Показатели Ляпунова и другие свойства N-групп

В. А. Клепцын, Д. А. Филимонов

Мы исследуем класс минимально действующих конечно порождённых групп C^2-диффеоморфизмов окружности, для которых имеет место свойство неподвижности нерастяжимых точек, причём множество нерастяжимых точек непусто. Оказывается, показатель Ляпунова растяжения любого такого действия равен нулю. Следствием этого оказывается сингулярность стационарной меры для случайной динамики, заданной любым вероятностным распределением, носитель которого — конечное множество порождающих группу элементов.

Библиография: 12 названий. *УДК:* 517.938.5+512.534.24. *MSC2010:* 37C85 (Primary), 37E10, 37A35, 37D25, 37H15. *Ключевые слова и фразы:* Динамические системы, действие групп, диффеоморфизмы окружности, показатели Ляпунова, стационарные меры.

1. Введение

В работах [5] и [3], в связи с известной гипотезой об эргодичности минимальных гладких действий конечно порождённых групп на окружности, были даны следующие определения.

Определение 1. Точка $x\in S^1$ называется *нерастяжимой* (для действия группы G), если

$$\forall g \in G \quad |g'(x)| \leqslant 1.$$

Существование таких точек является препятствием к реализации техники экспоненциального растяжения Салливана; множество нерастяжимых точек мы будем обозначать через $\mathrm{NE}=\mathrm{NE}(G)$.

Определение 2. Конечно порождённая группа $G\subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ называется N-группой, если её действие минимально, $\mathrm{NE}(G)\neq\varnothing$ и для всякой точки $x\in\mathrm{NE}(G)$ найдутся $g_+, g_-\in G$, такие что $g_+(x)=g_-(x)=x$ и x — изолированная справа (соответственно, слева) точка $\mathrm{Fix}(g_+)$ (соответственно, $\mathrm{Fix}(g_-)$).

Отметим, что наличие нерастяжимых точек не противоречит минимальности действия группы (даже аналитических!) диффеоморфизмов: примерами служат стандартное действие $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ и (для гладкого случая) гладкая реализация Жиса — Сержиеску [7] группы Томпсона. Однако все известные на текущий момент примеры минимальных действий с нерастяжимыми точками отличаются от этих двух незначительными модификациями, в частности, все они являются N-группами.

Работа выполнена при частичной поддержке русско-французской программы «Cooperation network in mathematics», гранта РФФИ-10-01-00739-а и гранта РФФИ-CNRS-10-01-93115-НЦНИЛ_а.

Основной целью настоящей работы является исследование свойств N-групп, а именно соответствующих показателей Ляпунова и следствий для стационарных мер. Для простоты мы в дальнейшем ограничимся случаем сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов — поскольку такие диффеоморфизмы образуют подгруппу индекса не больше 2, а переход к подгруппе конечного индекса сохраняет минимальность.

Ранее в работе [5] было показано, что действие N-группы эргодично по отношению к мере Лебега, а множество нерастяжимых точек для любой такой группы конечно. После этого, в работе [3] были доказаны теоремы, описывающие структуру действия такой группы, которые мы напомним ниже, в разделе 2.

Для того чтобы сформулировать наш основной результат, теорему 1 ниже, напомним следующее определение.

Определение 3. Пусть $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ — конечно порождённая группа, $\mathscr{F} = \mathscr{F}^{-1}$ — конечная симметричная система её образующих. Тогда величина

$$\lambda_{\exp}(x; \mathscr{F}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \max_{f_1,\ldots,f_n\in\mathscr{F}} \ln|(f_1 \circ \ldots \circ f_n)'(x)|$$

называется *показателем Ляпунова растяжения в точке x*.

Отметим, что для минимального действия конечно порождённой группы $G \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ С. Хёрдером [10] было показано, что функция $\lambda_{\exp}(\cdot, \mathscr{F})$ почти всюду по мере Лебега совпадает с некоторой константой $\lambda_{\exp}(G, \mathscr{F})$, называемой *показателем Ляпунова растяжения группы G*. Хотя величина этого показателя зависит от выбора системы образующих, его равенство нулю или положительность от этого выбора не зависит.

