PACS — 02.50.Le

© 2010 г. Шварц Д. А. (Государственный университет — Высшая школа экономики)

АКСИОМАТИКА ДЛЯ ИНДЕКСОВ ВЛИЯНИЯ, УЧИТЫВАЮЩИХ ПРЕДПОЧТЕНИЯ УЧАСТНИКОВ

Предложен общий подход к описанию индексов влияния, учитывающих предпочтения, которые были предложены Ф. Алескеровым. Построены две аксиоматизации таких индексов. Конструкция обобщает аксиоматики А. Ларуелль и Ф. Валенсиано для индексов Банцафа (Пенроуза) и Шепли—Шубика. Получены новые наборы аксиом для этих индексов, в частности, не содержащие аксиомы анонимности.

1. Введение

Среди многочисленных индексов влияния наиболее известны индексы Шепли—Шубика [1] и Банцафа [2]. [1]

Закономерен вопрос: "Чем выделяется тот или иной индекс влияния?" Один из ответов: "Набором естественных свойств (аксиоматикой), которым удовлетворяет только этот индекс." Аксиоматика для индекса Шепли—Шубика впервые была построена в [3], а для индекса Банцафа — в [4].

Альтернативный (и, как считают авторы, более прозрачный) набор аксиом для индексов Банцафа и Шепли—Шубика был предложен в [5].

Цель данной статьи — построить аналогичную аксиоматику для индексов влияния, зависящих от предпочтений участников, которые впервые были введены в [6].

2. Простые игры и индексы влияния

Определение 1. Будем называть простой игрой пару (N, v), где N — множество, а $v : 2^N \to \{0, 1\}$ — функция, сопоставляющая каждому подмножеству N либо 0, либо 1, и если выполняется свойство монотонности, т.е., если S и T — подмножества N и $S \subset T$, то $v(S) \leqslant v(T)$.

Далее предполагается, что N — конечное множество, элементы которого занумерованы с 1 до n, т.е. $N = \{1, \dots, n\}$. Элементы множества N называются игроками, подмножества N — коалициями. Если это не вызывает путаницы, простая игра (N, v) обозначается просто как v, а число игроков в коалиции S обозначим через s. Множество всех простых игр n игроков обозначается как SG_n.

Определения даны в соответствии с [7]. Более традиционное определение простой игры предполагает также, что $v(\varnothing) = 0$, $v(N) = 1$. Это условие исключает только две тривиальные игры.

Лемма 1. Пусть v — простая игра. Тогда

1) если $v(\varnothing) \neq 0$, то $v(S) = 1$ для всех $S \subseteq N$;

[1] Работа была поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований №08-01-00039а.

2) если $v(N) \neq 1$, то $v(S) = 0$ для всех $S \subseteq N$.

Доказательство. 1) Если $v(\varnothing) \neq 0$, то $v(\varnothing) = 1$ и по свойству монотонности, для любой коалиции S выполняется $v(S) \geqslant v(\varnothing) = 1$. А поскольку $v(S)$ равно либо 0, либо 1, то $v(S) = 1$.

Второе утверждение доказывается аналогично.

Коалиция S называется выигрывающей, если $v(S) = 1$, и проигрывающей, если $v(S) = 0$.

Игрок i называется ключевым в коалиции S, если S выигрывающая, а $S \setminus \{i\}$ — проигрывающая (для этого, очевидно, необходимо, чтобы $i \in S$). Игрок называется болваном, если он не ключевой ни в одной коалиции. Название дано в [1] по аналогии с бриджем: и там, и здесь болван — это игрок, не имеющий возможности влиять на события. Множество всех коалиций, в которых игрок i ключевой, обозначается через $W_i(v)$.

Выигрывающая коалиция S называется минимальной, если все игроки в ней ключевые или, другими словами, S не содержит никакой другой выигрывающей коалиции. Множества выигрывающих, проигрывающих и минимальных выигрывающих коалиций обозначаются соответственно как $W(v)$, $L(v)$ и $M(v)$. Простая игра часто задается перечислением всех (или только минимальных) выигрывающих коалиций. Это оправдано, поскольку $M(v)$ однозначно определяет $W(v)$, а $W(v)$ — функцию v:

$$W(v) = \bigcup_{S \in M(v)} \left(\bigcup_{T \supseteq S} \{T\} \right);$$

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \in W(v); \\ 0, & \text{если } S \notin W(v). \end{cases}$$

Пусть S — произвольная коалиция. Обозначим через u^S игру, в которой S будет единственной минимальной выигрывающей коалицией. Если $i \in S$, то i — ключевой игрок во всех коалициях, содержащих S. Если $i \notin S$, то i — болван.

Пусть v — простая игра, $S \in M(v)$. Обозначим через v_{-S} игру, полученную из v переводом S из выигрывающих коалиций в проигрывающие. Формально $W(v_{-S}) = W(v) \setminus \{S\}$. Будем называть переход от v к v_{-S} *вычеркиванием коалиции* S. Игра v_{-S} также будет простой (поскольку коалиция S минимальна, ее вычеркивание не нарушает монотонности).

Обозначим через v_{-S-T} игру, полученную вычеркиванием сначала S из v, а затем T из v_{-S}. Если $T \in M(v)$, то $v_{-S-T} = v_{-T-S}$, поскольку в этих играх одни и те же выигрывающие коалиции — все, какие есть в v, кроме S и T. Т.е. имеет место коммутативная диаграмма

(1)
$$\begin{array}{ccc} v & \longrightarrow & v_{-S} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ v_{-T} & \longrightarrow & v_{-S-T} \end{array}$$

Но если $T \notin M(v)$, v_{-T-S} не определено.

