 2. *Пусть g – точная нижняя вероятность, причем $g(B)+g(\bar{B}) = 1$, $g(B) \neq 0$, для некоторого $B \subseteq X$. Тогда $g(A|B) = \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$.*

Доказательство. Заметим, что в данном случае $P(B) = g(B)$ для любой вероятностной меры P, $P \geqslant g$. Поэтому $g(A|B) \geqslant \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$. Поскольку g – точная нижняя вероятность, то для любого $A \in \mathfrak{A}$ найдется вероятностная мера P, что $P \geqslant g$ и $P(A \cap B) = g(A \cap B)$. Таким образом, для данной вероятностной меры $P(A|B) = \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$. ⊠

Теорема 2. *Пусть g – точная нижняя вероятность, определенная на конечной алгебре $\mathfrak{A}$ пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ и $\Xi = \{P_i | g \leqslant P_i\}$. Тогда Ξ – выпуклое множество, имеющее конечное число экстремальных точек $P_1, P_2, ..., P_m$, т.е. оно представляется в виде:*

$$\Xi = \left\{ P = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i P_i | \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0 \right\}.$$

Доказательство. Семейство вероятностных мер Ξ является решением следующей системы неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{x_i \in A} P\{x_i\} \geqslant g(A), \\ \sum\limits_{i=1}^{n} P\{x_i\} = 1, \end{array} \right. \quad \text{для всех } A \subseteq X\ ,\ A \neq \emptyset.$$

Таким образом, теорема 2 является следствием теории [11], описывающей решения конечной системы линейных неравенств.⊠

Теперь ясно, как находить условные нечеткие распределения для точных нижних вероятностей. Рассмотрим, какие конструктивные результаты можно получить для 2-монотонных нечетких мер. Заметим, что для 2-монотонных мер множество Ξ описывается следующей теоремой [1].

Теорема 3. *Пусть нечеткая мера g является 2-монотонной и $\Xi = \{P | g \leqslant P\}$. Тогда экстремальными точками выпуклого множества Ξ являются вероятностные меры P_γ, где $\gamma = (i_1, i_2, .., i_n)$ – это перестановки множества чисел $\{1, 2, ..., n\}$, причем $P_\gamma\{x_{i_k}\} = g(A_k) - g(A_{k-1})$, где $A_k = \{x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}\}$, $k = 1, 2, .., n$, $A_0 = \emptyset$.*

Теорема 4.[4] *Пусть нечеткая мера g является 2-монотонной, тогда*

$$g(A|B) = \frac{g(A)}{g(A) + 1 - g(A \cup \bar{B})}$$

при $A \subseteq B$ и $g(B) \neq 0$.

Доказательство. Из формулы (1) следует, что

$$g(A|B) = \inf_{P \geqslant g} \frac{P(A)}{P(A) + P(B \cap \bar{A})}.$$

[4]Отметим, что такая же формула пересчета есть в [4] и [5]. Но в этих работах она получена из других аксиоматических предпосылок.

Таким образом, вероятностную меру P, $P \geqslant g$, требуется выбрать так, чтобы выражение под знаком inf принимало наименьшее значение. Обозначим $P(A) = \alpha$, $P(B \cap \bar{A}) = \beta$, тогда необходимо минимизировать функцию $f(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. При $\alpha, \beta > 0$, эта функция монотонно возрастает относительно α и монотонно убывает относительно β. Отсюда следует, что вероятностную меру P требуется выбрать таким образом, чтобы значение $P(A)$ было как можно меньше, а значение $P(B \cap \bar{A})$ как можно больше. С учетом этого, используя свойство 2-монотонности g, выберем вероятностную меру $P \geqslant g$ (см. теорему 14 из [1]), так чтобы $g(A) = P(A)$, $g(A \cup \bar{B}) = P(A \cup \bar{B})$. Тогда $P(B \cap \bar{A}) = 1 - P(A \cup \bar{B}) = 1 - g(A \cup \bar{B})$. Заметим, что $g(A)$ является точной нижней оценкой вероятности события A по семейству вероятностных мер $\Xi = \{P | g \leqslant P\}$, а $1 - g(A \cup \bar{B})$ – точной верхней оценкой вероятности события $B \cap \bar{A}$ по Ξ. Поэтому доказываемая формула истинна.$\boxtimes$

Следствие 1. *Пусть нечеткая мера q является 2-альтернирующей и $A \subseteq B$, тогда*

$$q(A|B) = \frac{q(A)}{q(A) + 1 - q(A \cup \bar{B})},$$

т.е. формула остается такой же, как и для 2-монотонных нечетких мер.

Доказательство. Требуется, используя отношение двойственности, построить двойственную нечеткую меру для $g(A|B)$.

$$q(A|B) = 1 - g(\bar{A} \cap B|B) = 1 - \frac{g(\bar{A} \cap B)}{g(\bar{A} \cap B) + 1 - g((\bar{A} \cap B) \cup \bar{B})}.$$

Заметим, что $(\bar{A} \cap B) \cup \bar{B} = \bar{A} \cup \bar{B} = \bar{A}$, так как $A \subseteq B$. Поэтому

$$q(A|B) = 1 - \frac{1 - q(A \cup \bar{B})}{1 - q(A \cup \bar{B}) + q(A)} = \frac{q(A)}{q(A) + 1 - q(A \cup \bar{B})}.$$

Следствие доказано. $\boxtimes$

Следствие 2. *Формулу из теоремы 4 для произвольного события $A \subseteq X$ можно обобщить следующим образом:*

$$g(A|B) = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cap B) + 1 - g(A \cup \bar{B})} = \frac{g(A \cap B)}{g(A \cap B) + \neg g(\bar{A} \cap B)}.$$

где $\neg g$ – это двойственная мера к нечеткой мере g.

Теорема 5. *Пусть g – 2-монотонная мера. Тогда мера $g(A|B)$ также будет 2-монотонной.*

Доказательство данной теоремы можно найти в [12]. Простое доказательство этого факта можно получить, используя теорию разностей [13]. Аналогичную теорему можно получить для мер доверия [14, 15]. Подчеркнем, что приведенное ниже доказательство основано на свойствах идеалов [2].