Нашим основным результатом будет являться следующая теорема, утверждающая, что экспоненциальное растяжение для N-группы невозможно:

Теорема 1. *Показатель Ляпунова растяжения N-группы G равен нулю:*

$$\lambda_{\exp}(G) = 0.$$

С другой стороны, для групп с нулевым показателем растяжения стационарные меры для конечно порождённой случайной динамики сингулярны (см. [5, Corollary 1.22]). Тем самым имеет место

Следствие 1. *Пусть G — N-группа, а m — вероятностная мера на ней, носитель которой состоит из конечного числа элементов и порождает G как полугруппу. Тогда (единственная) m-стационарная мера сингулярна относительна меры Лебега.*

Для действия группы $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ аналогичное утверждение было анонсировано И. Гиваршем и И. Ле Жаном [8] и доказано в работе Гиварша и Райи [9, Proposition 15].

2. Предварительные сведения

Приведём здесь две теоремы из [3], описывающие структуру действия N-группы. Первая из них утверждает существование «марковского» разбиения и почти всюду растягивающей динамики.

Теорема 2 (о марковском разбиении, [3]). *Пусть G — конечно порождённая N-группа C^2-диффеоморфизмов окружности. Тогда для G существуют разбиение окружности на интервалы*

$$\{I_1, \ldots, I_k, I_1^+, I_1^-, \ldots, I_l^+, I_l^-\} = \mathscr{I}$$

и соответствующие этим интервалам отображения

$$g_1, \ldots, g_k, g_1^+, g_1^-, \ldots, g_l^+, g_l^- \in G,$$

такие что:

i) *все образы $g_i^\pm(I_i^\pm)$, $g_j(I_j)$ представляются как объединения интервалов из $\mathscr{I}$;*
ii) $\exists \lambda > 1\colon \forall j\ \forall x \in I_j\ \ g_j'(x) \geqslant \lambda$;
iii) *интервалы I_i^+ и I_i^- примыкают соответственно справа и слева к нерастяжимой точке $x_i^* \in \mathrm{NE}$. При этом это неподвижная топологически отталкивающая точка ограничения на интервал I_i^+ (соответственно I_i^-) отображения g_i^+ (соответственно g_i^-), не имеющего на этом интервале других неподвижных точек.*

   Кроме того,

$$\forall i\ \forall x \in I_i^\pm \quad \left(g_{j(x)} \circ (g_i^\pm)^{k_i^\pm(x)}\right)'(x) \geqslant \lambda,$$

   где $k_i^\pm(x) := \min\{k \in \mathbb{N}\colon (g_i^\pm)^k(x) \notin I_i^\pm\}$, а $j(x)$ определяется условием $(g_i^\pm)^{k_i^\pm(x)}(x) \in I_{j(x)}$.
iv) *Наконец, все граничные точки разбиения принадлежат орбитам нерастяжимых.*

Зафиксируем разбиение $\mathscr{I}$ из заключения этой теоремы; кроме того, для удобства мы будем обозначать через g_I соответствующее интервалу I выбранного разбиения отображение. Сгруппировав отображения g_I в кусочно непрерывное отображение

$$R\colon S^1 \to S^1, \quad R|_I = g_I \quad \forall I \in \mathscr{I},$$

мы можем использовать итерации этого отображения как своеобразный (локальный) «микроскоп», позволяющий растягивать отдельные интервалы (в частности, именно на идее растяжения было основано доказательство эргодичности в работе [5]).

Вторая из теорем [3] утверждает, что при рассмотрении под таким увеличением все отображения из группы G оказываются построены из конечного числа одинаковых элементарных «кирпичиков»:

Теорема 3 (о структуре действия, [3]). *Найдётся конечное число интервалов $L_1, \ldots, L_N, L'_1, \ldots, L'_N \subset S^1$ и отображений $h_i : L_i \to L'_i$, таких что любое отображение $g \in G$ может быть представлено следующим образом:*