Пример 1. В результате вычеркивания коалиции число выигрывающих коалиций уменьшается на единицу, а вот число минимальных выигрывающих коалиций может как уменьшиться, так и увеличиться.

Пусть $n = 3$, $W(v) = \{\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$, $S = \{1\}$. S — единственная минимальная выигрывающая коалиция в игре v. Вычеркнем S, получим

$$W(v_{-S}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\},$$
$$M(v_{-S}) = \{\{1,2\},\{1,3\}\}.$$

Вычеркнем коалицию $T = \{1,2\}$. Тогда

$$W(v_{-S-T}) = \{\{1,3\},\{1,2,3\}\},$$
$$M(v_{-S-T}) = \{\{1,3\}\}.$$

После вычеркивания S минимальных выигрывающих коалиций становится больше, после вычеркивания T — меньше.

Вычеркнуть T сразу из v невозможно — нарушится условие монотонности.

Индекс влияния, $\Phi : SG_n \to \mathbb{R}^n$, сопоставляет каждой простой игре v вектор $\Phi(v)$, i-я компонента которого интерпретируется как влияние игрока i. Наиболее известны индексы влияния Банцафа и Шепли—Шубика.

Индекс влияния Банцафа (BI) [2] вычисляется в предположении, что влияние игрока пропорционально числу коалиций, в которых он ключевой. Общий индекс Банцафа TBz_i для игрока i равен

$$TBz_i = |W_i|.$$

Индекс влияния Банцафа Bz_i получается из общего индекса нормированием.

$$Bz_i = \frac{|W_i|}{\sum_{j=1}^{n} |W_j|}.$$

Впервые подобный индекс влияния был введен Пенроузом [8], где число коалиций с ключевым игроком i делится на число всех коалиций, в которые входит i.

$$P_i = \frac{1}{2^{n-1}}|W_i|.$$

Во многих работах, в частности в [5], под индексом Банцафа понимается именно индекс Пенроуза. Чтобы как-то совместить историческую справедливость и сложившуюся традицию, в данной статье результаты [5] и [4] будут переформулированы для общего индекса Банцафа. Чтобы перейти к индексу Пенроуза, общий индекс Банцафа нужно просто поделить на 2^{n-1}.

Другая форма записи общего индекса Банцафа —

$$TBz_i = \sum_{S \subseteq N} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right).$$

В последнем равенстве используется свойство ключевого игрока: $v(S)-v(S\setminus\{i\})$ равно 1, если i — ключевой в S, и 0 в противном случае.

Индекс Шепли—Шубика (SSI) [1] возник в теории игр как частный случай вектора Шепли. В нем число, которое коалиция добавляет к влиянию игрока, зависит от ее размера

$$\begin{aligned} SS_i &= \sum_{S\in W_i(v)} \tfrac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = \\ &= \sum_{S\subseteq N} \left(v(S)-v(S\setminus\{i\})\right) \tfrac{(n-s)!(s-1)!}{n!}. \end{aligned}$$

3. Игры и индексы влияния, зависящие от предпочтений участников

Приведенная ниже конструкция обобщает определения [6] (см. пример 2).

В определение простой игры добавляется дополнительная информация: каждой коалиции S сопоставляется число $f(S)$, которое можно условно воспринимать как вероятность образования коалиции.

Определение 2. Назовем простой игрой с предпочтениями тройку (N, v, f), где $N = \{1, \dots n\}$ — множество игроков, пара (N, v) образует простую игру, f — функция, сопоставляющая каждой коалиции S и игроку i действительное число $f(i, S)$. Игра называется симметричной, если f зависит только от S. Множество всех (симметричных) простых игр с предпочтениями для n игроков обозначается через SGP_n ($SSGP_n$).

Простую игру можно воспринимать как простую игру с предпочтениями, в которой все коалиции одинаково предпочтительны — $(N, v) \equiv (N, v, 1)$.

В случаях, когда это не вызывает путаницы, игра (N, v, f) обозначается просто как v. Если две игры использованы в одном доказательстве, предполагается, что функция f у них одна и та же.

Понятия выигрывающей, проигрывающей и минимальной выигрывающей коалиций, ключевого игрока и вычеркивания коалиции дословно переносятся из простых игр. Наличие дополнительной функции f пока ни на что не влияет. При вычеркивании коалиции меняется только v, функция f остается прежней.

Пример 2 [6]. Предпочтения игроков задаются $n \times n$-матрицей P. Неформально говоря, ее элемент $p_{ij} \in [0, 1]$ определяет желание игрока i входить в коалицию с игроком j. Матрица P не обязательно симметрична, т.е. в общем случае $p_{ij} \neq p_{ji}$. Для вычислений удобно считать, что $p_{ii} = 0$.

В [6] приведено несколько способов определения матрицы предпочтений для реальных выборных органов и предложены 4 версии индекса, основанные на матрице предпочтений. В обозначениях данной статьи

(2) $$f^+(j,S,P) = \sum_{i\in S} \frac{p_{ji}}{s-1};$$

(3) $$f^-(j,S,P) = \sum_{i\in S} \frac{p_{ij}}{s-1};$$

(4) $$f(j,S,P) = \frac{f^+(j,S,P) + f^-(j,S,P)}{2};$$

(5) $$f(S,P) = \sum_{j\in S} \frac{f^+(j,S,P)}{s} = \sum_{j\in S} \frac{f^-(j,S,P)}{s} = \frac{1}{s(s-1)} \sum_{i,j\in S} p_{ij}.$$

Если коалиция S состоит из одного элемента, считаем все функции равными 1.