Вспомогательная лемма. *Пусть g – мера доверия, тогда функция множества $\mu(A) = \dfrac{g(A \cup \bar{B}) - g(A \cap B) - g(\bar{B})}{1 - g(B) - g(\bar{B})}$ является также мерой доверия при $g(B) + g(\bar{B}) < 1$.*

Доказательство. Очевидно, что функция множества μ удовлетворяет условию нормировки. Докажем, что это мера доверия. Пусть μ – мера доверия, тогда $g(A) = \sum\limits_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C \rangle}(A)$. Следовательно,

$$q(A) = g(A \cup \bar{B}) - g(A \cap B) - g(\bar{B}) = \sum_{C \subseteq X} m(C)\eta_{\langle C \rangle}(A \cup \bar{B}) -$$

$$-\sum_{C\subseteq X} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(\bar{B}) - \sum_{C\subseteq X} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(A\cap B).$$

Поскольку $\eta_{\langle C\rangle}(A\cup\bar{B}) = \eta_{\langle C\rangle}(\bar{B})$ при $C\subseteq\bar{B}$

$$\eta_{\langle C\rangle}(A\cup\bar{B}) = \begin{cases} 1, & C\subseteq A\cup\bar{B}, \\ 0, & C\nsubseteq A\cup\bar{B}, \end{cases} = \begin{cases} 1, & C\cap B\subseteq A, \\ 0, & C\cap B\nsubseteq A, \end{cases} = \eta_{\langle C\cap B\rangle}(A),$$

а также $\eta_{\langle C\rangle}(A\cap B) = \begin{cases} \eta_{\langle C\rangle}(A), & C\subseteq B, \\ 0, & C\nsubseteq B, \end{cases}$ получим, что

$$q(A) = \sum_{C\subseteq X|C\nsubseteq\bar{B}} m(C)\eta_{\langle C\cap B\rangle}(A) - \sum_{C\subseteq B} m(C)\eta_{\langle C\rangle}(A) = \sum_{C\subseteq X\left|\substack{C\nsubseteq\bar{B},\\ C\nsubseteq B}\right.} m(C)\eta_{\langle C\cap B\rangle}(A).$$

Таким образом, функция множества q представляется в виде линейной комбинации примитивных мер возможности с неотрицательными коэффициентами, т.е. за счет нормировки мы получим нечеткую меру μ, являющуюся мерой доверия.⊠

Теорема 6. *Пусть g – мера доверия. Тогда мера $g(A|B)$ также будет мерой доверия.*

Доказательство. Возможно два случая. Пусть $g(B)+g(\bar{B})=1$, тогда для любой вероятностной меры P, $P\geqslant g$, будет выполняться $g(B)=P(B)$. Это означает, что формула для вычисления $g(A|B)$ примет вид $g(A|B)=\dfrac{g(A\cap B)}{g(B)}$. Нетрудно заметить, что для данного случая мера $g(A|B)$ является мерой доверия.

Рассмотрим второй случай, когда $g(B)+g(\bar{B})<1$.

$$g(A|B) = \frac{g(A\cap B)}{g(A\cap B)+1-g(A\cup\bar{B})} = \frac{g(A\cap B)}{\left(1-g(\bar{B})\right)\left(1-\frac{g(A\cup\bar{B})-g(A\cap B)-g(\bar{B})}{1-g(\bar{B})}\right)} =$$

$$= \frac{g(A\cap B)}{1-g(\bar{B})}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{g(A\cup\bar{B})-g(A\cap B)-g(\bar{B})}{1-g(\bar{B})}\right)^n.$$

Видно, что в пределе, используя операции выпуклой суммы и произведения для нечетких мер доверия μ из вспомогательной леммы и $g_B(A)=\dfrac{g(A\cap B)}{g(B)}$, можно выразить нечеткую меру $g(A|B)$. Следовательно, она также является мерой доверия. ⊠

Лемма 3. *Пусть g – нижняя вероятность и $g(A|B)=\dfrac{g(A)}{g(A)+1-g(A\cup\bar{B})}$, $A\subseteq B$, $g(B)\neq 0$. Тогда для любой вероятностной меры P, $P\geqslant g$, будет выполняться неравенство: $g(A|B)\leqslant P(A|B)$.*

Доказательство. Ясно, что $P(A|B)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B\backslash A)}$, при этом $P(A)\geqslant g(A)$ и $P(B\backslash A)\leqslant 1-g(A\cup\bar{B})$. Кроме того, функция $f(\alpha,\beta)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ монотонно возрастает по α и монотонно убывает по β при $\alpha,\beta>0$. Из этого делаем вывод, что $g(A|B)\leqslant P(A|B)$.⊠

Смысл леммы 3 в том, что формулу для оценок условных вероятностей можно использовать на более широком семействе нечетких мер, включающих все нижние вероятности, а также верхние вероятности. При этом в общем случае будут получаться менее точные оценки, например, для точных нижних вероятностей по сравнению с формулой (1).

Лемма 4. *Пусть g – точная нижняя вероятность и $g(A|B) = \inf\limits_{P \geqslant g} \frac{P(A)}{P(B)}$, $A \subseteq B$, $g(B) \neq 0$. Тогда $g(A) \geqslant g(A|B)\, g(B)$.*

Доказательство. Поскольку g – точная нижняя вероятность, то выберем вероятностную меру P таким образом, что $P \geqslant g$ и $P(A) = g(A)$. В этом случае $g(B) \leqslant P(B)$, а также по определению $g(A|B) \leqslant P(A|B)$. Поэтому из тождества $P(A) = P(A|B)\, P(B)$ следует неравенство $g(A) \geqslant g(A|B)\, g(B)$.⊠

Теорема 7. *Пусть g – точная нижняя вероятность на $\mathfrak{A}$ и $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ – это разбиение пространства X, т.е. $H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_k = X$ и $H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тогда $g(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} g(A|H_i)\, g(H_i)$, если $g(H_i) > 0$.*

Доказательство. Поскольку g – точная нижняя вероятность, то она является супераддитивной для несовместных событий. Поэтому $g(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{k} g(A \cap H_i)$. Далее пользуясь неравенством из леммы 4 $g(A \cap H_i) \geqslant g(A|H_i)\, g(H_i)$, получим требуемое неравенство.⊠

Возникает вопрос, в каких случаях формула полной вероятности дает более точные оценки вероятностей. Ответ на данный вопрос дают следующие теоремы.

