Автоматика и телемеханика, № 11, 2008

PACS 07.05.Mh

© 2008 г. Д.А. ШВАРЦ
(Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва)

ЧАСТИЧНЫЕ ПОРЯДКИ И ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА

Исследуется связь структуры ациклического бинарного отношения и матрицы смежности соответствующего ему графа.

1. Введение

Известные методы исследования бинарных отношений и соответствующих им графов через спектр (т.е. множество собственных значений) матрицы смежности в данном случае неприменимы, поскольку для ациклических отношений эта матрица нильпотентна и ее спектр тождественно нулевой.

Поэтому необходимо воспользоваться более тонкой характеристикой матрицы.

В статье в этом качестве рассматривается жорданова нормальная форма (ЖНФ).

2. Необходимые определения и известные результаты

Определения, касающиеся бинарных отношений даны согласно [4].

Пусть $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$ – конечное множество.

Бинарным отношением на U называется подмножество $P \subset U \times U$. Свойство $(a, b) \in P$ обозначается как aPb. Отношение P можно представлять в виде ориентированного графа с множеством вершин U и множеством дуг P, вершины a и b соединены, если и только если aPb.

Для $x \in U$ множество $Px = \{y \in U \mid yPx\}$ будем называть верхним контуром элемента x, а $xP = \{y \in U \mid xPy\}$ – нижним контуром.

Матрица смежности $M = (m_{ij})$ для отношения P – это квадратная $N \times N$ матрица, в которой $m_{ij} = 1$, если $u_i P u_j$, и $m_{ij} = 0$ в противном случае.

Обозначим через $\overline{U}$ – векторное пространство, образованное формальными линейными комбинациями элементов U: $\overline{U} = \left\{\sum\limits_{i=1}^{N} a_i u_i\right\}$. Элементы U, рассматриваемые как элементы $\overline{U}$, образуют базис $\overline{U}$. Обозначим через L_P – линейный оператор, матрица которого в базисе U равна M.

L_P действует на элементы базиса U следующим образом:

$$L_P(u) = \sum_{v \in uP} v.$$

Дополнительным к бинарному отношению P называется отношение $P^c = \{(x, y) \in U \times U \mid (x, y) \notin P\}$.

Последовательность различных элементов $u_1, \dots, u_n$ множества U называется путем, если $u_1 P u_2$, $u_2 P u_3, \dots, u_{n-1} P u_n$, и контуром, если дополнительно $u_n P u_1$. Будем называть длиной пути (контура) число входящих в него дуг, т.е. длина пути $u_1, \dots, u_n$ равна $n-1$, а длина контура $u_1, \dots, u_n$ – n.

Бинарное отношение P называется

– рефлексивным, если $\forall x \in U\ (x, x) \in P$;

– антирефлексивным, если $\forall x \in U\ (x, x) \notin P$;

– ассиметричным, если $\forall x, y \in U\ (x, y) \in P \Rightarrow (y, x) \notin P$;

– ациклическим AR, если оно не содержит циклов;

– транзитивным, если $\forall x, y, z \in U\ xPy$ и $yPz \Rightarrow xPz$;

– отрицательно транзитивным, если P^c транзитивно;

– полным, если $\forall x, y \in U\ xPy$ или yPx;

– связным, если $\forall x, y \in U,\ x \neq y\ xPy$ или yPx;

– предпорядком, если оно транзитивно и рефлексивно;

– частичным порядком PO, если оно транзитивно и ассиметрично;

– интервальным порядком IO, если P – частичный порядок и $\forall x, y, z, t \in U\ xPy$ и $zPt \Rightarrow xPt$ или zPy;

– полупорядком SO, если P – интервальный порядок и выполняется условие полутранзитивности: $\forall x, y, z, t \in U\ xPy$ и $yPz \Rightarrow xPt$ или tPz;

– слабым порядком WO, если P ассиметрично и отрицательно транзитивно;

– линейным порядком LO, если P связный слабый порядок.

Упомянутые классы бинарных отношений соотносятся друг с другом так:

$$LO \subset WO \subset SO \subset IO \subset PO \subset AR.$$

Введем более удобные для следующих доказательств эквивалентные формулировки.