$f^+(j,S,P)$ можно интерпретировать как среднее желание игрока j входить в коалицию с остальными игроками S, $f^-(j,S,P)$ — как среднее желание остальных игроков S входить в коалицию с j, $f(S,P)$ — как среднее желание всех игроков входить в коалицию со своими коллегами из S.

Если отношения между всеми игроками коалиции S хорошие, т.е. $p_{ij} = 1$ для всех $i,j \in S$, то $f^+(j,S,P) = f^-(j,S,P) = f(S,P) = 1$; если же отношения между всеми игроками коалиции S плохие, т.е. $p_{ij} = 0$ для всех $i,j \in S$, то $f^+(j,S,P) = f^-(j,S,P) = f(S,P) = 0$.

Если функция v уже задана, функции (2)—(4) определяют несимметричную простую игру с предпочтениями, а функция (5) — симметричную.

Индекс влияния, $\Phi : SGP_n \to \mathbb{R}^n$ ($SSGP_n \to \mathbb{R}^n$), как и в случае простых игр, сопоставляет каждой симметричной или несимметричной игре с предпочтениями v вектор $\Phi(v)$, i-я компонента которого интерпретируется как влияние игрока i.

Определение 3. *Стандартный индекс влияния $St(v)$ определяется по формуле*

(6) $$St_i(v) = \sum_{S\in W_i(v)} f(S)$$

для симметричных игр с предпочтениями и

(7) $$St_i(v) = \sum_{S\in W_i(v)} f(i,S)$$

для несимметричных.

Пусть $f(i,S) > 0$ для всех игроков и коалиций, а v не равно тождественно ни 0, ни 1. Определим *нормированный стандартный индекс влияния $NSt(v)$:*

(8) $$NSt_i(v) = \frac{St_i(v)}{\sum_{j\in N} St_j(v)}.$$

Для того, чтобы знаменатель не был равен 0, достаточно, чтобы существовал хотя бы один ключевой игрок хотя бы в одной коалиции, что верно, если не все коалиции выигрывающие и не все проигрывающие.

Пример 3. Естественно предположить, что индекс влияния игрока тем больше, чем лучше его отношения с оппонентами и чем хуже отношения между ними. Это не всегда так.

Пусть $n = 3$, множество выигрывающих коалиций — $\{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$. Первый игрок будет ключевым во всех коалициях, второй и третий — только в первой и второй соответственно.

Игра симметрична, $f(S)$ вычисляется по формуле (5). Будем считать, что $p_{ij} = p_{ji}$. Вычислим $NSt(v)$ в трех случаях.

1. $p_{ij} = 1$ для всех i, j. Тогда и $f(S) = 1$ для всех S, и $NSt_1(v) = 3/5$, $NSt_2(v) = NSt_3(v) = 1/5$.

2. $p_{12} = p_{13} = 1$, $p_{23} = 0$ — игрок 1 находится в хороших отношениях с игроками 2 и 3, а они между собой — в плохих. Тогда $f(\{1,2\}) = 1$, $f(\{1,3\}) = 1$, $f(\{1,2,3\}) = 2/3$ и $NSt_1(v) = 8/14$, $NSt_2(v) = NSt_3(v) = 3/14$.

3. $p_{12} = p_{13} = 0$, $p_{23} = 1$ — игрок 1 находится в плохих отношениях с игроками 2 и 3, а они между собой — в хороших. Тогда $f(\{1,2\}) = 0$, $f(\{1,3\}) = 0$, $f(\{1,2,3\}) = 1/3$ и $NSt_1(v) = 1$, $NSt_2(v) = NSt_3(v) = 0$.

Пример 4. Пусть игра с предпочтениями симметрична и $f(S) = 1$ не зависит от S. Тогда $St(v)$ совпадает с общим индексом Банцафа.

$$St_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} 1 = |W_i(v)| = Bz_i(v).$$

Пример 5. Пусть игра с предпочтениями симметрична и $f(S) = \frac{1}{2^{n-1}}$ не зависит от S. Тогда $St(v)$ совпадает с индексом Пенроуза.

$$St_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} |W_i(v)| = Bz_i(v).$$

Пример 6. Пусть игра с предпочтениями симметрична и $f(S) = \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}$. Тогда $St(v)$ совпадает с индексом Шепли—Шубика.

$$St_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} = SS_i(v).$$

Многие другие индексы влияния, например Джонстона [9], Дигена—Пакела [10], Холера—Пакела [11], также записываются с использованием стандартного индекса (см. [12]). Поэтому стандартный индекс влияния можно рассматривать как обобщение этих индексов.

4. Аксиоматика для общего индекса Банцафа

4.1. Аксиоматика Дуби—Шепли [4]

Первая аксиоматика для общего индекса Банцафа была дана в [4]:

Аксиома болвана / Null Player (NP). Для любой игры $v \in SG_n$ если i — болван в игре v, то его влияние равно 0, т.е.

$$\Phi_i(v) = 0.$$

Анонимность / Anonimity (An). Для любой игры $v \in SG_n$, любой перестановки π множества N и любого $i \in N$

$$\Phi_i(\pi v) = \Phi_{\pi(i)}(v),$$

где $(\pi v)(S) = v(\pi(S))$.

