# Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором

В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка

В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции структурно устойчивых диффеоморфизмов замкнутых трёхмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор.

*Библиография*: 24 названия. *УДК*: 517.938. *MSC2010*: 37D20. *Ключевые слова и фразы*: энергетическая функция, *DA*-диффеоморфизм, структурная устойчивость.

## Посвящение

Авторы посвящают эту работу Юлию Сергеевичу Ильяшенко, который является для нас примером замечательного руководителя научной школы. Он внимательно следит за каждым из своих учеников, умело напутствует и направляет их по жизни. Нам посчастливилось окунуться в добрую атмосферу этой школы. По сей день нас связывают не только полезные взаимно обогащающие научные контакты, но и искренне дружеские отношения. С огромной благодарностью вспоминаются выступления на семинаре у Юлия Сергеевича в МГУ, его желание понять и донести до аудитории результаты докладчика. Когда имелась возможность, он всегда посещал наши доклады на конференциях и семинарах, подбадривал своими меткими замечаниями. Хочется надеяться, что и впредь наши научные и жизненные пути будут иметь множественные пересечения.

## Введение и формулировка результатов

В силу тесной взаимосвязи между динамической системой и её *функцией Ляпунова* (непрерывной функцией, не возрастающей вдоль траекторий системы), качественное поведение системы во многом определяется структурой её функции Ляпунова. Особенно сильно этот эффект проявляется в случае, когда система обладает *энергетической функцией*, то есть гладкой функцией



Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-01-12452-офи-м, 15-01-03687-а) и Российского научного фонда (грант 14-41-00044). В данной научной работе использованы результаты проекта «Динамические системы и их приложения», выполненного в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 г.

Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы. Кроме того, функция — объект много более удобный для изучения, чем однопараметрическое семейство отображений многообразия, поэтому естественно встаёт вопрос о существовании энергетической функции у динамической системы. Наличие функции Ляпунова у любой динамической системы доказано К. Конли [3] в 1978 г., этот факт был назван позже фундаментальной теоремой динамических систем (см., например, [20, теорема 1.1, с. 404]). Существование энергетической функции у любого потока следует из работы В. Вильсона и Дж. Йорке [24]. Каскады даже с регулярной динамикой не обладают в общем случае энергетической функцией. Такие примеры построены в работе Д. Пикстона [14], а также В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [6], в последней также найдены достаточные условия существования энергетической функции Морса для трёхмерных каскадов Морса — Смейла. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением, доказанный в настоящей работе.

Более детально. Пусть $f\in \mathrm{Diff}^1(M)$ — $C^1$-гладкий диффеоморфизм замкнутого $n$-мерного ($n\geqslant 2$) многообразия $M$, снабжённого некоторой римановой метрикой $d$. Множество $\Lambda\subset M$, инвариантное относительно $f$, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения $TM$ многообразия $M$ на $\Lambda$ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda\oplus E^u_\Lambda$ $df$-инвариантных подрасслоений $E^s_\Lambda$, $E^u_\Lambda$ ($\dim E^s_x+\dim E^u_x=n$, $x\in\Lambda$) и существуют такие константы $C_s>0$, $C_u>0$, $0<\lambda<1$, что

$$\begin{aligned} \|df^m(v)\| &\leqslant C_s\lambda^m\|v\| \quad \text{для } v\in E^s_\Lambda,\\ \|df^{-m}(v)\| &\leqslant C_u\lambda^m\|v\| \quad \text{для } v\in E^u_\Lambda,\ m>0. \end{aligned}$$

Гиперболическая структура порождает существование так называемых *устойчивых* и *неустойчивых* многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [10, 22]. Для любой точки $x\in\Lambda$ существует инъективная иммерсия $J^s_x\colon \mathbb{R}^s\to M$, образ которой $W^s_x=J^s_x(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки* $x$, такая что выполняются следующие свойства:

(1) $T_xW^s_x=E^s_\Lambda$;
(2) точки $x, y\in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y))\to 0$ при $n\to\infty$;
(3) $f(W^s_x)=W^s_{f(x)}$;
(4) если $x, y\in\Lambda$, то либо $W^s_x=W^s_y$, либо $W^s_x\cap W^s_y=\varnothing$;
(5) если точки $x, y\in\Lambda$ близки на $M$, то $W^s_x$, $W^s_y$ $C^1$-близки на компактных множествах.

*Неустойчивое многообразие* $W^u_x$ точки $x\in\Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма $f^{-1}$. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. С учётом свойства (3) устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой её окрестности $U(x)$ и любого натурального числа $N$ найдётся $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geqslant N$, такое что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма $f$ будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм $f$ *удовлетворяет аксиоме A* (или, что то же самое, является *A-диффеоморфизмом*), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

Смейл [23] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*. Пусть диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ удовлетворяет аксиоме $A$. Тогда множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом объемлющее многообразие $M$ можно представить следующим образом:

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s_{\Lambda_i} = \bigcup_{i=1}^{k} W^u_{\Lambda_i},$$

где

$$W^s_{\Lambda_i} = \bigcup_{x \in \Lambda_i} W^s_x \quad \text{и} \quad W^u_{\Lambda_i} = \bigcup_{x \in \Lambda_i} W^u_x.$$

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу транзитивности $f$ на каждом базисном множестве $\Lambda_i$, ограничения расслоений $E^s_{\Lambda_i}$, $E^u_{\Lambda_i}$ на $\Lambda_i$ имеют постоянную размерность во всех точках $x \in \Lambda_i$.

Компактное $f$-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f$, если оно имеет такую компактную окрестность $U_A$, что $f(U_A) \subset \operatorname{int} U_A$ и $A = \bigcap_{k \geqslant 0} f^k(U_A)$. *Репеллер* определяется как аттрактор для $f^{-1}$.