Теорема 8. *Пусть $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ – это разбиение пространства X и $A \in \mathfrak{A}$ - произвольное событие. Рассмотрим также разбиение $\{B_1, B_2, ..., B_k, B_{k+1}, ..., B_{2k}\}$, где $B_i = A \cap H_i$ при $i \leqslant k$, и $B_{i+k} = \bar{A} \cap H_i$ при $i \leqslant k$. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{k} g(A|H_i)\, g(H_i) \leqslant \sum_{i=1}^{2k} g(A|B_i)\, g(B_i). \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, что $g(A|H_i)g(H_i) \leqslant g(A \cap H_i) = g(B_i)$ по лемме 4. Кроме того, $g(A|B_i) = 1$ при $i = 1, 2, ..., k$, так как $B_i \subseteq A$ и $g(A|B_i) = 0$ при $i = k+1, k+2, ..., 2k$, поскольку$B_i \cap A = \emptyset$. Поэтому правая часть неравенства (2) преобразуется к виду $\sum\limits_{i=1}^{k} g(B_i)$. Теперь, используя оценку $g(A|H_i)g(H_i) \leqslant g(B_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, убеждаемся в справедливости неравенства (2).⊠

Следствие теоремы 8. *Пусть $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ – это разбиение пространства X, причем $A = H_1 \cup H_2 \cup ... \cup H_m$,$m \leqslant k$. Тогда неравенство полной вероятности имеет вид: $g(A) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} g(H_i)$.*

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ – это конечные алгебры событий, определенные на множестве A, и $\Omega_1 = \{H_1, H_2, ..., H_k\}$, $\Omega_2 = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ – это разбиения A, порождающие данные алгебры. Тогда, если $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, то $\sum\limits_{i=1}^{k} g(H_i) \geqslant \sum\limits_{i=1}^{m} g(B_i)$, т.е. разбиение Ω_1 дает более точную оценку вероятности события A по точной нижней вероятности g.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$, то любой элемент $H \in \mathfrak{A}_1$ является объединением элементов разбиения Ω_2. Поэтому множества B_i можно занумеровать таким образом, чтобы

$$H_1 = \bigcup_{i=i_0+1}^{i_1} B_i,\ H_2 = \bigcup_{i=i_1+1}^{i_2} B_i, \ldots,\ H_k = \bigcup_{i=i_{k-1}+1}^{i_k} B_i,$$

где $0 < i_0 < i_1 < ... < i_k$. Пользуясь супераддитивностью меры g для несовместных событий, получим

$$g(H_n) = g\left(\bigcup_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} B_i\right) \geqslant \sum_{i=i_{n-1}+1}^{i_n} g(B_i).$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{k} g(H_i) \geqslant \sum_{i=1}^{m} g(B_i).$$

⊠

4. Условные нечеткие меры при дополнительных ограничениях

В некоторых случаях оказывается возможным уточнить условное распределение оценок вероятностей, если имеется дополнительная априорная информация. Покажем, как это уточнение производится, если при расчете $g(A|B)$ каким-то образом получена точная оценка вероятности $P(B)$. Пусть g является 2-монотонной нечеткой мерой и $P(B \cup C) = g(B \cup C)$, $P(C) = g(C)$, причем $C \cap B = \emptyset$. В этом случае можно вычислить вероятность $P(B) = P(B \cup C) - P(C) = g(B \cup C) - g(C)$. Будем вычислять $g(A|B)$ при $A \subseteq B$, используя формулу:

$$g(A|B) = \inf_{P\left|\substack{P \geqslant g,\, P(C)=g(C),\\ P(B \cup C)=g(B \cup C)}\right.} \frac{P(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}.$$

Очевидно, что $P(A \cup C) \geqslant g(A \cup C)$, поэтому $g(A|B) \geqslant \dfrac{g(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}$. Покажем, что в последнем неравенстве можно поставить знак равенства. Действительно, поскольку нечеткая мера g является 2-монотонной, то можно найти такую вероятностную меру P, $P \geqslant g$, что $P(C) = g(C)$, $P(A \cup C) = g(A \cup C)$ и $P(B \cup C) = g(B \cup C)$.

Лемма 5. *Пусть g – 2-монотонная нечеткая мера на $\mathfrak{A} = 2^X$. Тогда нечеткая мера $g(A|B) = \dfrac{g(A \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}$, на алгебре $\mathfrak{A}_B = 2^B$, является 2-монотонной.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq B$ найдется такая вероятностная мера P, $P \geqslant g$, что $g(A_1|B) = P(A_1|B)$, $g(A_2|B) = P(A_2|B)$. Поскольку мера g является 2-монотонной и $C \subseteq A_1 \cup C \subseteq A_2 \cup C \subseteq B \cup C$, то найдется вероятностная мера $P \geqslant g$, что $P(C) = g(C)$, $P(A_1 \cup C) = g(A_1 \cup C)$, $P(A_2 \cup C) = g(A_2 \cup C)$ и $P(B \cup C) = g(B \cup C)$, откуда уже следует требуемое. ⊠

Замечание. Фактически в данном разделе рассматривалось правило пересчета $g(A|B) = \dfrac{g(A \cap B \cup C) - g(C)}{g(B \cup C) - g(C)}$ при $C \cap B = \emptyset$. Это правило объединяет в себе такие известные правила [9, 16], как $g(A|B) = \dfrac{g(A \cap B)}{g(B)}$ при $C = \emptyset$, и $g(A|B) = \dfrac{g(A \cup \bar{B}) - g(\bar{B})}{1 - g(\bar{B})}$ при $C = \bar{B}$.

5. Функциональные нечеткие распределения

Далее будем рассматривать нечеткую меру g на на алгебре $\mathfrak{A} = 2^{X\times Y}$ декартового произведения $X\times Y$ конечных пространств X и Y. В этом случае значения нечеткой меры на всех подмножествах $X \times Y$. и, будем предполагать, отражают некоторую функциональную зависимость между X и Y. Эту зависимость можно исследовать, используя понятие условной нечеткой меры. Пусть произошло событие $A \in \mathfrak{A}_X$, где $\mathfrak{A}_X = 2^X$, оценим значение условной вероятности наступления события $B \in \mathfrak{A}_Y$, где $\mathfrak{A}_Y = 2^Y$, предполагая, что g – точная нижняя вероятность. Ясно, что

$$g_2(B|A) = \inf_{P\geqslant g} \frac{P(A\times B)}{P(A\times Y)}, A \in \mathfrak{A}_X, B \in \mathfrak{A}_Y. \tag{3}$$