Трансфер / Transfer (T) Для любых игр $v, w \in SG_n$, таких что $v \vee w \in SG_n$,

$$\Phi(v) + \Phi(w) = \Phi(v \vee w) - \Phi(v \wedge v),$$

где $(v \vee w)(S) = \max(v(S), w(S))$, а $(v \wedge w)(S) = \min(v(S), w(S))$.

Общая сумма Банцафа / Banzhaf Total Power (BzTP).

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subset N} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right).$$

Эти 4 аксиомы однозначно определяют общий индекс Банцафа.

Теорема 1 [4]. *Пусть $\Phi : SG_n \to \mathbb{R}^n$. Тогда Φ удовлетворяет аксиомам NP, An, T и BzTP, если и только если Φ — индекс Банцафа.*

Для индекса Пенроуза аксиомы NP, An и T те же, а в BzTP необходимо поделить правую часть на 2^{n-1}:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subset N} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right).$$

4.2. Аксиоматика Ларуелль—Валенсиано [5]

В [5] приведено два набора аксиом для общего индекса Банцафа (теоремы 2 и 3).

Аксиома болвана* / Null Player* (NP*). Для любой игры $v \in SG_n$ следующие два условия равносильны:

(i) i — болван в игре v;

(ii) для любой игры $w \in SG_n$ $\Phi_i(v) \leqslant \Phi_i(w)$.

Аксиома анонимности (An) та же, что и в аксиоматике [4].

Трансфер* / Transfer* (T*). Для любых игр $v, w \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v) \cap M(w)$ и любого $i \in N$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S}).$$

Условие симметричности доходов/потерь / Symmetric Gain-Loss (SymGL). 1) Для любой игры $v \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v)$ и любых $i, j \in S$:

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S}).$$

2) Для любой игры $v \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v)$ и любых $i, j \notin S$:

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S}).$$

Условие сохранения среднего дохода/потерь / Average Gain-Loss Balance (AGLB). Для любой игры $v \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v)$

$$\frac{1}{s}\sum_{i\in S}\left(\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})\right)=\frac{1}{n-s}\sum_{j\notin S}\left(\Phi_j(v_{-S})-\Phi_j(v)\right).$$

Обозначим через $\mathbf{1}$ вектор $(1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^n$.

Т е о р е м а 2 [5]. *Пусть $\Phi : SG_n \to \mathbb{R}^n$. Тогда Φ удовлетворяет аксиомам NP*, An, SymGL и AGLB, если и только если $\Phi = a\cdot TBz + b\mathbf{1}$, где $a\in\mathbb{R}^+$, $b\in\mathbb{R}$.*

Т е о р е м а 3 [5]. *Пусть $\Phi : SG_n \to \mathbb{R}^n$. Тогда Φ удовлетворяет аксиомам NP*, An, T* и AGLB, если и только если $\Phi = a\cdot TBz + b\mathbf{1}$, где $a\in\mathbb{R}^+$, $b\in\mathbb{R}$.*

Поскольку тоoремы 2—3 определяют индекс виляния с точностью до пропорциональности, то аксиоматике Ларуелль—Валенсиано удовлетворяет и индекс Пенроуза.

5. Аксиомы для индексов влияния, определенных на играх с предпочтениями

Аксиомы удобнее формулировать в стиле Ларуелль—Валенсиано. Из аксиоматики Дуби—Шепли взяты за основу аксиома NP, поскольку она кажется автору более простой, и аксиома BzTP, так как переформулировка этой аксиомы в стиле Ларуелль—Валенсиано выглядит несколько искуственной.

Аксиома болвана/Null Player (NP). Выигрыш болвана не зависит от интенсивностей предпочтений и всегда равен 0.

Трансфер/Transfer (T). Для любых игр $v, w \in SGP_n$, для любой коалиции $S \in M(v)\cap M(w)$ и любого i

$$\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})=\Phi_i(w)-\Phi_i(w_{-S}).$$

Усиленная аксиома трансфера/Strong Transfer (ST). Для любой игры $v \in SGP_n$, для любой коалиции $S\in M(v)$ и любого $i \in S$

$$\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})=f(i,S).$$

Если $i\in S$, то ST — усиление аксиомы T: в T указывается, что разность $\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})$ постоянна по v, а ST дополнительно говорит, чему эта разность равна.

Но если $i\notin S$, аксиома ST в отличие от T не утверждает ничего.

Условие симметричности доходов/потерь / Symmetric Gain-Loss (SymGL). 1) Для любой игры $v\in SGP_n$, любой коалиции $S\in M(v)$ и любых $i,j\in S$:

$$\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})=\Phi_j(v)-\Phi_j(v_{-S}).$$

2) Для любой игры $v\in SGP_n$, любой коалиции $S\in M(v)$ и любых $i,j\notin S$:

$$\Phi_i(v)-\Phi_i(v_{-S})=\Phi_j(v)-\Phi_j(v_{-S}).$$

Первая и вторая части SymGL в отличие от аксиоматики Ларуелль—Валенсиано используются не только вместе, но и порознь и обозначаются соответсвенно как SymGL_1 и SymGL_2.

Аксиомы T и SymGL — прямые аналоги соответствующих аксиом Ларуелль—Валенсиано.

Общая сумма/Total Power (TP).