- *имеется два (зависящих от выбора g) разбиения окружности в объединение интервалов:*
$$S^1 = J_1 \cup \ldots \cup J_m = g(J_1) \cup \ldots \cup g(J_m);$$
- *для каждого $p = 1, \ldots, m$ найдутся n, n', i_p, такие что*
$$R^n(J_p) = L_{i_p}, \quad R^{n'}(g(J_p)) = L'_{i_p},$$
причём R^n и $R^{n'}$ непрерывны на интервалах J_p и $g(J_p)$ соответственно, а отображение g под таким «увеличением» оказывается отображением h_{i_p}:
$$g|_{J_p} = (R^{n'}|_{g(J_p)})^{-1} \circ h_{i_p} \circ R^n|_{J_p}.$$

Более того, разбиение $S^1 = \bigcup J_i$ можно выбрать одним и тем же для любого конечного набора отображений из G.

Иными словами, действие группы G по построению напоминает конструкцию Жиса — Сержиеску [7] гладкого действия группы Томпсона.

Кроме того, как несложно видеть из доказательства в [3], все интервалы L_i, на самом деле, марковские — т. е. принадлежат $\mathscr{I}$, — хотя среди них могут быть равные, а некоторые элементы $\mathscr{I}$ могут среди $\{L_i\}$ не присутствовать. В дальнейшем мы будем называть локальное представление
$$g|_J = (R^{n'}|_{g(J)})^{-1} \circ h \circ R^n|_J,$$
где $R^n(J) \in \{L_i\}_{i=1}^m \subset \mathscr{I}$, *представлением в смысле теоремы* 3.

3. Доказательство основного результата

Итерации R это, в определённом смысле, «жадный» алгоритм растяжения окрестности заданной точки. Поэтому сначала мы установим, что применение такого алгоритма не позволяет (ввиду присутствия параболических точек) добиться экспоненциальной скорости растяжения.

Теорема 4. *Для почти любой по мере Лебега точки $x \in S^1$ показатель Ляпунова отображения R в ней равен нулю:*
$$\lambda(x, R) = 0.$$

Доказательство фактически повторяет доказательство Theorem B в [5]. А именно, заметим, что допредельное выражение $\frac{1}{n}\ln(R^n)'(x)$ может быть представлено как
$$\frac{1}{n}\ln(R^n)'(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Phi(R^j(x)) = \int_{S^1}\Phi(y)\,d\mu_{n,x}(y),$$

где $\Phi(y)=\ln R'(y)$, а $\mu_{n,x}$ — временны́е средние точки x:

$$\mu_{n,x} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{R^j(x)}.$$

Поскольку отображение R является кусочно C^1-гладким, причём обе его односторонние производные в любой нерастяжимой точке равны 1 (а, соответственно, предел кусочно непрерывной функции Φ в таких точках существует и равен нулю), достаточно показать, что имеет место следующая

Лемма 1. *Для почти любой точки $x\in S^1$ меры $\mu_{n,x}$ стремятся к множеству $\{\sum_{y\in \mathrm{NE}}\alpha_y\delta_y\}$ сконцентрированных на* NE *атомарных мер, иными словами, для любой окрестности U множества* NE *выполняется*

$$\mu_{n,x}(S^1\setminus U)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Эта лемма может быть выведена из существования бесконечной абсолютно непрерывной R-инвариантной меры для марковских отображений с параболическими неподвижными точками, выведенного в работе Боуэна [1], и наши рассуждения (взятие отображения первого возвращения на отделённую от параболических точек часть, существование для него гладкой конечной инвариантной меры) в большой степени рассуждениям этой работы аналогичны. Однако для полноты изложения мы их тут приводим.

Доказательство леммы. Обозначим $U_0:=\bigcup_j I_j^{\pm}$ — объединение примыкающих к нерастяжимым точкам марковских интервалов. В исходной конструкции теоремы 2, выбирая предварительное разбиение (см. [3]) окружности достаточно мелким, можно считать, что для объединения U_0 выполнено следующее: если $x\in I_j^{\pm}$, и $g_j^{\pm}(x)\notin I_j^{\pm}$, то $g_j^{\pm}(x)\notin U_0$. Иными словами, нельзя за одну итерацию процедуры растяжения покинуть один из примыкающих к NE интервалов и сразу же оказаться в другом.