Если нет никакой другой априорной информации, т.е. в пространстве X наступает достоверное событие, то мы получаем маргинальное распределение оценок вероятностей пространства Y:

$$g_2(B) = g_2(B|X) = g(X \times B).$$

Поскольку пространства X и Y являются равносильными, мы можем аналогичным образом получить оценку условной вероятности $g_1(A|B)$, что произошло событие $A \in \mathfrak{A}_X$ при условии наступления $B \in \mathfrak{A}_Y$

$$g_1(A|B) = \inf_{P\geqslant g} \frac{P(A\times B)}{P(X\times B)}, A \in \mathfrak{A}_X, B \in \mathfrak{A}_Y, \tag{4}$$

а также маргинальное распределение

$$g_1(A) = g_1(A|Y) = g(A \times Y).$$

В том случае, когда мера g является 2-монотонной, формулы (3) и (4) преобразуются к виду:

$$g_2(B|A) = \frac{g(A\times B)}{g(A\times B) + 1 - g(A\times B \cup \bar{A}\times Y)}, \tag{3*}$$

$$g_1(A|B) = \frac{g(A\times B)}{g(A\times B) + 1 - g(A\times B \cup X\times \bar{B})}. \tag{4*}$$

Рассмотрим задачу нахождения маргинального распределения $g_2(B)$, $B \in \mathfrak{A}_Y$, если известны маргинальное распределение $g_1(A)$, $A \in \mathfrak{A}_X$, и значения $g_2(B|\{x_i\}) = g_{x_i}(B)$ только в точках $x_i \in X$. В этом случае, используя принцип точной нижней вероятности (или принцип естественного продолжения [12]), получим

$$g_2(B) = g(X\times B) = \inf_{\substack{P_{x_i} \geqslant g_{x_i} \\ P_1 \geqslant g_1}} \sum_{i=1}^{n} P_{x_i}(B) P_1\{x_i\}, \tag{5}$$

где $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

В том случае, когда нечеткие меры g_{x_i} являются точными нижними вероятностями, формулу (5), очевидно, можно преобразовать следующим образом:

$$g_2(B) = \inf_{P_1\geqslant g_1} \sum_{i=1}^{n} g_2(B|\{x_i\}) P_1\{x_i\}.$$

Последнее выражение можно рассматривать, как нижнюю оценку математического ожидания нечеткой величины $g_2(B|\{x_i\})$, $x_i \in X$, по нечеткой мере g_1. Речь об этом пойдет в следующих разделах данного статьи.

6. Принцип обобщения в рамках понятия нижней (верхней) вероятности [5]

Пусть g_X – точная нижняя вероятность на $\mathfrak{A}_X = 2^X$ и $\Xi_X = \{P_X | P_X \geqslant g_X\}$ – семейство вероятностных мер, индуцированное нечеткой мерой g_X. Кроме того, рассмотрим функциональное отображение f из пространства X в конечное пространство Y. Покажем, каким образом в этом случае порождается нечеткая мера g_Y с помощью функционального отображения f. Пусть $P_X \geqslant g_X$, тогда вероятностная мера P_X порождает вероятностную меру P_Y, удовлетворяющую условиям:

$$P_Y(B) = P_X(f^{-1}(B)), \tag{6}$$

где $B \in \mathfrak{A}_Y$ и $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$. Таким образом, мы можем рассматривать функциональное отображение $P_Y = f(P_X)$ вероятностной меры P_X на вероятностную меру P_Y, удовлетворяющую условиям (6). Аналогичным образом можно рассмотреть функциональное отображение f семейства вероятностных мер Ξ_X на Ξ_Y: $\Xi_Y = \{f(P_X) | P_X \geqslant g_X\}$. С учетом этого можно определить нечеткую меру g_Y как точную нижнюю оценку вероятности по семейству вероятностных мер Ξ_Y:

$$g_Y(B) = \inf_{P_Y \in \Xi_Y} P_Y(B) = \inf_{P_X | P_X \geqslant g_X} P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B)),$$

где $B \in \mathfrak{A}_Y$. Таким образом, мы получили формулу обобщения

$$g_Y(B) = g_X(f^{-1}(B)), B \in \mathfrak{A}_Y,$$

которую можно использовать в общем случае для любых нечетких мер.

Далее рассмотрим несколько утверждений, которые позволяют установить, какие свойства нечетких мер сохраняются после действия функциональных отображений.

Утверждение 1. *Пусть g_X – нечеткая мера на $\mathfrak{A}_X$ и $f : X \to Y$ – функциональное отображение, тогда $g_Y = f(g_X)$ - также нечеткая мера.*

Доказательство. Требуется проверить аксиомы нормировки и монотонности нечеткой меры:

1) $g_Y(\emptyset) = g_X(f^{-1}(\emptyset)) = g_X(\emptyset) = 0$;

2) $g_Y(Y) = g_X(f^{-1}(Y)) = g_X(X) = 1$;

3) пусть $A \subseteq B \subseteq Y$, тогда $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$ и $g_Y(A) = g_X(f^{-1}(A)) \leqslant g_X(f^{-1}(B)) = g_Y(B)$, т.е. условие монотонности $g_Y(A) \subseteq g_Y(B)$ при $A \subseteq B$ выполняется. Утверждение доказано. ⊠

Утверждение 2. *Пусть g_X и q_X – нечеткие меры на $\mathfrak{A}_X$ и $f : X \to Y$ – функциональное отображение, причем $g_X \leqslant q_X$. Тогда $g_Y = f(g_X) \leqslant q_Y = f(q_X)$.*

[5] Принцип обобщения хорошо известен в теории меры (в частности, в теории вероятностей), а также теории возможностей [16]. Целью данного раздела было показать, что этот принцип естественно получается в рамках вероятностного подхода в теории нечетких мер.

Доказательство. Требуется показать, что $g_Y(B) \leqslant q_Y(B)$ для любого $B \in \mathfrak{A}_Y$. По определению последнее неравенство записывается как: $g_X(f^{-1}(B)) \leqslant q_X(f^{-1}(B))$, т.е. $g_Y \leqslant q_Y$ следует из $g_X \leqslant q_X$. ⊠

Утверждение 3. Пусть $\mu_X = \alpha g_X + \beta q_X$, где g_X и q_X – нечеткие меры на $\mathfrak{A}_X$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \geqslant 0$ и $f : X \to Y$ – функциональное отображение, тогда $\mu_Y = \alpha g_Y + \beta q_Y$, где $g_Y = f(g_X)$, $q_Y = f(q_X)$, $\mu_Y = f(\mu_X)$.