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \in W_i(v)} f(i, S).$$

В случае симметричной игры v $f(i,S) = f(S)$ и не зависит от i. Для каждой коалиции S $f(S)$ входит в сумму столько раз, сколько ключевых игроков в коалиции S. Т.е. аксиому можно переформулировать:

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = \sum_{S \subset N} k(S) f(S),$$

где $k(S)$ — число ключевых игроков в коалиции S.

6. Теорема классификации

Теорема 4. 1) Пусть индекс влияния $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP и T. Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i, S), \tag{9}$$

где $g(i,S)$ — произвольные числа.

2) Пусть индекс влияния $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP, T и $SymGL_1$. Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(S), \tag{10}$$

где $g(S)$ — произвольные числа.

3) Пусть индекс влияния $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP, T и обеим частям SymGL. Тогда

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(|S|), \tag{11}$$

где $g(k)$ — произвольные числа.

Отметим, что каждое следующее условие теоремы усиливает предыдущее.

Для доказательства потребуются следующие две леммы.

Лемма 2 [5]. *Пусть $S \in M(v)$. Тогда*

$$W_i(v_{-S}) = \begin{cases} W_i(v) \setminus \{S\}, & \text{если } i \in S; \\ W_i(v) \cup \{S \cup \{i\}\}, & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Пример 7. Пусть $N = \{1,2,3,4\}$, выигрывающие коалиции в игре v — все трех- и четырехэлементные подмножества, $\{1,2\}$ и $\{3,4\}$, $S = \{1,2\}$.

Выигрывающими коалициями в v_{-S} будут $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$.

В таблице знаком + отмечены коалиции, в которых соответствующий участник ключевой (слева от черты — для игры v, справа — для v_{-S}).

игрок	$\{1,2\}$	$\{3,4\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{1,2,3,4\}$
1	$+/-$	$-/-$	$+/+$	$+/+$	$-/-$	$-/-$	$-/-$
2	$+/-$	$-/-$	$+/+$	$+/+$	$-/-$	$-/-$	$-/-$
3	$-/-$	$+/+$	$-/+$	$-/-$	$+/+$	$+/+$	$-/-$
4	$-/-$	$+/+$	$-/-$	$-/+$	$+/+$	$+/+$	$-/-$

Игроки 1 и 2 при переходе к игре v_{-S} перестают быть ключевыми в коалиции $\{1,2\}$ (она стала проигрывающей), а 3 и 4 становятся ключевыми соответственно в коалициях $\{1,2,3\}$ и $\{1,2,4\}$. В остальных клетках таблицы ничего не меняется.

Лемма 3. Пусть $S \in M(v)$ и $\Phi(v)$ удовлетворяет формуле (9). Тогда

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \begin{cases} g(i,S), & \text{если } i \in S; \\ -g(i, S \cup \{i\}), & \text{если } i \notin S. \end{cases}$$

Доказательство.

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i,S) - \sum_{S \in W_i(v_{-S})} g(i,S) =$$

$$= \sum_{\substack{S \in W_i(v), \\ S \notin W_i(v_{-S})}} f(g,S) - \sum_{\substack{S \in W_i(v_{-S}), \\ S \notin W_i(v)}} g(i,S).$$

Последние две суммы содержат по лемме 2 только одно слагаемое: $g(i,S)$, если $i \in S$ и $-g(i, S \cup \{i\})$, если $i \notin S$. Лемма доказана.

Теперь перейдем к доказательству теоремы.

Доказательство. Докажем сначала, что для индекса влияния, удовлетворяющего одной из формул (9)—(11), выполняются и соответсвующие аксиомы. Поскольку из (11) следует (10), а из (10) — (9), выполнение аксиом T и NP достаточно доказать для случая (9), а первую часть SymGL — для (10).

Пусть игрок i не ключевой ни в одной коалиции в игре v. Тогда сумма в определении $\Phi_i(v)$ не содержит ни одного слагаемого, поэтому равна 0. Значит, выполняется аксиома NP.

По лемме 3 $\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})$ зависит только от i и S, но не зависит от v, поэтому для любых игр v и w $\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(w) - \Phi_i(w_{-S})$, если только игры v_{-S} и w_{-S} определены, т.е. $S \in M(v)$ и $S \in M(w)$. Значит, выполняется аксиома T.

Пусть $\Phi(v)$ удовлетворяет формуле (10), $S \in M(v)$, $i, j \in S$. По лемме 3

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = g(S) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S}).$$

Следовательно, выполняется первая часть аксиомы SymGL.

Наконец, пусть $\Phi(v)$ удовлетворяет формуле (11), $S \in M(v)$, $i, j \notin S$. По лемме 3

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = -g(|S \cup \{i\}|) = -g(|S \cup \{j\}|) = \Phi_j(v) - \Phi_j(v_{-S}).$$

Следовательно, выполняется вторая часть аксиомы SymGL.

Докажем обратное утверждение.

1) Определим $g(i,S)$ как

$$g(i,S) = \Phi_i(u^S) - \Phi_i(u^S_{-s}).$$

Докажем теперь первое утверждение теоремы по индукции по $|W_i(v)|$. Если $|W_i(v)| = 0$, т.е. игрок i не ключевой ни в какой выигрывающей коалиции, то по аксиоме NP $\Phi_i(v) = 0$, как и должно получится при суммировании по пустому множеству.