Рассмотрим теперь отображение $\widetilde{R}$ первого R-возвращения на $S^1\setminus U_0$, и функцию времени возвращения T:

$$T(x):=\min\{k>0\colon R^k(x)\in S^1\setminus U_0\},\quad \widetilde{R}(x):=R^{T(x)}(x).$$

Тогда утверждение леммы следует из оценки на поведение временных средних времени возвращения (которую мы докажем ниже):

Предложение 1. *Для почти любой по мере Лебега точки $x\in S^1\setminus U_0$*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}T(\widetilde{R}^j(x))=+\infty. \tag{1}$$

Действительно, пусть предложение доказано. Отметим, что типичная по мере Лебега точка $x\in S^1$ за конечное число итераций R переходит в типичную по мере Лебега точку $x\in S^1\setminus U_0$, поэтому без ограничения общности можно с самого начала считать, что мы работаем с точками $S^1\setminus U_0$.

Для любой точки $x \in S^1 \setminus U_0$, для которой выполнено (1), разобьём её последовательность R-итераций на отрезки до возвращения на $S^1 \setminus U_0$:

$$\ldots, \underbrace{\widetilde{R}^k(x), R(\widetilde{R}^k(x)), \ldots, R^{T(\widetilde{R}^k(x))-1}(\widetilde{R}^k(x))}_{\text{отрезок номер } k}, \widetilde{R}^{k+1}(x), \ldots$$

Если окрестность U множества NE выбрана и зафиксирована, на каждом таком отрезке точка находится вне U не больше (зависящей от U) константы C_U раз: время до покидания U_0 для (отделённых от NE) точек из $S^1 \setminus U$ равномерно ограничено сверху. Соответственно за N итераций, где

$$T(x) + T(\widetilde{R}(x)) + \ldots + T(\widetilde{R}^{k-1}(x)) \leqslant N < T(x) + T(\widetilde{R}(x)) + \ldots + T(\widetilde{R}^k(x)),$$

вне U могут оказаться не более $C_U \cdot (k+1)$ из них, и их доля оценивается как

$$\mu_{N,x}(S^1 \setminus U) \leqslant \frac{C_U \cdot (k+1)}{N} \leqslant C_U \cdot \frac{k+1}{\sum_{j=0}^{k-1} T(\widetilde{R}^j(x))}.$$

В силу (1), отношение в правой части стремится к нулю.

Тем самым доказательство леммы 1 (а вместе с ней и теоремы 4) будет завершено, как только будет доказано предложение 1.

Доказательство предложения 1. Заметим (аналогично соответствующему выводу в [11] и [5, Lemma 5.5]), что отображение $\widetilde{R}$ состоит из (счётного числа) ветвей, образ каждой из которых полностью покрывает объединение нескольких марковских интервалов. При этом все эти ветви растягивают с отделённой от 1 производной и равномерно ограниченной нормой искажения (см. [5]).

Поэтому (аналогично рассуждениям из [12], см. также [1]) для $\widetilde{R}$-итераций меры Лебега, логарифм плотности на каждом интервале из $\mathscr{I}$ оказывается равномерно липшицевым.

Значит (как следует из применения процедуры Крылова — Боголюбова), у $\widetilde{R}$ есть абсолютно непрерывная инвариантная мера с липшицевым на каждом марковском интервале логарифмом плотности (возможно, на некоторых интервалах при этом плотность обращается в тождественный ноль).

Далее, поскольку отображение $\widetilde{R}$ растягивающее, такая мера μ либо эргодична, либо является линейной комбинацией конечного числа эргодических компонент, каждая из которых есть ограничение μ на некоторое, сохраняемое $\widetilde{R}$, объединение марковских интервалов.

С другой стороны, функция $T : S^1 \setminus U_0 \to \mathbb{N}$ времени возвращения в окрестности любой точки, переходящей под действием R в нерастяжимую, имеет особенность по меньшей мере вида $1/x$. Кроме того, каждая граничная точка марковского интервала по построению за конечное число R-итераций переходит в нерастяжимую, поэтому либо в ней, либо в одном из её $\widetilde{R}$-образов у функции T будет иметься такая особенность. Наконец, особенность вида $1/x$ у функции T и абсолютная непрерывность с отделённой от нуля плотностью у меры μ означает расходимость интеграла:

$$\int_{S^1\setminus U_0} T\,d\mu = +\infty,$$

более того, то же справедливо для каждой из эргодических компонент μ.