Доказательство. Доказываемое тождество можно переписать в виде

$$\mu_X(f^{-1}(B)) = \alpha g_X(f^{-1}(B)) + \beta q_X(f^{-1}(B),$$

которое выполняется для любого события $B \in \mathfrak{A}_Y$. Но это тождество, очевидно, выполняется из условия утверждения. ⊠

Утверждение 4. *Пусть g_X – нечеткая мера на $\mathfrak{A}_X$ и $\neg g_X$ – двойственная к g_X мера, $f : X \to Y$ – функциональное отображение. Тогда $f(\neg g_X) = \neg f(g_X)$.*

Доказательство. Требуется доказать, что $f(\neg g_X)(B) = \neg f(g_X)(B)$ для любого $B \in \mathfrak{A}_Y$. Действительно, $f(\neg g_X)(B) = \neg g_X(f^{-1}(B)) = 1 - g_X\left(\overline{f^{-1}(B)}\right) = 1 - g_X(f^{-1}(\bar{B})) = 1 - f(g_X)(\bar{B}) = \neg f(g_X)(B)$. ⊠

Утверждение 5. *Пусть g_X – нечеткая мера и $f : X \to Y$ – функциональное отображение, $g_Y = f(g_X)$. Тогда*

1) если g_X – примитивная мера, то g_Y – примитивная мера;

2) если g_X – нижняя (верхняя) вероятность, то g_Y – нижняя (верхняя) вероятность;

3) если g_X – обобщенная точная нижняя вероятность, то g_Y – обобщенная точная нижняя вероятность;

4) если $g_X \in M_3$, то $g_Y \in M_3$;

5) если g_X – точная нижняя (верхняя) вероятность, то g_Y – точная нижняя (верхняя) вероятность;

6) если g_X – 2-монотонная (2-альтернирующая) мера, то g_Y – 2-монотонная (2-альтернирующая) мера;

7) если g_X – мера доверия (правдоподобия), то g_Y – мера доверия (правдоподобия);

8) если g_X – мера необходимости (возможности), то g_Y – мера необходимости (возможности);

9) если g_X – вероятностная мера, то g_Y – вероятностная мера.

Доказательство.

1) Если g_X – примитивная мера, то $g_X(A) \in \{0, 1\}$, $A \in \mathfrak{A}_X$, поэтому и $g_Y(B) = g_X(f^{-1}(B)) \in \{0, 1\}$, т.е. g_Y также является примитивной мерой.

2) Пусть g_X – нижняя вероятность. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что $P_X \geqslant g_X$. Пусть $P_Y = f(P_X)$, тогда согласно утверждению 2 $P_Y \geqslant g_Y$, т.е. g_Y - это нижняя вероятность.

3) Пусть g_X – обобщенная точная вероятность. Тогда согласно определению функции множества $g_X(A|B) = \dfrac{g_X(A \cap B)}{g_X(B)}$ являются нижними вероятностями для любых $B \in \mathfrak{A}_X$, $g_X(B) \neq 0$. Рассмотрим функцию множества

$$g_Y(A|B) = \frac{g_Y(A \cap B)}{g_Y(B)} = \frac{g_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{g_X(f^{-1}(B))} = g_X(f^{-1}(A)|f^{-1}(B)).$$

Таким образом, $g_X(*|B) = g_Y(*|f(B))$, т.е. это свойство следует из 2) и того, что $q_Y(A) = \dfrac{g_Y(A \cap B)}{g_Y(B)} = \dfrac{g_X(f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B))}{g_X(f^{-1}(B))}$, т.е. g_Y – обобщенная точная нижняя вероятность по свойству 2).

4) Доказывается совершенно аналогично, как и (5).

5) Пусть g_X – точная нижняя вероятность и $B \in \mathfrak{A}_Y$. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что $P_X \geqslant g_X$ и $P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B))$. Тогда вероятностная мера $P_Y = f(P_X)$ будет удовлетворять необходимым условиям: $P_Y(B) = g_Y(B)$ и $P_Y \geqslant g_Y$, т.е. g_Y – точная нижняя вероятность.

6) Пусть g_X – 2-монотонная мера и $A \subseteq B \subseteq Y$. Выберем вероятностную меру P_X таким образом, что $P_X \geqslant g_X$ и $P_X(f^{-1}(A)) = g_X(f^{-1}(A))$, $P_X(f^{-1}(B)) = g_X(f^{-1}(B))$. Это можно сделать, так как $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. Далее замечаем, что вероятностная мера $P_Y = f(P_X)$ удовлетворяет всем необходимым условиям: $P_Y \geqslant g_Y$, $P_Y(A) = g_Y(A)$ и $P_Y(B) = g_Y(B)$, т.е. g_Y – это 2-монотонная мера.

7) Пусть g_X – мера доверия, тогда ее можно представить в виде выпуклой комбинации примитивных мер необходимости $g_X = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i N_{X,i}$, где $\alpha_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ и $N_{X,i}$ - примитивные меры необходимости. Пусть $N_{Y,i} = f(N_{X,i})$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда, используя доказанные свойства 1) и 6) теоремы, а также утверждение 5, получим $g_Y = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i N_{Y,i}$, т.е. g_Y является мерой доверия, поскольку представляется в виде выпуклой комбинации примитивных мер необходимости $N_{Y,i}$.

Полностью доказать утверждение для верхних вероятностей, точных верхних вероятностей, 2-альтернирующих мер, мер правдоподобия и возможности можно, используя свойства 2), 3), 4), 5), 6), отношение двойственности нечетких мер, а также утверждение 4.

8) Пусть g_X – мера необходимости, тогда для любых $A, B \in \mathfrak{A}_X$ $g_X(A \cap B) = \min(g_X(A), g_X(B))$. Проверим, будет ли это свойство выполняться для меры $g_Y = f(g_X)$. Пусть $A, B \in \mathfrak{A}_Y$, тогда $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, поскольку f – функциональное отображение. Поэтому $g_Y(A \cap B) = g_X(f^{-1}(A \cap B)) = \min\left[g_X(f^{-1}(A)), g_X(f^{-1}(B))\right] = \min(g_Y(A), g_Y(B))$, т.е. g_Y – мера необходимости.