В силу [16], базисное множество $\Lambda$ диффеоморфизма $f$ является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^u_x$ $(\Lambda = \bigcup_{x \in \Lambda} W^s_x)$.

Аттрактор $\Lambda$ $A$-диффеоморфизма $f$ называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim \Lambda$ равна размерности неустойчивого многообразия $W^u_x$, $x \in \Lambda$. Репеллер диффеоморфизма $f$ называется *сжимающимся*, если он является растягивающимся аттрактором для $f^{-1}$.

Два диффеоморфизма $f, g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называются *топологически сопряжёнными*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon M \to M$ такой, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Диффеоморфизм $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует такая его окрестность $U(f) \subset \mathrm{Diff}^1(M)$, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжён $f$. Если потребовать, чтобы сопрягающий гомеоморфизм был близок к тождественному в $C^0$-топологии, то получим определение *грубого* диффеоморфизма. Теперь известно, что понятия «грубости» и «структурной устойчивости» эквивалентны, хотя доказательство этого факта весьма нетривиально (см. обзор [1], где обсуждаются различные определения и соответствующие результаты).

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют сильным условием трансверсальности. Пусть $W_1, W_2 \subset M$ — два иммерсированных многообразия, имеющих непустое пересечение. По определению, $W_1$, $W_2$ *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство $T_xM$ порождается касательными подпространствами $T_xW_1$ и $T_xW_2$. В частности, если $W_1$, $W_2$ пересекаются трансверсально, то $\dim T_xW_1 + \dim T_xW_2 \geqslant \dim T_xM$.

Говорят, что $A$-диффеоморфизм *удовлетворяет сильному условию трансверсальности*, если для любых точек $x, y \in NW(f)$ многообразия $W^s_x$, $W^u_y$ имеют только трансверсальные пересечения. Известно [11, 19], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является $A$-диффеоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности. Необходимость доказал Мане [11], достаточность — Робинсон [19].

В настоящей работе рассматривается класс $G$ структурно устойчивых диффеоморфизмов на 3-многообразии $f\colon M \to M$, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор $\Omega$. В этом случае (см. предложение 1) многообразие $M$ диффеоморфно трёхмерному тору и аттрактор $\Omega$ — единственное нетривиальное базисное множество диффеоморфизма $f$. Главным результатом настоящей работы является следующий факт.

**Теорема 1.** *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне базисного множества $\Omega$.*

## § 1. Динамические свойства диффеоморфизмов класса $G$

В этом разделе мы изложим необходимую для доказательства теоремы 1 информацию о динамике диффеоморфизма $f \in G$, следуя работе [7]. Заметим, что все результаты работы [7] сформулированы для многообразия размерности $n \geqslant 3$ и случая, когда $\Omega$ является ориентируемым базисным множеством[1]. Однако в работе [25] доказано, что в случае нечётного $n$ базисное множество $\Omega$ является ориентируемым. Поэтому везде ниже, формулируя выжимку результатов работы [7] для случая $n = 3$, мы не требуем от $\Omega$ дополнительно быть ориентируемым.

Пусть $f \in G$ и $\Omega$ — двумерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма $f$. Тогда $\dim W^s_x = 1$ для любой точки $x \in \Omega$, что позволяет ввести обозначение $(z, y)^s$ ($[z, y]^s$) для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия $W^s_x$, ограниченной точками $y, z \in W^s_x$.

[1] Базисное множество $\Lambda$ называется *ориентируемым*, если для любой точки $x \in \Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же ($+1$, либо $-1$). В противном случае базисное множество $\Lambda$ называется *неориентируемым* (см., например, [9, с. 622]).

Множество $W^s_x\backslash x$ состоит из двух компонент связности. Хотя бы одна из этих компонент имеет непустое пересечение с множеством $\Omega$. Точка $x\in\Omega$ называется *s-граничной*, если одна из компонент связности множества $W^s_x\backslash x$ не пересекается с $\Omega$, будем обозначать такую компоненту через $W^{s\varnothing}_x$. Множество $\Gamma_\Omega$ граничных точек множества $\Omega$ не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на *ассоциированные* пары $(p,q)$ точек одинакового периода так, что 2-*связка* $B_{pq}=W^u_p\cup W^u_q$ является достижимой изнутри границей[2] компоненты связности множества $M\backslash\Omega$.

Для каждой пары $(p,q)$ ассоциированных граничных точек множества $\Omega$ построим так называемую *характеристическую сферу*.

Пусть $B_{pq}$ — 2-связка аттрактора $\Omega$, состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u_p$ и $W^u_q$ ассоциированных граничных точек $p$ и $q$ соответственно, и $m_{pq}$ — период точек $p,q$. Тогда для любой точки $x\in W^u_p\backslash p$ существует единственная такая точка $y\in(W^u_q\cap W^s_x)$, что дуга $(x,y)^s$ не пересекается с множеством $\Omega$. Определим отображение

$$\xi_{pq}\colon B_{pq}\backslash\{p,q\}\to B_{pq}\backslash\{p,q\},$$

положив $\xi_{pq}(x)=y$ и $\xi_{pq}(y)=x$. Тогда

$$\xi_{pq}(W^u_p\backslash p)=W^u_q\backslash q\quad\text{и}\quad\xi_{pq}(W^u_q\backslash q)=W^u_p\backslash p,$$

т. е. отображение $\xi_{pq}$ переводит друг в друга проколотые неустойчивые многообразия 2-связки и является инволюцией ($\xi^2_{pq}=\mathrm{id}$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение $\xi_{pq}$ является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W^u_p}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку $p$, поэтому существует такой гладкий замкнутый 2-диск $D_p\subset W^u_p$, что $p\in D_p\subset\mathrm{int}(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq}=\bigcup_{x\in\partial D_p}(x,\xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому двумерному цилиндру $\mathbb{S}^1\times[0,1]$. Множество $C_{pq}$ называют *связывающим цилиндром*. Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в $W^u_q$ двумерный 2-диск $D_q$ такой, что $q\in D_q\subset\mathrm{int}(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq}=D_p\cup\cup C_{pq}\cup D_q$ гомеоморфно двумерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке $B_{pq}$ (см. рис. 1).