Поэтому, по теореме Биркгофа — Хинчина, для почти любой по мере μ и, следовательно, по мере Лебега точки x

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} T(\widetilde{R}^j(x)) \to +\infty, \quad k\to\infty. \qquad \square$$

Для доказательства теоремы 1 дадим следующее определение:

Определение 4. *Высотой* представления в смысле теоремы 3 отображения $g\in G$,

$$g|_J = (R^n|_{g(J)})^{-1}\circ h_j \circ R^m|_J,$$

называется число m, а *глубиной* — число n.

Отметим, что техника теоремы 3 может быть применена и к самим отображениям h_i, приводя к их дальнейшему подразбиению:

$$\begin{gathered} h_i|_{U_{i,j}} = (R^{n_{i,j}}|_{h_i(U_{i,j})})^{-1}\circ h_{l_{i,j}} \circ R^{m_{i,j}}|_{U_{i,j}}, \\ m_{i,j}>0, \quad R^{m_{i,j}}(U_{i,j})\in\{L_k\}\subset\mathscr{I}, \quad \bigcup_j U_{i,j} = L_i. \end{gathered} \tag{2}$$

Это влечёт следующее

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{F}\subset G$ — фиксированное конечное множество. Тогда найдётся $M>0$, такое что если $\tilde g\in\mathscr{F}$, а отображение g в окрестности некоторой точки x допускает представление в смысле теоремы 3 высоты m, то композиция $\tilde g\circ g$ в (быть может, меньшей) окрестности той же точки допускает представление высоты, не большей $m+M$.*

Аналогично найдётся такая константа M', что если g допускает представление глубины n, то $g\circ\tilde g$ допускает представление глубины, не большей $n+M'$.

Доказательство. Выберем и зафиксируем какие-нибудь представления всех отображений из $\mathscr{F}$, и пусть M_1 — максимальная из высот всех выбранных представлений, $M_2 := \max_{i,j} m_{i,j}$.

Тогда в окрестности точки $g(x)$, итерируя, если нужно, процедуру подразбиения для соответствующих отображений h_i, можно найти для $\tilde g$ представление высоты m' с $n\leqslant m'\leqslant n+\max(M_1,M_2)$.

Тем самым в соответствующей окрестности U точки x,

$$\begin{aligned} \tilde g\circ g &= (R^{n'}|_{\tilde g\circ g(U)})^{-1}\circ h_i\circ R^{m'}|_{g(U)}\circ (R^n|_{g(U)})^{-1}\circ h_j\circ R^m|_U = \\ &= (R^{n'}|_{\tilde g\circ g(U)})^{-1}\circ \bigl(h_i\circ R^{m'-n}\circ h_j\bigr)\circ R^m|_U. \end{aligned} \tag{3}$$

Наконец, композиции $h_i\circ R^k\circ h_j$ с $0\leqslant k\leqslant \max(M_1,M_2)$ образуют конечный набор отображений. Обозначив через M наибольшую из высот их представлений и подставив такое представление в (3), получаем искомое утверждение.

Второе заключение предложения доказывается полностью аналогично. □

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{F} \subset G$ — фиксированное конечное множество. Тогда найдётся константа $C_0 > 0$, такая что для любых $g_1, \ldots, g_s \in \mathscr{F}$ для любой точки x в некоторой её окрестности U композиция $g = g_1 \circ \ldots \circ g_s$ допускает представление в смысле теоремы 3*

$$g|_U = (R^n|_{g(U)})^{-1} \circ h_j \circ R^m|_U,$$

для которого как высота, так и глубина не превосходят $C_0 \cdot s$.