9) Следует из принципа обобщения для вероятностных мер. ⊠

Замечание 1. Утверждение 5 фактически отражает следующий факт: если нечеткая мера g_X является примитивной, или нижней вероятностью, ...и т.д., на алгебре событий $\mathfrak{A}_1$, то она будет обладать тем же свойством и на алгебре $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$. Покажем, как получается алгебра $\mathfrak{A}_2$ при помощи функционального соответствия f:

1) f индуцирует алгебру $\mathfrak{A}_Y = f(\mathfrak{A}_1)$ пространства Y;

2) рассмотрим обратное отображение $\mathfrak{A}_2 = f^{-1}(\mathfrak{A}_Y)$. Поскольку f – функциональное отображение, алгебра $\mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1$.

Замечание 2. Ясно, что не любое свойство сохраняется при функциональном отображении. Так, например, любую противоречивую меру можно отобразить на непротиворечивую меру, в частности, на примитивную вероятностную меру. Для этого рассмотрим функциональное отображение пространства $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ на пространство $Y = \{y\}$ по правилу $f(x_i) = y$. В этом случае любая нечеткая мера g_X на $\mathfrak{A}_X$ отображается на примитивную вероятностную меру g_Y пространства Y.

8. Нечеткие величины

Аналогичным образом, как и в теории вероятностей, можно определить понятие нечеткой величины. При этом случайную величину можно рассматривать как частный случай нечеткой величины[6].

Определение 1. Пусть $X = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ – нечеткое пространство, на котором определена нечеткая мера g_X. Тогда любая вещественная функция $f(x)$, $x \in X$, называется нечеткой величиной $\xi = f(x)$.

Ясно, что нечеткая величина определяет распределение нечеткости на вещественной оси. При этом достаточно рассматривать это распределение на множестве $Y = f(X)$. Таким образом, изучать нечеткую величину ξ можно, исследуя нечеткую меру $g_Y = f(g_X)$.

Пусть мера g_X – является точной нижней вероятностью, тогда g_Y – это тоже точная нижняя вероятность. Таким образом, значение $g_Y(A) = g_X(\xi \in A)$ дает точную нижнюю оценку вероятности $P(\xi \in A)$. Другими словами, нечеткая величина ξ отличается от обычной случайной величины тем, что точный закон ее распределения неизвестен, а известны лишь оценки вероятностей. При этом, если g_Y – нижняя вероятность, то величина ξ имеет вероятностный закон распределения, который описывается вероятностной мерой из семейства вероятностных мер $\Xi = \{P | P \geqslant g_Y\}$. С учетом этого, для нечеткой величины ξ можно ввести в рассмотрение количественные оценки математического ожидания, моментов различных порядков, дисперсии следующим образом:

1) величина $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P\in\Xi} \sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i$ называется точной нижней оценкой математического ожидания нечеткой величины ξ[7].

2) величина $\overline{M}[\xi] = \sup\limits_{P\in\Xi} \sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i$ называется точной верхней оценкой математического ожидания нечеткой величины ξ.

3) $\underline{M}[\xi^n]$, $\overline{M}[\xi^n]$ – соответственно точные верхняя и нижняя оценки момента n-того порядка;

4) величина $\overline{D}[\xi] = \sup\limits_{P\in\Xi} \left(\sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i^2 - \left[\sum\limits_{i=1}^{m} P\{y_i\}y_i \right]^2 \right)$ называется точной верхней оценкой дисперсии нечеткой величины ξ.

Следующие результаты дают представление, как находить указанные характеристики для простейших семейств вероятностных мер Ξ.

Утверждение 6. *Пусть нечеткая величина ξ описывается семейством вероятностных мер $\Xi = \{P = \alpha P_1 + \beta P_2 | \alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geqslant 0\}$. Будем считать, что вероятностная мера P_i, $i = 1, 2$, описывает вероятностное распределение случайной величины ξ_i, тогда $\underline{M}[\xi] = \min\{M[\xi_1], M[\xi_2]\}$.*

Доказательство. Пусть $P = \alpha P_1 + (1-\alpha)P_2$, где $\alpha \in [0, 1]$. Тогда

$$\underline{M}[\xi] = \inf_{\alpha\in[0,1]} \sum_{i=1}^{m} (\alpha P_1\{y_i\} + (1-\alpha)P_2\{y_i\})\, y_i =$$

$$= \inf_{\alpha\in[0,1]} (\alpha M[\xi_1] + (1-\alpha)M[\xi_2]) = \min\{M[\xi_1], M[\xi_2]\}.$$

Утверждение доказано.⊠

[6] В [18] не делается различия между нечеткой величиной и случайной величиной. В некотором смысле рассматриваемые здесь нечеткие величины можно считать «неточно заданными» случайными величинами.

[7] Другой более общей моделью неточных вероятностей является задание нижних (верхних) оценок математических ожиданий функций [4, 5]. Хотя эта модель позволяет делать более точные выводы, но, по-видимому, наиболее оптимальная модель должна быть результатом компромисса между точностью и сложностью модели.

Следствие. *Пусть нечеткая величина* ξ *описывается семейством вероятностных мер* $\Xi = \left\{ P = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i P_i | \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,\, \alpha_i \geqslant 0 \right\}$. *Введем также в рассмотрение случайные величины* ξ_i, *описываемые вероятностными распределениями* P_i, *тогда* $\underline{M}[\xi] = \min\limits_{i=1,\ldots,k} \{M[\xi_i]\}$.

Утверждение 7. *Пусть нечеткая величина* ξ *описывается семейством вероятностных мер* $\Xi = \{P = (\alpha + 0,5)P_1 + (0,5 - \alpha)P_2 | \, |\alpha| \leqslant 0,5\}$. *Введем также в рассмотрение случайные величины* ξ_i, *описываемые вероятностными распределениями* P_i, *тогда*

1) $\overline{D}[\xi] = \max\{D[\xi_1], D[\xi_2]\}$, *если* $|D[\xi_1] - D[\xi_2]| \geqslant (M[\xi_1] - M[\xi_2])^2$;

2) $\overline{D}[\xi] = \dfrac{(D[\xi_1] - D[\xi_2])^2}{4\,(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2} + \frac{1}{4}\,(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2 + \frac{1}{2}\,(D[\xi_1] + D[\xi_2])$, *в противном случае.*