Положим $T(f)=NW(f)\backslash\Omega$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f\in G$ сформулируем в виде предложения (см. рис. 2 для лучшего понимания).

**Предложение 1.** *Пусть $f\colon M\to M$ — диффеоморфизм из класса $G$. Тогда имеют место следующие факты*:

---

[2] Пусть $G\subset M$ — открытое множество с границей $\partial G$ ($\partial G=cl(G)\setminus\mathrm{int}(G)$). Подмножество $\delta G\subset\partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области $G$, если для любой точки $x\in\delta G$ найдётся открытая дуга, полностью лежащая в $G$ и такая, что $x$ является одной из её концевых точек.

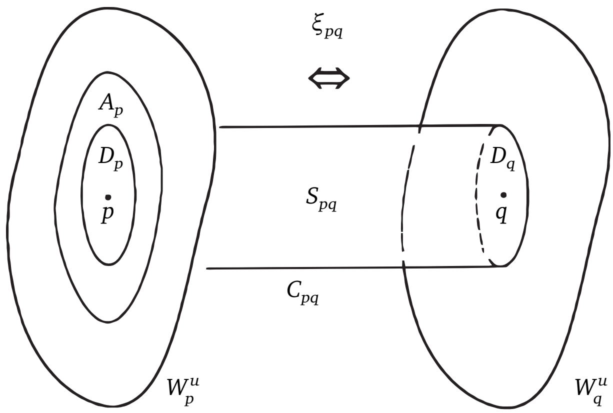


Рис. 1. Характеристическая сфера

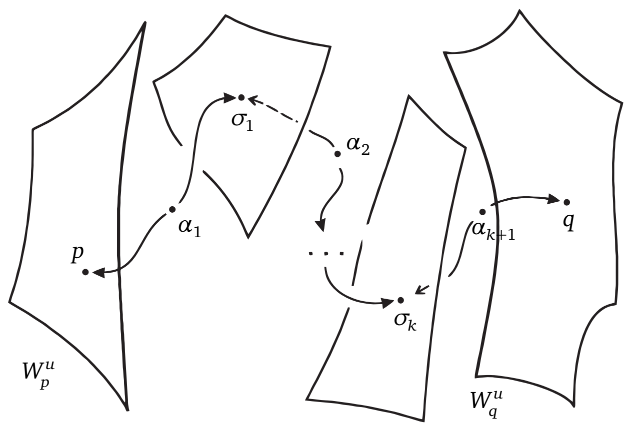


Рис. 2. Дуга $l_{pq}$

(1) *объемлющее многообразие $M$ гомеоморфно трёхмерному тору* $\mathbb{T}^3$ [7, теорема 5.1];
(2) каждая характеристическая сфера $S_{pq}$ ограничивает 3-шар $Q_{pq}$ такой, что $T(f)\subset\bigcup_{(p,q)\subset\Gamma_\Omega} Q_{pq}$ [7, теорема 5.1];
(3) для каждой ассоциированной пары $(p,q)$ граничных точек существует натуральное число $k_{pq}$ такое, что $T(f)\cap Q_{pq}$ состоит из $k_{pq}$ периодических источников $\alpha_1,\dots,\alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq}-1$ седловых периодических точек $\sigma_1,\dots,\sigma_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге [7, следствие 5.2]
$$l_{pq}=W^{s\varnothing}_p\cup\bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1}W^s_{\sigma_i}\cup\bigcup_{i=1}^{k}W^s_{\alpha_i}\cup W^{s\varnothing}_q;$$
(4) пересечение $W^u_{\sigma_i}\cap Q_{pq}$, $i=1,\dots,k_{pq}-1$, состоит в точности из одного двумерного диска [7, теорема 4.1].

## § 2. Существование энергетической функции в бассейне одномерного аттрактора градиентно-подобного 3-диффеоморфизма

В этом разделе мы приводим результаты работы [5] и книги [8], касающиеся критерия существования энергетической функции в бассейне одномерного аттрактора градиентно-подобного 3-диффеоморфизма.

В 1978 г. К. Конли [3] доказал существование функции Ляпунова для любого потока (каскада), заданного на гладком замкнутом ориентируемом $n$-многообразии $N$, то есть непрерывной функции, которая строго убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и постоянна на компонентах этого множества. Для диффеоморфизмов Морса — Смейла[3] цепно рекуррентное множество совпадает с множеством периодических орбит, так что в этом случае представляется естественным искать функцию Ляпунова в классе функций Морса. В 1977 г. Д. Пикстон [14] определил функцию Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g\colon N\to N$ как функцию Морса $\varphi\colon N\to\mathbb{R}$, такую что $\varphi(g(x))<\varphi(x)$, если $x$ — блуждающая точка, и $\varphi(g(x))=\varphi(x)$, если $x$ — периодическая точка. Такая функция может быть построена, в частности, с помощью перехода к надстройке над заданным диффеоморфизмом Морса — Смейла и дальнейшим применением результатов работы К. Мейера [12], построившего энергетическую функцию Морса — Ботта для произвольного потока Морса — Смейла.