Предложение 1 (см. [1,4]). *Следующие условия эквивалентны.*

(i). *P – линейный порядок.*

(ii). *Существует такая нумерация элементов U: $U = \{u_1, \dots, u_N\}$, что $u_i P u_j \Leftrightarrow i < j$.*

Предложение 2 (см. [1,4]). *Следующие условия эквивалентны.*

(i). *P – слабый порядок.*

(ii). *Существует такое разбиение U на непустые подмножества $U_1, \dots, U_m$, что $xPy \Leftrightarrow x \in U_i,\ y \in U_j,\ i < j$.*

Для бинарного отношения P определим бинарное отношение T: $xTy \Leftrightarrow xP \supset yP$ и $Px \subset Py$. T автоматически является предпорядком.

Предложение 3 (см. [1,4]). *Следующие условия эквивалентны.*

(i). *P – полупорядок.*

(ii). *T – полный предпорядок.*

Пусть A – нильпотентный оператор в n-мерном пространстве V, $X = \{x_1, \dots x_n\}$ – базис V.

X называется жордановым для A, если в базисе X оператор A имеет вид

$$\begin{array}{cccc} Ax_1 = x_2, & \dots & Ax_{n_1-1} = x_{n_1}, & Ax_{n_1} = 0, \\ Ax_{n_1+1} = x_{n_1+2}, & \dots & Ax_{n_1+n_2-1} = x_{n_1+n_2}, & Ax_{n_1+n_2} = 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Ax_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} = x_{n_1+\dots+n_{k-1}+2}, & \dots & Ax_{n_1+\dots+n_k-1} = x_{n_1+\dots+n_k}, & Ax_{n_1+\dots+n_k} = 0, \end{array} \quad (1)$$

где $n_1, \dots, n_k$ – некоторые натуральные числа, $n_1 + \dots + n_k = n$.

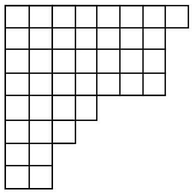

Рис. 1.

Квадратные подматрицы, полученные из A выбором строк и столбцов, соответствующих подмножествам X: $\{x_1, \dots, x_{n_1}\}$, $\{x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2}\}, \dots$ $\dots, \{x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1}, \dots, x_{n_1+\dots+n_k}\}$, называются жордановыми клетками, числа n_i – длинами жордановых клеток.

Векторы $x_{n_1+\dots+n_j}$ $(j = 1, \dots, k)$ называются собственными векторами A, остальные элементы X – присоединенными векторами: $x \in X$ – присоединенный вектор первого порядка, если Ax – собственный вектор A, и присоединенный вектор m-го порядка, если Ax – присоединенный вектор $m-1$-го порядка.

Назовем $x_1, x_{n_1+1}, \dots, x_{n_1+n_2+\dots+n_{k-1}+1}$ старшими векторами соответствующих жордановых клеток. Старший вектор j-й клетки будет собственным для A, если $n_j = 1$, и присоединенным максимально возможного для этой клетки порядка $n_j - 1$, если $n_j > 1$.

Матрица оператора A в базисе X называется жордановой нормальной формой (ЖНФ) A. Будем также говорить, что оператор A приводится к ЖНФ в базисе X.

Доказательства предложений 4–6 содержатся в [2,3], иногда в несколько других формулировках.

Предложение 4. Нильпотентный оператор в пространстве над любым полем приводится к ЖНФ. Если X_1 и X_2 – два различных жордановых базиса, то длины их жордановых клеток отличаются перестановкой.

Далее будем считать, что жордановы клетки упорядочены по убыванию длин. Этого всегда можно добиться, перенумеровав векторы в жордановом базисе.

Поскольку ЖНФ задается разбиением n в сумму нескольких натуральных слагаемых, ей удобно сопоставить диаграмму Юнга (рис. 1). Жордановы клетки соответствуют столбцам, т.е. ЖНФ, отвечающая данной диаграмме, имеет 2 клетки длины 8, 3 – длины 4 и по одной длин 1, 5 и 6.