Доказательство. По определению $\overline{D}[\xi] = \sup\limits_{\alpha \in [-0,5,0,5]} Q(\alpha)$, где

$$Q(\alpha) = \sum_{i=1}^{m} \left((\alpha + 0,5)P_1\{y_i\} + (-\alpha + 0,5)P_2\{y_i\}\right) y_i^2 =$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{m} \left((\alpha + 0,5)P_1\{y_i\} + (-\alpha + 0,5)P_2\{y_i\}\right) y_i \right]^2.$$

Упрощая $Q(\alpha)$, получим

$$Q(\alpha) = -\alpha^2 \left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2 + \alpha \left(D[\xi_1] - D[\xi_2]\right) +$$

$$+0,5 \left(D[\xi_1] - D[\xi_2]\right) + 0,25 \left(M[\xi_1] + M[\xi_2]\right)^2.$$

Ясно, что многочлен $Q(\alpha)$ в точке $\alpha = \dfrac{D[\xi_1] - D[\xi_2]}{2\,(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2}$ имеет максимум. Учитывая ограничения, накладываемые на α, и подставляя α в выражение для $Q(\alpha)$, легко проверить справедливость утверждения.⊠

Формулу утверждения 7 можно упростить следующим образом.

Следствие утверждения 7. *Пусть выполняются условия, указанные в утверждении 7, причем* $D[\xi_1] \geqslant D[\xi_2]$, *тогда*

$$D[\xi] = 0,25\,(k-1)^2 \left(M[\xi_1] - M[\xi_2]\right)^2 + D[\xi_1],$$

где $k = \min\left\{ \dfrac{D[\xi_1] - D[\xi_2]}{(M[\xi_1] - M[\xi_2])^2}, 1 \right\}$.

Рассмотрим, как находить точные нижние и верхние оценки математического ожидания, если нечеткая величина описывается 2-монотонной мерой. Для этого воспользуемся следующей вспомогательной леммой.

Лемма 6. *Пусть* $f(x)$ *– неотрицательная измеримая (интегрируемая) функция на вероятностном пространстве* $(X, P, \mathfrak{A})$, *причем* $h = \sup\limits_{x \in X} f(x)$. *Тогда*

$$\int\limits_X f(x) dP(x) = \int\limits_0^h P\{F(\alpha)\}\, d\alpha, \tag{7}$$

где $F(\alpha) = \{x \in X | f(x) > \alpha\}$.

Доказательство. Докажем эту лемму вначале для простых измеримых функций. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ – это конечное множество значений, которое принимает простая измеримая функция, $A_i = \{x \in X | f(x) = \alpha_i\}$. Тогда согласно определению интеграла по Лебегу $\int\limits_X f(x)dP(x) = \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i P\{A_i\}$. Пусть $\alpha_0 = 0$, тогда $\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\} d\alpha = \sum\limits_{i=1}^m \int\limits_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} P\{F(\alpha)\} d\alpha$. В последнем выражении $P\{F(\alpha)\} = P\{F(\alpha_i)\}$ при $\alpha \in (\alpha_{i-1}, \alpha_i]$. Поэтому

$$\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\} d\alpha = \sum_{i=1}^m P\{F(\alpha_i)\}(\alpha_i - \alpha_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^m P\{F(\alpha_i)\}\alpha_i - \sum_{i=0}^{m-1} P\{F(\alpha_{i+1})\}\alpha_i =$$

$$= P\{F(\alpha_m)\}\alpha_m + \sum_{i=1}^m (P\{F(\alpha_i)\} - P\{F(\alpha_{i+1})\})\alpha_i - P\{F(\alpha_1)\}\alpha_0.$$

Поскольку $P\{F(\alpha_m)\} = P\{A_m\}$, $F(\alpha_i)\backslash F(\alpha_{i+1}) = A_i$ и $\alpha_0 = 0$, в результате получаем: $\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\} d\alpha = \sum\limits_{i=1}^m P\{A_i\}\alpha_i$, т.е. формула (7) истинна для случая простых измеримых функций.

Рассмотрим общий случай. Пусть $f(x)$ – интегрируемая функция, тогда существует последовательность простых измеримых функций $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$, что $f_n(x) \leqslant f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, и $\int\limits_X f(x)dP(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)dP(x)$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(\alpha) = F(\alpha)$, где $F_n(\alpha) = \{x \in X | f_n(x) > \alpha\}$. Поэтому

$$\int\limits_X f(x)dP(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)dP(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_0^h P\{F_n(\alpha)\} d\alpha = \int\limits_0^h P\{F(\alpha)\} d\alpha.$$

Лемма доказана.⊠

Теорема 10. *Пусть $\xi(\omega)$ – неотрицательная нечеткая величина, заданная на конечном нечетком пространстве (Ω, μ) и μ – 2-монотонная мера. Тогда*

$$\underline{M}[\xi] = \int\limits_0^h \mu\{F(\alpha)\} d\alpha, \tag{8}$$

где $h = \max\limits_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)$ и $F(\alpha) = \{\omega \in \Omega | \xi(\omega) > \alpha\}$.

Доказательство. Данная теорема легко следует из леммы 6. Действительно, по определению $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P\in\Xi}\int\limits_\Omega \xi(\omega)dP(\omega)$, или, используя лемму 6, $\underline{M}[\xi] = \inf\limits_{P\in\Xi}\int\limits_0^h P\{F(\alpha)\} d\alpha$. По условию для любой вероятностной меры $P \in \Xi$, $P \geqslant \mu$, поэтому $\underline{M}[\xi] \geqslant \int\limits_0^h \mu\{F(\alpha)\} d\alpha$. Кроме того, поскольку нечеткая мера μ является 2-монотонной и множества $F(\alpha)$ линейно упорядочены отношением включения, т.е. $F(\alpha_1) \supseteq F(\alpha_2)$, если $\alpha_1 < \alpha_2$, то найдется вероятностная мера P, $P \geqslant \mu$, что $P\{F(\alpha)\} = \mu\{F(\alpha)\}$, $\alpha \in [0,1]$, т.е. формула (8) дает точную нижнюю оценку математического ожидания нечеткой величины.⊠

Замечания

1. Формулу (8) можно использовать и для вычисления оценок моментов более высокого порядка. В этом случае $h = \max\limits_{\omega\in\Omega} \xi^n(\omega)$ и $F(\alpha) = \{\omega \in \Omega | \xi^n(\omega) > \alpha\}$.

2. Формулу (8) можно применять также и для нечетких величин, описываемых нечеткими мерами, которые называются нижними вероятностями. В этом случае получается неточная нижняя оценка математического ожидания.