Если $\varphi$ — это функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g\colon N\to N$, то любая периодическая точка $\beta$ является максимумом ограничения $\varphi$ на неустойчивое многообразие $W^u_\beta$ и минимумом ограничения $\varphi$ на устойчивое многообразие $W^s_\beta$. Если эти экстремумы являются невырожденными, то инвариантные многообразия точки $\beta$ трансверсальны всем регулярным множествам уровня $\varphi$ в некоторой окрестности $U_\beta$ точки $\beta$. Функция Ляпунова $\varphi\colon N\to\mathbb{R}$ для диффеоморфизма Морса — Смейла $f\colon N\to N$ называется *функцией Морса — Ляпунова*, если любая периодическая точка $\beta$ является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения $\varphi$ на неустойчивое (устойчивое) многообразие $W^u_\beta$ ($W^s_\beta$).

Среди функций Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g$ функции Морса — Ляпунова образуют открытое всюду плотное в $C^\infty$-топологии множество.

Если $\beta$ — критическая точка функции Морса $\varphi\colon N\to\mathbb{R}$, то, согласно лемме Морса (см., например, [13]), в некоторой окрестности $V(\beta)$ точки $\beta$ существует локальная система координат $x_1,\dots,x_n$, называемая *координатами*

[3] Диффеоморфизм $g\colon N\to N$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(g)$ состоит из конечного числа гиперболических периодических точек ($NW(g)=\mathrm{Per}(g)$), инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально.

*Морса*, такая что $x_j(p)=0$ для каждого $j=\overline{1,n}$ и $\varphi$ имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi(\beta)-x_1^2-\ldots-x_b^2+x_{b+1}^2+\ldots+x_n^2,$$

где $b$ — индекс[4] точки $\beta$. Если $\varphi$ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $f\colon N\to N$, то, в силу [14], для любой периодической точки $\beta\in\mathrm{Per}(g)$ выполняется равенство $b=\dim W^u_\beta$.

Если $\varphi$ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса — Смейла $g$, то любая периодическая точка диффеоморфизма $g$ является критической точкой функции $\varphi$. Обратное, вообще говоря, неверно: функция Ляпунова может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками для $g$. Д. Пикстон [14] определил *энергетическую функцию* для диффеоморфизма Морса — Смейла $g$ как функцию Морса — Ляпунова $\varphi$, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек диффеморфизма $g$. Он доказал, что любой диффеоморфизм Морса — Смейла, заданный на поверхности, обладает энергетической функцией, однако существует пример диффеоморфизма Морса — Смейла на трёхмерной сфере $\mathbb{S}^3$, не имеющего энергетической функции. В работе В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [4] доказано, что функция Ляпунова в примере Пикстона имеет не менее шести критических точек.

Напомним, что диффеоморфизм Морса — Смейла $g\colon N\to N$ называется *градиентно-подобным*, если для любой пары периодических точек $\beta,\gamma$ $(\beta\neq\gamma)$ из условия $W^u_\beta\cap W^s_\gamma\neq\varnothing$ следует, что $\dim W^s_\beta<\dim W^s_\gamma$. Следующее определение выделяет для градиентно-подобных диффеоморфизмов класс функций Морса — Ляпунова с дополнительными свойствами, аналогичными свойствам функций, введённых С. Смейлом [21] для градиентно-подобных векторных полей.

Функция Морса — Ляпунова $\varphi$ для градиентно-подобного диффеоморфизма $g$ называется *самоиндексирующейся энергетической функцией*, если выполняются следующие условия:

1) множество критических точек функции $\varphi$ совпадает с множеством $\mathrm{Per}(g)$ периодических точек диффеоморфизма $g$;
2) $\varphi(\beta)=\dim W^u_\beta$ для любой точки $\beta\in\mathrm{Per}(g)$.

Заметим, что понятие функции Ляпунова корректно определено на любом $g$-инвариантном подмножестве многообразия $N$.

Следующие рассмотрения относятся только к трёхмерным многообразиям.

Пусть $g\colon N\to N$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, $\Sigma^+$ $(\Omega^+)$ — подмножество множества всех седловых точек с одномерными неустойчивыми инвариантными многообразиями (стоковых точек) и множество $A^+=W^u_{\Sigma^+}\cup\Omega^+$ является замкнутым и $g$-инвариантным. Тогда $A^+$ является аттрактором диффеоморфизма $g$. Множество $W^s_{A^+}=\bigcup_{\beta^+\in(\Sigma^+\cup\Omega^+)}W^s_{\beta^+}$ является $g$-инвариантным

[4] *Индексом критической точки* $\beta$ называется число отрицательных собственных значений матрицы $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(\beta)$.

и называется *бассейном одномерного аттрактора* $A^+$. Обозначим через $c^+$ число компонент связности аттрактора $A^+$, через $r^+$ — число седловых точек и через $s^+$ — число стоковых точек в $A^+$. Положим $\delta(A^+) = c^+ + r^+ - s^+$. Аттрактор $A^+$ называется *тесно вложенным*, если он обладает окрестностью $P^+$ со следующими свойствами:

1) $g(P^+) \subset \operatorname{int} P^+$;
2) $P^+$ является дизъюнктным объединением $c^+$ ручечных тел[5], сумма родов которых равен $\delta(A^+)$;
3) для любой седловой точки $\sigma^+ \in \Sigma^+$ пересечение $W^s_{\sigma^+} \cap P^+$ состоит из одного двумерного диска.

**Предложение 2.** *Самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi_{A^+}$ диффеоморфизма $g$ существует в бассейне $W^s_{A^+}$ аттрактора $A^+$ тогда и только тогда, когда он является тесно вложенным.*

*Тесно вложенный репеллер* $A^-$ градиентно-подобного диффеоморфизма $g\colon N \to N$ и его бассейн определяются как тесно вложенный аттрактор $A^+$ и его бассейн для диффеоморфизма $g^{-1}$. При этом функция $\varphi_{A^-}(x) = 3 - \varphi_{A^+}(x)$ будет самоиндексирующиейся функцией диффеоморфизма $g$ в бассейне репеллера $A^-$.