Дефектом оператора L в конечномерном пространстве V называется разность $\dim V - \dim \operatorname{Im} L$, т.е. размерность нуль-пространства.

Предложение 5. Дефект нильпотентного оператора равен числу его жордановых клеток.

Индексом нильпотентности оператора L называется такое число k, что $A^{k-1} \neq 0$, но $A^k = 0$.

Предложение 6. Индекс нильпотентности нильпотентного оператора равен длине максимальной из его жордановых клеток.

Предложение 7. Вектор жорданова базиса оператора L является старшим тогда и только тогда, когда он не содержится в $\operatorname{Im} L$.

Последнее следует из того, что $\operatorname{Im} L$ – линейная оболочка всех элементов U, кроме старших (см. (1)).

3. Основные результаты

П р е д л о ж е н и е 8 (см., например, теорему 13.1 из [5]). *Сумма элементов M^k равна числу путей длины k в P.*

П р е д л о ж е н и е 9. Оператор, соответствующий ациклическому бинарному отношению P, нильпотентен. Его индекс нильпотентности на единицу больше длины самого длинного пути в P.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В ациклическом отношении нет путей, проходящих два раза через одну вершину, поэтому длина пути в нем не больше $|U| - 1$. Пусть k – длина самого длинного из путей. Тогда по предыдущему утверждению, сумма элементов M^{k+1} равна 0. Но элементы этой матрицы – целые неотрицательные числа, поэтому все они равны 0. Следовательно, $M^{k+1} = 0$ и, следовательно, ${L_P}^{k+1} = 0$.

С другой стороны, сумма коэффициентов M^k нулю не равна, поэтому и M^k и ${L_P}^k$ ненулевые.

Обозначим через J_P ЖНФ оператора L_P ациклического отношения P. Из предложения 9 получаем

С л е д с т в и е 1. Длина максимального пути в ациклическом отношении P на единицу меньше длины максимальной из жордановых клеток J_P.

С л е д с т в и е 2. Пусть в ациклическом отношении P есть путь длины $|U|-1$. Тогда J_P содержит единственную жорданову клетку.

П р е д л о ж е н и е 10. Пусть P – частичный порядок. Тогда следующие условия равносильны:

(i). *P – линейный порядок.*

(ii). *J_P имеет ровно одну жорданову клетку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. (i) $\Rightarrow$ (ii). Непосредственно вытекает из следствия 2.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть J_P содержит ровно одну жорданову клетку. Тогда P содержит путь длины $|U|-1$, т.е. существует такая нумерация элементов U: $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$, что $u_1Pu_2, \ldots, u_{N-1}Pu_N$. Из транзитивности получаем u_iPu_j при $i < j$, что является одним из определений линейного порядка.

Т е о р е м а 1. Пусть P – слабый порядок. Тогда J_p имеет не более одной клетки длины более 1. *Длина этой клетки равна числу множеств в введенном в предложении 2 разбиении U.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся эквивалентным определением слабого порядка (предложение 2): существует такое разбиение U на непустые подмножества $U_1, \ldots, U_m$, что $xPy \Leftrightarrow x \in U_i$, $y \in U_j$, $i < j$.

Длина максимального пути в P равна $m-1$, поэтому в J_P есть клетка длины m.

Заметим, что если $u, u' \in U_i$, где $i \leq m-1$, то

$$L_P(u) = L_P(u') = \sum_{j>i} \sum_{v \in U_j} v,$$

а если $u \in U_m$, то $L_P(u) = 0$ (т.е. нулевому вектору пространства $\widetilde{U}$). Поэтому среди образов элементов базиса $\widetilde{U}$ всего $m-1$ различных ненулевых векторов и $\dim \operatorname{Im} L_P \leq m-1$ и, согласно предложению 5 число клеток J_P не менее $N-m+1$.

А так как среди них есть клетка длины m и сумма длин клеток равна N, то возможен только один вариант – одна клетка длины m и все остальные длины 1.

З а м е ч а н и е 1. Обратное утверждение неверно.