3. Пусть μ – это 2-альтернирующая мера, тогда формула (8) дает точную верхнюю оценку математического ожидания нечеткой величины.

4. Замечание 2 также справедливо и для верхних вероятностей.

5. Формула (8) – это ничто иное, как интеграл Шоке [18] по нечеткой мере.

Заключение

В данном исследовании была рассмотрена модель неточных вероятностей, основанная на теории нечетких мер. При этом описание основных базовых понятий, таких, как условная нечеткая мера, принцип обобщения, нечеткая величина, ее характеристики, строилось подобным образом, как и в классической теории вероятностей. Подчеркнем, что в основе данного построения лежат семейства вероятностных мер, из которых вытекает вероятностная интерпретация нечетких мер, когда мы рассматриваем их в качестве верхних или нижних оценок вероятностей. Возможны и другие варианты построения основных базовых понятий. Например, можно строить условную нечеткую меру, используя в качестве базового следующее выражение $P(A\cap B) = P(A|B)P(B)$, т.е. можно пытаться выбирать условную нечеткую меру таким образом, чтобы из условного и безусловного нечеткого распределения можно было бы получить совместное распределение. Такая модель оказывается близкой по характеру к моделям неточных вероятностей второго порядка [5, 19], и является более подходящей для моделей неточного вероятностного вывода. Другой вариант обобщения рассмотренных понятий связан с рассмотрением аналогичных конструкций в рамках обобщенных точных вероятностей. В этом случае мы должны рассматривать множества не вероятностных мер, а ненормированных аддитивных мер (см. раздел 4 в [1]) и числовые характеристики нечетких величин следует рассчитывать по множеству $\Xi = \{P | P \geqslant g_Y\}$ ненормированных аддитивных мер P, которые мажорируют сверху обобщенную точную нижнюю вероятность g_Y. Это позволит расширить полученные результаты на более широкий класс нижних вероятностей. Дальнейшие обобщения данных понятий на все множество нечетких мер может проводиться, например, за счет использования требования монотонности, как это делается, например, при определении условных монотонных мер в [20]. За пределами данного исследования осталось много других важных проблем. Как, например, определить независимость или декартово произведение нечетких мер? Как отмечалось выше, данные проблемы также пока еще не имеют однозначного решения. Авторы данной статьи склоняются к следующему определению декартового произведения. Пусть g_X, g_Y – точные нижние вероятности, определенные на конечных алгебрах $\mathfrak{A}_X$ и $\mathfrak{A}_Y$ конечных пространств X и Y, тогда декартово произведение $g_X \times g_Y$на алгебре $\mathfrak{A}_X \times \mathfrak{A}_Y$ можно определить по формуле:

$$g_X \times g_Y = \bigwedge_{P_X \in \Xi_X, P_Y \in \Xi_Y} P_X \times P_Y,$$

где $\Xi_X = \{P_X | P_X \geqslant g_X\}$, $\Xi_Y = \{P_Y | P_Y \geqslant g_Y\}$. Данное определение легко распространяется на обобщенные точные нижние вероятности. Другие обобщения также могут проводиться с помощью требования монотонности [5, 21].

Дальнейшие исследования могут также проводиться и по практическому использованию предложенных конструкций в интервальных статистических моделях, в распознавании образов, приближенных рассуждениях. Следует подчеркнуть, что многие модели приближенных рассуждений, основанные на теории возможностей [5, 17], можно обосновать в рамках понятий нижней (верхней) вероятности.

Список литературы

[1] Броневич А.Г., Каркищенко А.Н. Описание нечетких мер в рамках вероятностного подхода // Нечеткие системы и мягкие вычисления, том 2, № 7, 2007, стр. 7–30.

[2] Bronevich A.G. An investigation of ideals in the set of fuzzy measures // Fuzzy Sets and Systems, v. 152, 2005, pp. 271–288.

[3] Cozman F. A brief introduction to the theory of sets of probability measures. http: // www.cs.cmu.edu/ fgcozman/qBayes.html, 1999.

[4] Walley P. Statistical reasoning with imprecise probabilities. Chapman and Hall, London, 1991.

[5] Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. – М.: Радио и связь, 1991.

[6] Klir G.J. Uncertainty and Information: Foundations of Generalized Information Theory. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2006.

[7] Bronevich A.G., Klir G.J. Measures of uncertainty for imprecise probabilities: An axiomatic approach // International Journal of Approximate Reasoning, vol. 51, 2010, pp. 365–390.

[8] Dempster A.P. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping // Ann. Math. Statist., 1967, v.38, pp.325–339.

[9] Shafer G. A mathematical theory of evidence. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[10] Bronevich A.G., Lepskiy A.E. Geometrical fuzzy measures in image processing and pattern recognition. Proc. of the 10th IFSA World Congress, 2003, Istanbul, Turkey, pp. 151–154.

[11] Черников С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968.

[12] Walley P. Coherent lower (and upper) probabilities. Technical Report 22, Department of Statistics, University of Warwick, U.K., 1981.

[13] Bronevich A.G. On the closure of families of fuzzy measures under eventwise aggregations // Fuzzy sets and systems, v. 153, 2005, pp. 45–70.

[14] Jaffray J.Y. Bayesian updating and belief functions. IEEE Tr. Systems Man and Cybernetics, 1992, v. 22, pp. 1144–1152.

[15] Fagin R., Halpern J.Y. A new approach to updating beliefs. Uncertainty in Art. Int. 1991, v. 6, 347–374.

[16] Smets P. Belief functions and the transferable belief model. http://www.sipta.org/documentation/belief/belief.pdf, 1999.

[17] Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. – М.: Радио и связь, 1990.

[18] Denneberg D. Non-additive measure and integral, basic concepts and their role for applications. In M. Grabisch, T. Murofishi, M. Sugeno (eds.) Fuzzy measures and integrals – Theory and applications. Studies on fuzzyness and soft computing, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[19] De Cooman G. Precision-imprecision equivalence in abroad class of imprecise hierarchical uncertainty models // Journal of Statistical Planning and Inference, v. 105, 2002, pp 175—198.

[20] Denneberg D. Conditioning (updating) non-additive measures // Annals of Operations Research, v. 52, 1994, pp. 21–42.

[21] Denneberg D. Totally monotone core and products of monotone measures // International Journal of Approximate Reasoning, v. 24, 2000, pp. 273–281.