В упомянутом примере Пикстона неблуждающее множество $g\colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ состоит в точности из четырёх неподвижных точек: одного источника $\alpha$, двух стоков $\omega_1$, $\omega_2$, одного седла $\sigma$. Одномерный аттрактор $A^+$ этого диффеоморфизма совпадает с замыканием устойчивого многообразия седла $\sigma$ и $\delta(A^+) = 0$. При этом любой трёхмерный шар, содержащий аттрактор $A^+$ в своей внутренности, пересекает $W^s_\sigma$ не менее чем по трём компонентам связности (см. рис. 3). Таким образом, аттрактор $A^+$ не является тесно вложенным и, в силу предложения 2, в бассейне одномерного аттрактора Пикстона не существует энергетической функции.

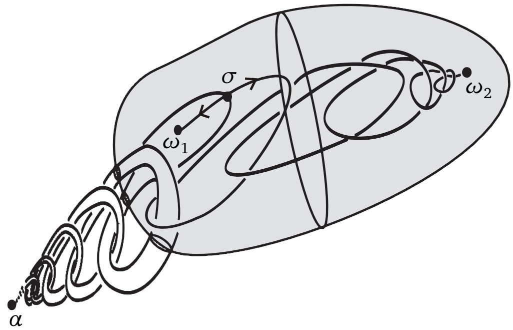


Рис. 3. Пример Пикстона

[5] *Ручечным телом рода* $\delta \geqslant 0$ называется компактное трёхмерное многообразие с краем, полученное из 3-шара попарным отождествлением $2\delta$ двумерных попарно не пересекающихся дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию отображения.

## § 3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса $G$

Доказательство основной теоремы базируется на предложениях 1 и 2. Разобьём построение энергетической функции для $f \in G$ на шаги, в которых будем использовать обозначения предыдущих разделов.

**Шаг 1.** Пусть $(p, q)$ — пара ассоциированных граничных точек периода $m_{pq}$ базисного множества $\Omega$. Положим

$$A^-_{pq} = \bigcup_{j=0}^{m_{pq}-1} f^j \left( \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\sigma_i} \cup \bigcup_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s_{\alpha_i} \right).$$

По построению множество $A^-_{pq}$ является репеллером диффеоморфизма $f$ и $\delta(A^-_{pq}) = 0$. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар $P^-_{pq}$ такой, что $f^{-m_{pq}}(P^-_{pq}) \subset \operatorname{int} P^-_{pq}$ и пересечение $P^-_{pq} \cap W^u_{\sigma_j}$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла $\sigma_j$, $j \in \{1, \ldots, k_{pq} - 1\}$.

В силу предложения 1, 3-шар $Q_{pq}$ пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $\sigma_j$, $j \in \{1, \ldots, k_{pq} - 1\}$, в точности по одному двумерному диску. Искомый 3-шар $P^-_{pq}$ получается из $Q_{pq}$ вдавливанием внутрь дисков $D_p$, $D_q$ и сглаживанием углов (см. рис. 4).

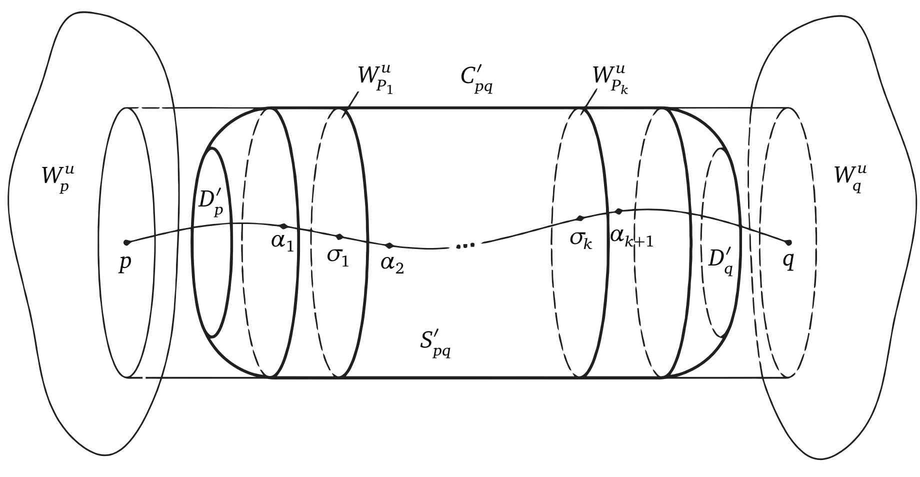


Рис. 4. Окрестность $P^-_{pq}$

В силу предложения 2, в бассейне $W^u_{A^-_{pq}}$ репеллера $A^-_{pq}$ существует самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi_{A^-_{pq}}$ диффеоморфизма $f$. Положим

$$b_{pq} = \inf\left\{\varphi_{A^-_{pq}}(z),\ z \in W^u_{A^-_{pq}}\right\}.$$

Определим функцию $g_{pq}\colon (b_{pq}, 3] \to (0, 3]$ следующим образом: если $b_{pq} > -\infty$, то положим

$$g_{pq}(x) = 2^{\frac{(2-b_{pq})(3-x)}{x-b_{pq}}} 3^{\frac{(3-b_{pq})(x-2)}{x-b_{pq}}},$$

а если $b_{pq} = -\infty$, то положим

$$g_{pq}(x) = 2^{3-x}3^{x-2}.$$

По построению функция $g_{pq}$ является бесконечно гладкой и имеет положительную производную, при этом $g_{pq}(2) = 2$, $g_{pq}(3) = 3$ и $\lim_{x\to b_{pq}} g_{pq}(x) = 0$. Рассмотрим суперпозицию $\varphi_{pq} = g_{pq}\varphi_{A^-_{pq}}$. Поскольку $\operatorname{grad}\varphi_{pq} = g'_{pq}\cdot\operatorname{grad}\varphi_{A^-_{pq}}$ и гессианы $\Delta\varphi_{pq}$ и $\Delta\varphi_{A^-_p q}$ связаны соотношением

$$\Delta\varphi_{pq} = g''_{pq}\cdot(\operatorname{grad}\varphi_{A^-_{pq}})\cdot(\operatorname{grad}\varphi_{A^-_{pq}})^{\mathrm{T}} + g'_{pq}\cdot\Delta\varphi_{A^-_{pq}},$$

функция $\varphi_{pq}$ является энергетической функцией Морса для $f$ в бассейне $W^u_{A^-_{pq}}$.