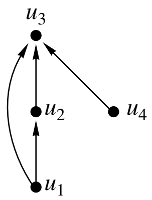

Рис. 2.

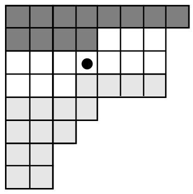

Рис. 3.

Бинарное отношение на рис. 2 является, как легко проверить, частичным порядком (и даже полупорядком), но не слабым порядком.

С другой стороны, рассмотрим векторы: $v_1 = u_1, v_2 = u_2+u_3, v_3 = u_3, v_4 = u_4-u_2$. Они линейно независимы, поскольку определитель матрицы их коэффициентов в базисе $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

равен 1. Из $L_P(v_1) = v_2$, $L_P(v_2) = v_3$, $L_P(v_3) = 0$ и $L_P(v_4) = 0$ следует, что это жорданов базис. Следовательно, J_P содержит по одной клетке длин 3 и 1. Отметим, что v_3 – собственный вектор, отвечающий за клетку порядка 3, а v_2 и v_1 – присоединенные векторы 1-го и 2-го порядка соответственно.

Для более широких классов частичных порядков жордановы формы более разнообразны.

Теорема 2. *Пусть J – диаграмма Юнга. Тогда существует полупорядок P, такой что $J_P = J$.*

Доказательство. Будем строить бинарное соотношение P по диаграмме Юнга J. Элементами U будут ее клетки. Обозначим через $u_{i,j}$ клетку в i-й строке и j-м столбце, P задается следующим образом:

$$u_{i,j} P u_{k,l} \;\Leftrightarrow\; (i+1<k) \quad \text{или} \quad (i+1=k \;\text{ и }\; j \le l).$$

(Клетка диаграммы Юнга доминирует клетки, стоящие как минимум на две строки ниже или стоящих на одну строку ниже и не левее.) На рис. 3 темно-серым закрашен верхний контур выделенного элемента, а светло-серым – нижний контур.

Пусть n – число жордановых клеток, $x_1, \ldots, x_n$ – их длины. Будем считать, что $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n$.

Введем на U также линейный порядок L: $u_{i,j} L u_{k,l}$, если $i < k$ или $(i = k$ и $j < l)$. (Сначала сравниваются номера строк, а если они равны, то номера столбцов.)

Элементы первой строки диаграммы Юнга будем для удобства обозначать также через v_i. Их n штук – столько же, сколько и жордановых клеток.

Покажем, что P – полупорядок.

В силу предложения 3 достаточно доказать, что T – полный предпорядок, а поскольку T – предпорядок по определению, достаточно доказать, что T полно.

Поскольку L – линейный и, следовательно, связный порядок, достаточно проверить, что $L \subset T$. В этом случае T будет тоже связно, а поскольку рефлексивно, то и полно. Итак, осталось доказать

$$xLy \Rightarrow Px \subseteq Py \;\text{ и }\; xP \supseteq yP.$$

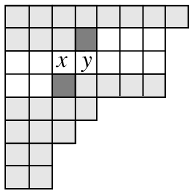

Рис. 4.

Последнее достаточно проверить для соседних с точки зрения L элементов (назовем их x и y, xLy). На рис. 4 светло-серым выделены Px и yP, а темно-серым – Py/Px и xP/yP.

Пусть $W = \{w_1, \ldots, w_N\}$ – какой-нибудь жорданов базис, A – матрица перехода к нему от $U = \{u_1, \ldots, u_N\}$, $W = AU$. Будем говорить, $u \in U$ входит в w_j, если в разложении w_j по базису U коэффициент при u отличен от 0.

Поскольку $\det A \neq 0$, среди слагаемых в разложении определителя

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \ldots a_{N\sigma(N)}$$

есть ненулевые. Рассмотрим одно из них, заданное перестановкой σ. Его отличие от нуля означает, что при $1 \leq i \leq N$ $\;a_{i\sigma(i)} \neq 0$, т.е. для каждого элемента U существует свой элемент W, в который он входит. В частности, это верно и для каждого из элементов первой строки диаграммы Юнга v_i.