Доказательство. Применяя к композиции $g = g_1 \circ (g_2 \circ (g_3 \circ \ldots \circ g_s))$ предложение 2, получаем, что в некоторой окрестности J точки x имеет место представление в смысле теоремы 3

$$g|_J = (R^n|_{g(J)})^{-1} \circ h_i \circ R^m|_J, \quad R^m(J) = L_i \in \mathscr{I}, \tag{4}$$

высоты $m \leqslant Ms$. С другой стороны, из $g = ((g_1 \circ g_2) \circ \ldots \circ g_s)$ получаем, что в некоторой окрестности J' точки x имеет место представление

$$g|_{J'} = (R^{n'}|_{g(J')})^{-1} \circ h_j \circ R^{m'}|_{J'}, \quad R^{m'}(J') = L_j \in \mathscr{I}, \tag{5}$$

глубины $n' \leqslant M's$.

Если $n \leqslant n'$ или $m' \leqslant m$, то условию леммы удовлетворяют соответственно представления (4) или (5). Допустим теперь, что $n > n'$ и $m' > m$. Тогда, в силу марковского свойства, условий $R^m(J) \in \mathscr{I}$, $R^{m'}(J') = R^{m'-m}(R^m(J')) \in \mathscr{I}$, и наличия точки $x \in J \cap J'$, имеем $R^m(J') \subset R^m(J)$, и потому $J' \subset J$.

Переписав теперь ограничение на J' представлений (4) и (5) в виде

$$h_i \circ R^m|_{J'} = R^n \circ g|_{J'} = R^{n-n'} \circ (R^{n'} \circ g)|_{J'} = R^{n-n'} \circ (h_j \circ R^{m'})|_{J'},$$

откуда

$$h_i|_{R^m(J')} = R^{n-n'} \circ h_j \circ R^{m'-m}|_{R^m(J')},$$

в частности,

$$h_i(R^m(J')) = R^{n-n'} \circ h_j \circ R^{m'}(J'). \tag{6}$$

Но длина интервала в правой части (6) отделена от нуля, поскольку к интервалу $L_j = R^{m'}(J') \in \mathscr{I}$ отделённой от нуля длины последовательно применяются отображение h_j (выбираемое из конечного множества) и положительная степень R. Применяя h_i^{-1} к левой части, мы получаем отделённость от нуля длины $R^m(J')$; но этот интервал через $m' - m$ итераций переходит в марковский интервал $L_j \in \mathscr{I}$. С учётом растяжения отображения R отсюда следует равномерная оценка сверху на $m' - m$.

Тем самым и в этом случае мы можем воспользоваться представлением (5) — его глубина не превосходит $M's$, а высота m' оценивается как сумма

$m \leqslant Ms$ и не превосходящей константы величины $m' - m$. Предложение 3 доказано. □

Докажем теперь теорему 1.

Доказательство. Зафиксируем симметричную систему $\mathcal{F}$ образующих группы G и применим к ней предыдущее предложение. Тогда для любой точки x любая композиция $g = f_1 \circ \ldots \circ f_s$ отображений $f_1, \ldots, f_s \in \mathcal{F}$ в окрестности U этой точки может быть представлена как

$$g = (R^n|_{g(U)})^{-1} \circ h_i \circ R^m|_U,$$

где $m \leqslant M \cdot s$. Отсюда

$$g'(x) = \frac{h_i'(R^m(x)) \cdot (R^m)'(x)}{(R^n)'(g(x))} \leqslant \frac{C \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant Ms} (R^j)'(x)}{(R^n)'(g(x))}$$

где $C := \max_{x \in S^1} \max_{i \leqslant N} h_i'(x)$.

Тем самым

$$\frac{1}{s} \ln g'(x) \leqslant \frac{\ln C}{s} + \frac{1}{s} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant Ms} \ln(R^j)'(x) - \frac{1}{s} \ln(R^n)'(g(x)).$$

Первое слагаемое, очевидно, стремится к 0, стремление к 0 второго для почти любой точки $x \in S^1$ следует из теоремы 4. Остаётся оценить сверху третье.

Отметим, что в случае если группа G на самом деле является группой кусочно аналитических диффеоморфизмов, в окрестности нерастяжимых точек выполнено строгое неравенство $R' > 1$; поэтому производные R^n равномерно ограничены снизу, и заключение теоремы 1 отсюда немедленно следует.

Рассмотрим теперь общий случай.