Положим

$$A^- = \bigcup_{(p,q)\subset\Gamma_\Omega} A^-_{pq}, \quad W^u_{A^-} = \bigcup_{(p,q)\subset\Gamma_\Omega} W^u_{A^-_{pq}}$$

и обозначим через $\varphi_{A^-}$ функцию, составленную из функций $\varphi_{pq}$, $(p, q)\subset\Gamma_\Omega$. Определим на многообразии $M$ функцию $\varphi$ формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_{A^-}(z), & \text{если } z\in W^u_{A^-};\\ 0, & \text{если } z\in\Omega.\end{cases}$$

**Шаг 2.** Пусть $d$ — риманова метрика на многообразии $M$, а расстояние между множествами определяется как инфимум расстояний между элементами этих множеств, то есть

$$\forall X, Y\subset M \quad d(X, Y) = \inf\{d(x, y)\colon x\in X, y\in Y\}.$$

Для $c\in(0, 3]$ положим

$$\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), \Omega)\} \quad \text{и} \quad \beta(c) = \max\Bigl\{1, \max_{x\in\varphi^{-1}([c,3])} |\operatorname{grad}\varphi(x)|\Bigr\}.$$

По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причём $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0, 3]$ и существует такое значение $c^*\in(0, 3]$, что $\alpha(c)$ монотонно возрастает на $(0, c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\alpha(c)/\beta(c)$ является неубывающей на полуинтервале $(0, 3]$ и $\lim_{c\to 0}\alpha(c)/\beta(c) = 0$.

В шаге 3 мы построим $C^2$-гладкую функцию $g\colon [0, 3]\to[0, 3]$ такую, что

а) $g'(c) > 0$ для любого $c\in(0, 3]$;

б) $g(c)\leqslant\alpha(c)/\beta(c)$ для любого $c\in(0, 1/2]$;

в) $g'(c)\leqslant\alpha(c)/\beta(c)$ для любого $c\in(0, 1/2]$;

г) $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$.

Покажем, что суперпозиция $\psi = g\varphi$ является искомой энергетической функцией.

Поскольку $\operatorname{grad}\psi = g'\cdot\operatorname{grad}\varphi$ и гессианы $\Delta\psi$ и $\Delta\varphi$ связаны соотношением

$$\Delta\psi = g''\cdot(\operatorname{grad}\varphi)\cdot(\operatorname{grad}\varphi)^{\mathrm{T}} + g'\cdot\Delta\varphi,$$

то функция $\psi$ является энергетической функцией Морса для $f$ на множестве $M\backslash\Omega$. Покажем, что функция $\psi$ является гладкой на $M$.

Так как на множестве $M\backslash\Omega$ функция $\psi$ является гладкой по построению, нам осталось показать, что функция $\psi$ — гладкая на множестве $\Omega$.

Рассмотрим произвольную точку $a\in\Omega$ и локальную карту $(U_a, h_a)$, где $h_a\colon U_a\to\mathbb{R}^3$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность[6] $U_a$ точки $a$ в $\mathbb{R}^3$, причём точка $a$ переходит в точку $O(0,0,0)$. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a=\psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке $O$, то функция $\psi$ дифференцируема в точке $a$. При этом функция $\psi_a$ дифференцируема в точке $O$ и имеет частные производные, равные нулю в этой точке тогда и только тогда, когда

$$\lim_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)}=0,$$

где $s(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ и $\rho$ — евклидова метрика в $\mathbb{R}^3$, определённая формулой

$$\rho(s_1,s_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

для $s_1(x_1,y_1,z_1), s_2(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$. Проверка равенства

$$\lim_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)}=0$$

и завершит доказательство дифференцируемости.

Введём на $\mathbb{R}^3$ метрику $d_a$ следующим образом:

$$d_a(s_1,s_2)=d(h_a^{-1}(s_1),h_a^{-1}(s_2))\quad\text{для } s_1,s_2\in\mathbb{R}^3.$$

В силу [18] (лекция 15), метрики $\rho$ и $d_a$ эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки $O$, то есть существуют константы $0<c_1\leqslant c_2$, такие что

$$\forall s_1,s_2\in U(O)\quad c_1d_a(s_1s_2)\leqslant\rho(s_1,s_2)\leqslant c_2d_a(s_1,s_2).$$

Для $s\in U(O)$ положим $w=h_a^{-1}(s)$ и $c=\varphi(h_a^{-1}(s))=\varphi(w)$. Тогда

$$\lim_{s\to O}\frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)}=\lim_{s\to O}\frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1d(h_a^{-1}(s),a)}=\lim_{w\to a}\frac{\psi(w)}{c_1d(w,a)}=\lim_{w\to a}\frac{g(\varphi(w))}{c_1d(w,a)}=$$
$$=\lim_{w\to a}\frac{g(c)}{c_1d(w,a)}<\lim_{w\to a}\frac{\alpha(c)}{\beta(c)c_1d(w,a)}\leqslant\lim_{w\to a}\frac{d^2(w,a)}{c_1d(w,a)}=\lim_{w\to a}\frac{d(w,a)}{c_1}=0.$$

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_x$, $(\psi_a)'_y$, $(\psi_a)'_z$ непрерывны в точке $O$, то есть

$$\lim_{s\to O}(\psi_a)'_x(s)=0,\quad\lim_{s\to O}(\psi_a)'_y(s)=0\quad\text{и}\quad\lim_{s\to O}(\psi_a)'_z(s)=0,$$

[6] Окрестность выберем таким образом, чтобы для всех $x\in U_a$ выполнялось $\varphi(x)<1/2$.