Перенумеровав элементы базиса W, можно считать, что для всех i при $1 \leq i \leq n$ v_i входит в разложение w_i.

Если в вектор жорданова базиса входит любой из $v_1, \ldots, v_n$, то он не содержится в $\operatorname{Im} L_P$ и по предложению 7 старший. Таким образом, старшими векторами W являются как минимум $w_1, \ldots, w_n$, т.е число жордановых клеток J_P не менее n.

Докажем, что длина жордановой клетки, соответствующей w_i не меньше x_i. Выберем минимальное j, такое, что v_j входит в w_i. Так как $j \leq i$, то $x_j \geq x_i$. Поэтому достаточно проверить, что длина жордановой клетки, соответствующей w_i не меньше x_j.

Докажем по индукции, что при $k < x_j$

$$L_P^k(w_i) \sim u_{k+1,j} + u,$$

где u лежит в линейной оболочке элементов U, доминируемых $u_{k+1,j}$ по отношению L ($\sim$ означает пропорциональность).

При $k = 0$ можно утверждать, что в w_i не входят $u_{k,1} = v_k$ при $k < j$, что верно по условию.

Пусть $L_P^{k-1}(w_i) \sim u_{k,j} + u$. Тогда $L_P^k(w_i) \sim L_P(u_{k,j} + u) = L_P(u_{k,j}) + P(u)$. Но $u_{k,j}$ – минимальный из элементов $v \in U$ таких, что $L_P(v)$ содержит $u_{k+1,j}$, поэтому $L_P(u)$ не содержит $v_{k+1,j}$, а $L_P(v_{k,j})$ содержит и соответственно содержит и их сумма.

Из предыдущего следует, что $L_P^{x_j - 1}(w_i) \neq 0$, что и означает, что жорданова клетка, старшим вектором которой является w_i, имеет длину не менее x_j.

Таким образом, J_P содержит не менее n клеток, среди которых есть n, такие, что длина i-й из них не меньше x_i. Но поскольку $\sum_i x_i = N$ и сумма длин жордановых клеток равна N, то в J_P ровно n клеток длин $x_1, \ldots, x_n$, что и требовалось доказать.

Пример. Проиллюстрируем доказательство теоремы 2 в случае двух жордановых клеток длин 2 и 3.

U будет состоять из элементов $u_{1,1}$, $u_{1,2}$, $u_{2,1}$, $u_{2,2}$, $u_{3,1}$. Матрица смежности P имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Жорданов базис состоит из векторов $v_1 = u_{1,1}$, $v_2 = L_P(v_1) = u_{2,1} + u_{2,2} + u_{3,1}$, $v_3 = L_P(v_2) = u_{3,1}$, $v_4 = u_{1,2}$ и $v_5 = L_P(v_4) = u_{2,2} + u_{3,1}$ и ЖНФ оператора содержит две жордановы клетки длин 3 и 2.

4. Заключение

Получены следующие результаты:

– частичный порядок является линейным тогда и только тогда, когда ЖНФ матрицы смежности соответствующего ему графа имеет только одну жорданову клетку;

– ЖНФ матрицы смежности графа, соответствующего слабому порядку имеет не более одной жордановой клетки длины более 1. Обратное утверждение неверно;

– никаких ограничений на ЖНФ матрицы смежности графа, соответствующего полупорядку или более широкому классу ациклических бинарных отношений нет, т.е., для любой ЖНФ с нулевыми собственными значениями существует полупорядок, такой, что матрица соответствующего ему графа имеет именно такую ЖНФ.

Автор благодарен Ф.Т. Алескерову и С.П. Стрункову за обсуждение и помощь в работе, отдельно Ф.Т. Алескерову за предоставленную идею и Р. Агаеву за прочтение и правку “сырого” варианта статьи и данные при этом советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алескеров Ф.Т.* Пороговая полезность, выбор и бинарные отношения // АиТ. 2003. № 3. С. 17–41.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Добросвет, 1998.
4. *Aleskerov F., Monjardet B.* Utility Maximization, Choice and Preference. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
5. *Харари.Ф.* Теория графов. М.: Мир, 1986.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 30.01.2007