Заметим, что в силу определения отображения R, производная его итерации не меньше 1 в любой момент, когда точка покидает окрестность нерастяжимых: $R^k(x) \in S^1 \setminus U_0 \Rightarrow (R^k)'(x) > 1$. Поэтому производная $(R^n)'(g(x))$ распадается в произведение производных $(R^{k_j})'(R^{k_1+\ldots+k_{j-1}}(g(x)) > 1$, где $R^{k_1}(g(x)), \ldots, R^{k_1+\ldots+k_t}(g(x)) \in S^1 \setminus U_0$, и остатка

$$(R^{n-(k_1+\ldots+k_t)})'(R^{k_1+\ldots+k_t}(g(x))) = \prod_{i=k_1+\ldots+k_t}^{n-1} R'(R^i(g(x))),$$

где

$$\forall i,\ k_1 + \ldots + k_t \leqslant i < n, \quad R^i(g(x)) \in U_0. \tag{7}$$

Нам остаётся оценить снизу

$$\frac{1}{s} \ln(R^{n-(k_1+\ldots+k_t)})'(R^{k_1+\ldots+k_t}(g(x))) = \frac{n}{s} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=k_1+\ldots+k_t}^{n-1} \ln R'(R^i(g(x))). \tag{8}$$

Но в силу условия (7) вне любой ε-окрестности множества NE может находиться не более некоторой константы $C(\varepsilon)$ точек $R^i(g(x))$ из рассматриваемых итераций; с другой стороны, $\ln R'(y) \to 0$ при $y \to \mathrm{NE}$, и, наконец, $n/s \leqslant C_0$.

Отсюда несложно видеть, что (8) оценивается стремящейся к 0 величиной при $s \to \infty$, что и завершает доказательство теоремы. □

Благодарности. Авторы хотели бы поблагодарить Э. Жиса, Ю. С. Ильяшенко, Д. В. Аносова, Б. Деруэна, А. Наваса и И. Г. Хованскую за ценные обсуждения и интерес к работе.

Список литературы

[1] *Bowen R.* Invariant measures for Markov maps on the interval // Comm. Math. Phys. 1979. Vol. 69. P. 1–17.

[2] *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в теорию динамических систем с обзором последних достижений / Пер. с англ. под ред. А. С. Городецкого. М.: МЦНМО, 2005.

[3] *Клепцын В. А., Филимонов Д. А.* О действиях на окружности со свойством неподвижности нерастяжимых точек // Функ. анализ и его прил. (в печати).

[4] *Herman M.* Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations // Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 1979. Vol. 49. P. 5–234.

[5] *Deroin B., Kleptsyn V., Navas A.* On the question of ergodicity for minimal group actions on the circle // Moscow Math. J. 2009. Vol. 9, № 2. P. 263–303.

[6] *Deroin B., Kleptsyn V., Navas A.* Sur la dynamique unidimensionnelle en régularité intermédiaire // Acta Math. 2007. Vol. 199, № 2. P. 199–262.

[7] *Ghys É., Sergiescu V.* Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle // Comment. Math. Helv. 1987. Vol. 62. P. 185–239.

[8] *Guivarc'h Y., Le Jan Y.* Asymptotic winding of the geodesic flow on modular surfaces and continuous fractions // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1993. Vol. 26, № 1. P. 23–50.

[9] *Guivarc'h Y., Raja C. R. E.* Recurrence and ergodicity of random walks on linear groups and on homogeneous spaces. Preprint arXiv:0908.0637

[10] *Hurder S.* Exceptional minimal sets and the Godbillon — Vey class // Ann. Inst. Fourier (Grenoble) (to appear).

[11] *Inoue T.* Ratio ergodic theorems for maps with indifferent fixed points // Ergodic. Theory Dynam. Systems. 1997. Vol. 17. P. 625–642.

[12] *Mañé R.* Introdução à teoria ergódica. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1983. (Projeto Euclides, V 14). English translation: Ergodic Theory and Differentiable Dynamics. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Представлено в редакцию 07.03.2012

Виктор Алексеевич Клепцын
CNRS, Institut de Recherche Mathématique de Rennes
E-mail: victor.kleptsyn@univ-rennes1.fr

Дмитрий Андреевич Филимонов
Московский физико-технический институт (МФТИ),
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)
E-mail: mityafil@gmail.com