что эквивалентно $\lim_{s\to O}|\operatorname{grad}\psi_a(s)|=0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения $h_a^{-1}$, через $\|J_{h_a^{-1}}\|$ — его норму, подчинённую евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^3$, и через $B$ — такую константу, что $\|J_{h_a^{-1}}(s)\|\leqslant B$ для всех точек $s$ в некоторой окрестности точки $O$. Тогда

$$\lim_{s\to O}|\operatorname{grad}\psi_a(s)| = \lim_{s\to O}|J_{h_a^{-1}}(s)\cdot g'(c)\cdot\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{s\to O}\|J_{h_a^{-1}}(s)\|\cdot|g'(c)|\cdot|\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant \lim_{s\to O} B\cdot\frac{\alpha(c)}{\beta(c)}\cdot|\operatorname{grad}\varphi(w)| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{w\to a} B\cdot\frac{d^2(w,a)}{|\operatorname{grad}\varphi(w)|}\cdot|\operatorname{grad}\varphi(w)| = \lim_{w\to a} B\cdot d^2(w,a) = 0.$$

**Шаг 3. Построение функции $g$.** Положим $\gamma(c)=\alpha(c)/\beta(c)$. По построению $\gamma$ является положительной неубывающей на полуинтервале $(0,3]$ функцией и $\lim_{c\to 0}\alpha(c)/\beta(c)=0$.

Построим такую $C^2$-гладкую функцию $g\colon[0,3]\to[0,3]$, что

а) $g'(c)>0$ для любого $c\in(0,3]$;
б) $g(c)\leqslant\gamma(c)$ для любого $c\in(0,1/2]$;
в) $g'(c)\leqslant\gamma(c)$ для любого $c\in(0,1/2]$;
г) $g(2)=2$ и $g(3)=3$.

Возьмём открытое покрытие полуинтервала $(0,3]$ множествами

$$U_1=\{x\in\mathbb{R}\colon 1<x\leqslant 3\},\quad U_2=\Big\{x\in\mathbb{R}\colon \frac12<x\leqslant 3\Big\},$$
$$U_3=\Big\{x\in\mathbb{R}\colon \frac14<x\leqslant 3\Big\},\quad U_i=\Big\{x\in\mathbb{R}\colon \frac{1}{2^{i-1}}<x<\frac{1}{2^{i-5}}\Big\},\quad i=4,5,\ldots,$$

и следующее локально конечное разбиение единицы[7], подчинённое этому покрытию:

$$\sigma_2(x)=\begin{cases}\exp\Big\{\dfrac{(x-2)^4}{(x-1)(x-3)}\Big\}, & \text{если } x\in(1,3);\\ 0, & \text{если } x\notin(1,3);\end{cases}$$

$$\sigma_1(x)=\begin{cases}1-\sigma_2(x), & \text{если } x\in(2,3];\\ 0, & \text{если } x\notin(2,3];\end{cases}$$

---

[7] Пусть дано открытое покрытие топологического пространства $M$ открытыми множествами $U_\alpha$. *Разбиением единицы, подчинённым покрытию* $\{U_\alpha\}$, называется набор гладких функций $\sigma_\gamma\colon M\to\mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- для всех $\gamma$ $\operatorname{Supp}(\sigma_\gamma)\subset U_\alpha$ для некоторого $\alpha$ (где $\operatorname{Supp}(\sigma_\gamma)$ — замыкание множества, на котором функция отлична от нуля);
- $0\leqslant\sigma_\gamma\leqslant 1$ на $M$;
- $\forall x\in M$ имеем $\sum_\gamma\sigma_\gamma(x)=1$.

Если для любой точки $x\in M$ существует такая окрестность $W_x$, что пересечение $W\cap\operatorname{Supp}(\sigma_\gamma)$ непусто не более чем для конечного числа индексов $\gamma$, то такое разбиение единицы называется *локально конечным*.

$$\forall i=4,6,\ldots \quad \sigma_i(x)=\begin{cases} \exp\left\{\dfrac{\left(x-\frac{1}{2^{i-3}}\right)^4}{\left(x-\frac{1}{2^{i-2}}\right)\left(x-\frac{1}{2^{i-4}}\right)}\right\}, & \text{если } x\in\left(\frac{1}{2^{i-2}},\frac{1}{2^{i-4}}\right);\\ 0, & \text{если } x\notin\left(\frac{1}{2^{i-2}},\frac{1}{2^{i-4}}\right);\end{cases}$$

$$\forall i=3,5,\ldots \quad \sigma_i(x)=\begin{cases} 1-\sigma_{i-1}(x), & \text{если } x\in\left[\frac{1}{2^{i-3}},\frac{1}{2^{i-4}}\right);\\ 1-\sigma_{i+1}(x), & \text{если } x\in\left(\frac{1}{2^{i-2}},\frac{1}{2^{i-3}}\right);\\ 0, & \text{если } x\notin\left(\frac{1}{2^{i-2}},\frac{1}{2^{i-4}}\right).\end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i=\gamma(1/2^{i-2})$ для всех $i=3,4,5,\ldots$ Пусть

$$c_2=\int\limits_0^2\left(\sum_{i=2}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx,\quad c_3=\int\limits_0^2\left(\sum_{i=3}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx,$$

$$\varepsilon_1=\frac{3-c_2}{\int\limits_2^3\sigma_1(x)\,dx}\quad\text{и}\quad \varepsilon_2=\frac{2-c_3}{\int\limits_1^2\sigma_2(x)\,dx}.$$

Определим функцию $g$ формулой

$$g(c)=\begin{cases}\int\limits_0^c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx, & \text{если } c\in(0,3];\\ 0, & \text{если } c=0,\end{cases}$$

и покажем, что она является искомой, проверив условия а)–г).

