**О.М. Солычева (Нижний Новгород)**
**Solycheva@list.ru**

# АЛГЕБРА УОТЕРМАНА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ [1]

В работе показано, что пространство Уотермана функций двух переменных конечной полной $\Lambda$–вариации является банаховой алгеброй, и получено представление генератора липшицева оператора суперпозиции, действующего в данном пространстве. Данные результаты обобщают на случай функций двух переменных результаты работы [2].

Пусть $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i = \infty$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 1/\lambda_i^2 = \infty$, $I_a^b = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ — прямоугольник, где $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ такие, что $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$, $\mathbb{R}^{I_a^b}$ — множество функций, действующих из $I_a^b$ в $\mathbb{R}$.

Для функции $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ будем писать $f \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b)$ (см. [1], [3], [4]), если $\mathrm{TV}_\Lambda(f, I_a^b) < \infty$, где $\mathrm{TV}_\Lambda(f, I_a^b) = V_\Lambda(f(\cdot, a_2), [a_1, b_1]) + V_\Lambda(f(a_1, \cdot), [a_2, b_2]) + V_{2,\Lambda}(f, I_a^b)$, а $V_{2,\Lambda}(f, I_a^b) = \sup \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} |f(\beta_i, \delta_j) + f(\alpha_i, \gamma_j) - f(\beta_i, \gamma_j) - f(\alpha_i, \delta_j)| / \lambda_i \lambda_j$, где супремум берется по всем парам чисел $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ и всем парам неупорядоченных наборов неналегающих отрезков $I_i = [\alpha_i, \beta_i] \subset [a_1, b_1]$, $i = 1, \ldots, m$ и $J_j = [\gamma_j, \delta_j] \subset [a_2, b_2]$, $j = 1, \ldots, n$.

**Теорема 1.** *Пространство $\Lambda\mathrm{BV}(I_a^b)$ является банаховой алгеброй относительно обычных поточечных операций и нормы $\|f\| = |f(a)| + \mathrm{TV}_\Lambda(f, I_a^b)$, и выполнено неравенство $\|f \cdot g\| \le 4 \max\{1, \lambda_1, \lambda_1^2\} \|f\| \cdot \|g\|$, $f, g \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b)$.*

Назовем *оператором суперпозиции Немыцкого, порожденным генератором* $h : I_a^b \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ оператор $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{I_a^b} \to \mathbb{R}^{I_a^b}$, определенный для всех $f \in \mathbb{R}^{I_a^b}$ правилом: $(\mathcal{H}f)(x) = h(x, f(x))$, $x \in I_a^b$.

**Теорема 2.** *Пусть $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{I_a^b} \to \mathbb{R}^{I_a^b}$ — оператор суперпозиции с генератором $h : I_a^b \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если $\mathcal{H}$ действует из $\Lambda\mathrm{BV}(I_a^b)$ в себя и липшицев в смысле нормы этого пространства, и $h$ — непрерывен по первой переменной, то $\exists \mu_0 = \mu_0(\lambda_1) > 0$ такое, что $|h(x, u_1) - h(x, u_2))| \le \mu_0 |u_1 - u_2|$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, $x \in I_a^b$, и найдутся две непрерывные функции $h_0, h_1 \in \Lambda\mathrm{BV}(I_a^b)$ такие, что для всех $x \in I_a^b$, $u \in \mathbb{R}$ имеет место представление $h(x, u) = h_0(x) + h_1(x)u$ (см. [2], [5]).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Waterman D. *On $\Lambda$-bounded variation* // Studia Math. – 1976. – V. 57, N 1. – P. 33-45.

2. Chistyakov V.V., Solycheva O.M. *Lipschitzian Operators of Substitution in the Algebra* $\Lambda\mathrm{BV}$ // J. of Diff. Equations and Appl. – 2003. – V. 9, N 3/4. – P. 407-416.

3. Chistyakov V.V. *Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation* // Monatsh. Math. – 2002. – V. 137, N 2. – P. 99-114.

4. Dyachenko M. I. *Waterman classes and spherical partial sums of double Fourier series* // Anal. Math. – 1995. – V. 21. – P. 3-21.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00473).

5. Matkowski J., Miś J. *On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space* $BV\langle a,b\rangle$ // Math. Nachr. – 1984. – V. 117. – P. 155-159.