Пусть теперь $|W_i(v)| = k$ и утверждение доказано для всех игр, в которых i ключевой в меньшем числе коалиций. В игре v существует минимальная выигрывающая коалиция, в которой i — ключевой. Обозначим ее через T. Тогда

$$\Phi_i(v) = (\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-T})) + \Phi_i(v_{-T}) = \left(\Phi_i(u^T) - \Phi_i(u^T_{-T})\right) + \Phi_i(v_{-T}) =$$
$$= g(i,T) + \sum_{S \in W_i(v_{-T})} g(i,S) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i,S).$$

Второе равенство следует из аксиомы T, третье из определения $g(i,T)$ и предположения индукции, последнее из леммы 2: $W_i(v) = W_i(v_{-T}) \cup T$.

2) Поскольку первая часть теоремы доказана, достаточно проверить, что $g(i,S)$ не зависит от i: для любой коалиции S и любых $i, j \in S$ $g(i,S) = g(j,S)$ (если $i \notin S$, $g(i,S)$ не определено), а это следует из первой часть аксиомы SymGL, примененной к u^S:

$$g(i,S) = \Phi_i(u^S) - \Phi_i(u^S_{-s}) = \Phi_j(u^S) - \Phi_j(u^S_{-s}) = g(j,S).$$

3) Поскольку вторая часть теоремы доказана, достаточно проверить, что $g(S)$ зависит только от $|S|$: для любых двух коалиций одного размера S и S' $g(S) = g(S')$.

Пусть $T = S \cap S'$, Тогда $S = \{s_1, \dots, s_k\} \cup T$, а $S' = \{s'_1, \dots, s'_k\} \cup T$, где элементы $s_1, \dots, s_k, s'_1, \dots, s'_k$ попарно различны. Рассмотрим последовательность коалиций, в которых s_i поочередно заменяются на s'_i:

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & S, \\ S_1 & = & \{s'_1, s_2, \dots, s_k\} \cup T, \\ & & \dots \\ S_i & = & \{s'_1, \dots s'_i, s_{i+1}, \dots, s_k\} \cup T, \\ & & \dots \\ S_k & = & S'. \end{array}$$

Достаточно доказать, что для любого i $g(S_i) = g(S_{i+1})$, т.е. утверждение достаточно доказать для двух коалиций S и S' одинакового размера, отличающихся только одним элементом: $S = T \cup \{i\}$, $S' = T \cup \{j\}$.

Рассмотрим игру u^T. Поскольку $T \in M(u^T)$, $i, j \notin T$, то по второй части аксиомы SymGL и лемме 3

$$g(S) = -\left(\Phi_i(u^T) - \Phi_i(u^T_{-T})\right) = -\left(\Phi_j(u^T) - \Phi_j(u^T_{-T})\right) = g(S').$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В доказательстве второй половины 1-го пункта теоремы аксиома T используется только в случае, когда $i \in S$. Поэтому ее можно заменить на аксиому ST. Следовательно, для любого индекса, удовлетворяющего аксиомам ST и NP, также верна формула 9.

По теореме 4 любой индекс, для которого верна формула 9, удовлетворяет аксиоме T. Поэтому T следует из аксиом ST и NP.

По всей видимости, аксиома T следует и просто из аксиомы ST, но доказательство этого факта выходит за рамки статьи.

Замечание 2. Аксиома анонимности верна, только если выполняется условие третьего пункта теоремы, т.е. An следует из NP, T и SymGL, но не следует из NP, T и SymGL_1.

7. Аксиоматики для стандартного индекса влияния

Выясним, каким из упомянутых выше аксиом удовлетворяет стандартный индекс влияния.

Лемма 4. Индекс влияния $St(v)$, определенный на множестве SGP_n, удовлетворяет аксиомам NP, TP, T и ST. Если ограничить $St(v)$ на множество симметричных игр с предпочтениями ($SSGP_n$), то $St(v)$ удовлетворяет также первой части аксиомы SymGL.

Доказательство. Стандартный индекс подпадает под действие 1-го пункта теоремы 4, поэтому для него выполняются аксиомы NP и T. В случае симметричных игр $St(v)$ подпадает под действие и 2-го пункта теоремы 4, поэтому выполняется первая часть аксиомы SymGL.

Аксиома ST — это в точности утверждение леммы 3.

Наконец, найдем сумму всех координат вектора $St(v)$.

$$\sum_{i=1}^{n} St_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \in W_i(v)} f(i, S),$$

т.е. выполняется аксиома TP. Лемма доказана.

Замечание 3. Для несимметричных игр $f(i,S)$ не обязательно равно $f(j,S)$, поэтому первая часть аксиомы SymGL не выполняется.

Замечание 4. Для игр с предпочтениями (как симметричных, так и несимметричных) не выполняется вторая часть аксиомы SymGL, поскольку если $i \notin S$, то $St_i(v) - St_i(v_{-S}) = -f(i, S \cup \{i\})$, а $f(i, S \cup \{i\})$ зависит от i.

7.1. Следствие из теоремы классификации

Для однозначного определения стандартного индекса достаточно двух аксиом, но одна из них очень сильна.

Теорема 5. Индекс влияния $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP и ST тогда и только тогда, когда $\Phi(v) = St(v)$.

Доказательство. По лемме 4 $St(v)$ удовлетворяет аксиомам NP и ST. Докажем обратное.