а) Поскольку

$$g'(c)=\sum_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(c),$$

получаем, что $g'(c)>0$ для любого $c\in(0,3]$.

б) Последовательность $\{\varepsilon_i\}$ невозрастающая по построению. Заметим, что для любого $c\in(0,1/2)$ существует единственный номер $i^*$, такой что

$$c\in\left(\frac{1}{2^{i^*-2}},\frac{1}{2^{i^*-3}}\right].$$

Тогда $\sigma_{i^*}(c)\neq0$ и $\sigma_i(c)=0$ для всех $i\notin\{i^*,i^*+1\}$. Из выбора параметров $\varepsilon_i$ получаем цепочку неравенств

$$g(c)=\int\limits_0^c\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx=\int\limits_0^c\left(\sum_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_i\sigma_i(x)\right)dx<\int\limits_0^c\left(\sum_{i=i^*}^{\infty}\varepsilon_{i^*}\sigma_i(x)\right)dx=$$

$$= \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c \left( \sum_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(x) \right) dx < \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c \left( \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x) \right) dx =$$

$$= \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c 1\, dx = \varepsilon_{i^*} c < \varepsilon_{i^*} = \gamma\left(\frac{1}{2^{i^*-2}}\right) < \gamma(c).$$

в) Для $g'(c)$ справедлива следующая оценка:

$$g'(c) = \sum_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c) < \varepsilon_{i^*} \sum_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(c) = \varepsilon_{i^*} < \gamma(c).$$

г) Из выбора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ следует, что $g(2)=2$ и $g(3)=3$.

**Благодарности.** Авторы выражают огромную признательность В. В. Чистякову за чрезвычайно полезные обсуждения.

## Список литературы

[1] *Аносов Д. В.* Грубые системы // Тр. МИАН СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
[2] *Artin E.*, *Fox R.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space // Ann. Math. 1948. Vol. 49. P. 979–990.
[3] *Conley C.* Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (CBMS Regional Conference Series in Math.; Vol. 38).
[4] *Гринес В. З.*, *Лауденбах Ф.*, *Починка О.* Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами // Матем. заметки. 2009. Т. 86, вып. 2. С. 175–183.
[5] *Grines V.*, *Laudenbach F.*, *Pochinka O.* Self-indexing function for Morse — Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Mosc. Math. J. 2009. № 4. P. 801–821.
[6] *Гринес В. З.*, *Лауденбах Ф.*, *Починка О. В.* Динамически упорядоченная энергетическая функция для диффеоморфизмов Морса — Смейла на 3-многообразиях // Тр. МИАН. 2012. Т. 278. С. 34–48.
[7] *Гринес В. З.*, *Жужома Е. В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66, № 2. С. 3–66.
[8] *Гринес В. З.*, *Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три. М. — Ижевск: РХД, 2011.
[9] *Grines V.*, *Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors // Trans. AMS. 2005. Vol. 357, № 2. P. 617–667.
[10] *Hirsch M.*, *Pugh C.*, *Shub M.* Invariant manifolds. Berlin — New York: Springer-Verlag, 1977. (Lecture Notes in Math.; Vol. 583).
[11] *Mañé R.* A proof of $C^1$ stability conjecture // Publ. Math. IHES. 1988. Vol. 66. P. 161–210.
[12] *Meyer K. R.* Energy functions for Morse — Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. P. 1031–1040.
[13] *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
[14] *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. 1977. Vol. 16, № 2. P. 167–172.
[15] *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла // Матем. сб. 1971. Т. 84, № 2. С. 301–312.
[16] *Плыкин Р. В.* Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. 1974. Т. 23. С. 223–253.
[17] *Plykin R. V.* Hyperbolic attractors of codimension one // Topology (Leningrad, 1982). Berlin: Springer, 1984. (Lecture Notes in Math.; Vol. 1060). P. 348–354.

[18] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия. М.: Факториал, 1998.
[19] *Robinson C.* Structural stability of $C^1$ diffeomorphisms // J. Diff. Equat. 1976. Vol. 22, № 1. P. 28–73.
[20] *Robinson C.* Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos. Boca Raton, FL: CRC Press, 1999. (Studies in Advanced Math.).
[21] *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. Math. (2). 1961. Vol. 74. P. 199–206.
[22] *Smale S.* Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms // Ann. Scuola Norm. Pisa. 1963. Vol. 17. P. 97–116.
[23] *Смейл С.* Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, вып. 1(151). С. 113–185.
[24] *Wilson F. Wesley Jr.*, *Yorke James A.* Lyapunov functions and isolating blocks // J. Diff. Equat. 1973. Vol. 13. P. 106–123.
[25] *Жужома Е. В.*, *Медведев В. С.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях // Матем. сб. 2002. Т. 193(6). С. 83–104.

Вячеслав Зигмундович Гринес
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, кафедра
численного и функционального анализа

НИУ ВШЭ, кафедра
фундаментальной математики
E-mail: vgrines@yandex.ru

Представлено в редакцию 03.01.2015/13.03.2015

Марина Константиновна Носкова
ННГУ им. Н. И. Лобачевского, кафедра
численного и функционального анализа
E-mail: mknoskova@yandex.ru

Ольга Витальевна Починка
НИУ ВШЭ, кафедра
фундаментальной математики
E-mail: olga-pochinka@yandex.ru