Пусть $\Phi(v)$ удовлетворяет аксиомам NP и ST. Согласно замечанию 1 в этом случае верна и аксиома T. Поэтому (первое утверждение теоремы 4)

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} g(i,S).$$

Так как $S \in M(u^S)$, по лемме 3 $g(i,S) = St_i(u^S) - St_i(u^S_{-S})$, а по аксиоме ST $St_i(u^S) - St_i(u^S_{-S}) = f(i,S)$. Значит, $g(i,S) = f(i,S)$ и

$$\Phi_i(v) = \sum_{S \in W_i(v)} f(i,S) = St_i(v),$$

что и требовалось.

7.2. Аналог аксиоматики Ларуелль—Валенсиано

В случае симметричных игр стандартный индекс однозначно определяют аксиомы NP, T, SymGL_1 и TP. Для доказательства нужна следующая лемма.

Лемма 5. *Из аксиомы TP следует, что для любой простой игры с предпочтениями и любой минимальной выигрывающей коалиции S*

$$\sum_{i \in S}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})) - \sum_{j \notin S}(\Phi_j(v_{-S}) - \Phi_j(v)) = \sum_{i \in S} f(i,S) - \sum_{j \notin S} f(j, S \cup \{j\}). \tag{12}$$

Доказательство. Сначала отметим, что левая часть формулы (12) — это просто по-другому записанное выражение

$$\sum_{i=1}^{n}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})).$$

Вычислим его, используя аксиому TP и лемму 2.

$$\sum_{i=1}^{n}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{T \in W_i(v)} f(i,T) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{T \in W_i(v_{-S})} f(i,T) =$$
$$\sum_{i \in S} \sum_{T \in W_i(v) \setminus W_i(v_{-S})} f(i,T) - \sum_{j \notin S} \sum_{T \in W_j(v_{-S}) \setminus W_j(v)} f(j,T) = \sum_{i \in S} f(i,S) - \sum_{j \notin S} f(j, S \cup \{j\}).$$

Замечание 5. Обратное утверждение будет верно, если $\Phi(0) = 0$. Такая переформулировка аксиомы TP — аналог аксиомы AGLB из аксиоматики Ларуелль—Валенсиано.

Следствие 1. *В случае симметричных игр $f(i,S)$ не зависит от i и равенство (12) принимает вид*

$$\sum_{i \in S}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})) - \sum_{j \notin S}(\Phi_j(v_{-S}) - \Phi_j(v)) = s\, f(S) - \sum_{j \notin S} f(S \cup \{j\}). \tag{13}$$

Теперь докажем основную теорему этого раздела.

Теорема 6. Индекс влияния $\Phi(v)$, определенный на $SSGP_n$, удовлетворяет аксиомам NP, TP, T и $SymGL_1$ тогда и только тогда, когда $\Phi(v) = St(v)$.

Доказательство. По лемме 4 стандартный индекс влияния удовлетворяет всем вышеупомянутым аксиомам. Докажем обратное.

Докажем утверждение индукцией по числу выигрывающих коалиций, неоднократно используя при этом лемму 4.

Основание индукции. Если выигрывающих коалиций нет, это означает, что ни один игрок не будет ключевым ни в одной коалиции. Следовательно, по аксиоме NP $\Phi_i(v) = 0$ для всех i. Поскольку $St(v)$ тоже удовлетворяет NP, $St_i(v) = 0$. Значит, $\Phi_i(v) = St_i(v)$.

Шаг индукции. Возможны два случая.

1) Пусть в игре v одна минимальная выигрывающая коалиция S, т.е. $v = u^S$. В этом случае коалиция T будет выигрывающей тогда и только тогда, когда она содержит S, т.е. содержит в себе всех игроков из S. Поэтому, если игрок $j \notin S$, от его вхождения или невхождения в коалицию T ничего не изменится — T и $T \setminus \{j\}$ будут выигрывающими или проигрывающими одновременно. Значит, все игроки, не входящие в S, будут болванами в игре v. И, если $i \notin S$, $\Phi_i(v) = St_i(v) = 0$.

Пусть теперь $i \in S$. Запишем аксиому TP для v и индексов Φ и St.

$$\sum_{i\in S}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})) - \sum_{j\notin S}(\Phi_j(v_{-S}) - \Phi_j(v)) = s\,f(S) - \sum_{j\notin S} f(S\cup\{j\}). \tag{14}$$

$$\sum_{i\in S}(St_i(v) - St_i(v_{-S})) - \sum_{j\notin S}(St_j(v_{-S}) - St_j(v)) = s\,f(S) - \sum_{j\notin S} f(S\cup\{j\}). \tag{15}$$

Правые части равенств совпадают. По NP для всех j, не входящих в S, $\Phi_j(v) = 0 = St_j(v)$, по предположению индукции для всех j $\Phi_j(v_{-S}) = St_j(v_{-S})$.

Подставив в (14) и сравнивая с (15), получим

$$\sum_{i\in S}(\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S})) = \sum_{i\in S}(St_i(v) - St_i(v_{-S})).$$

Согласно первой части аксиомы SymGL все слагаемые и той, и другой суммы попарно равны. Следовательно, для любого $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = St_i(v) - St_i(v_{-S}).$$

Наконец, по предположению индукции $\Phi_i(v_{-S}) = St_i(v_{-S})$. Значит, и $\Phi_i(v) = St_i(v)$.

2) Пусть теперь $M(v) > 1$, т.е. в игре v есть две минимальные выигрывающие коалиции S и T, содержащие s и t элементов соответственно. При вычеркивании сначала S, потом T получается та же игра, что и при вычеркивании сначала T, потом S.

Согласно аксиоме T для Φ, предположению индукции и аксиоме T для $St(v)$,

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = \Phi_i(v_{-T}) - \Phi_i(v_{-S-T}) = St_i(v_{-T}) - St_i(v_{-S-T}) = St_i(v) - St_i(v_{-S}).$$

Но по предположению индукции $\Phi_i(v_{-S}) = St_i(v_{-S})$. Значит, и $\Phi_i(v) = St_i(v)$.

8. Применение к индексам Банцафа и Шепли—Шубика

Выше (см. пример 2) было показано, что при подстановке вместо $f(S)$ единицы индекс влияния $St(v)$ превращается в общий индекс Банцафа, а при подстановке $\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ — в индекс Шепли—Шубика. Посмотрим, что при этих подстановках произойдет с аксиомами для $St(v)$.

Классический набор аксиом для индекса Шепли—Шубика включает в себя аксиомы NP, An, T и аксиому эффективности E: для любой игры $v \in SG_n$

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(v) = 1.$$

Т е о р е м а 7 [3]. *Пусть $\Phi : SG_n \to \mathbb{R}^n$. Тогда Φ удовлетворяет аксиомам NP, An, T и E, если и только если Φ — индекс Шепли—Шубика.*

П р е д л о ж е н и е 1. *В аксиоматике Дуби—Шепли для общего индекса Банцафа и аксиоматике Шепли для индекса Шепли—Шубика аксиому анонимности можно заменить на первую часть SymGL.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Подставим $f(S) = 1$. Тогда аксиомы NP и TP совпадут с аксиомами NP и BzTP соответственно. Аксиома T совпадет с T* из аксиоматики Ларуелль—Валенсиано, а SymGL_1 — с первой частью аксиомы SymGL из той же аксиоматики. В [5, с. 95] доказано, что аксиомы T и T* эквивалентны, следовательно, по теореме 6 аксиомы NP, BTP, T и первая часть SymGL однозначно задают общий индекс Банцафа.

Рассуждение для индекса Шепли—Шубика аналогично и отличается лишь тем, что при подстановке $f(S) = \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$ аксиома TP превратится в аксиому эффективности из аксиоматики Шепли.

Аксиома ST для индекса Банцафа записывается просто и красиво. Для любой игры $v \in SG_n$, любой коалиции $S \in M(v)$ и любого $i \in S$

$$\Phi_i(v) - \Phi_i(v_{-S}) = 1.$$

Эта аксиома вкупе с NP однозначно определяют индекс Банцафа. Аналогичный (но менее красивый) результат верен и для индекса Шепли-Шубика.

Таким образом, получены две аксиоматики для индексов Банцафа (Пенроуза) и Шепли—Шубика, не использующие аксиому анонимности. Аналогичные рассуждения можно провести и для аксиоматики Ларуелль—Валенсиано.

9. Заключение

Полученные аксиоматики для индексов Банцафа и Шепли—Шубика вкупе с результатами [5] показывают, что аксиомы An, T (T*) и SymGL (SymGL_1) примерно равноценны — в аксиоматику можно включить любые две из них. При этом SymGL следует из An и T* (см. [5]), а An — из T* и SymGL (замечание 2).

Теорему 6 тоже можно вывести как следствие теоремы классификации, но приведенное в статье доказательство красивее, хотя и длиннее.

Автор благодарен Ф.Т. Алескерову за идею самой задачи и предложенные удачные обозначения, А.В. Савватееву за идею теоремы 4, В.И. Вольскому, К.Б. Погорельскому и В.А. Якубе за полезное обсуждение и отдельно К.Б. Погорельскому и В.А. Якубе за многочисленные замечания по тексту статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shapley L.S., Shubik M.* A method for Evaluating the Distribution of Power in a Committee System// Amer. Polit. Sci. Rev., 1954. V. 48(3). P. 787-792.

2. *Banzhaf J. F.* Weighted Voting Doesn't Work: A Mathematical Analysis// Rutgers Law Rev., 1965. V. 19. P. 317-343.

3. *Dubey P.* On the Uniqueness of the Shapley Value// Int. J. Game Theory. 1975. V. 4. P. 131-139.

4. *Dubey P., Shapley L.S.* Mathemaical Properties of the Banzhaf Power Index// Math. Oper. Res. 1979. V. 4. P. 99-131.

5. *Laruelle A., Valenciano F.* Shapley-Shubik and Banzhat Indices Revisited. Math. Oper. Res. 2000. V. 26. № 1. P. 89-104.

6. *Алескеров Ф.Т.* Индексы влияния, учитывающие предпочтения участников по созданию коалиций// ДАН. 2007. Т. 414. № 5. с. 594-597.

7. *Taylor A.D., Zwicker W.S.* Simple Games. Princeton University Press, 1999.

8. *Penrose L.S.* Elementary statistics of majority voting// J. Royal Staticti. Soci. 1946. V. 109. P. 53-57.

9. *Johnston R.J.* On the Measurement of Power: Some Reactions to Laver// Environment and Planning. 1978. V. 10. P. 907-914.

10. *Deegan J., Packel E.W.* A New Index of Power for Simple n-Person Games// Int. J. Game Theory. 1978. V. 7(2). P.113-123.

11. *Holler M.J., Packel E.W.* Power, Luck and the Right Index// J. Econom. 1983. V.43, P. 21-29.

12. *Шварц Д.А.* О вычислении индексов влияния, учитывающих предпочтения участников// АиТ. М., 2009. № 3, С. 152-159.