**ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»**

**Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»**

**Кафедра высшей математики**

# ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

**Методические указания для самостоятельной работы студентов**

**Москва 2013**

Составители: доцент Голубева Зоя Николаевна,
доцент Ерастова Надежда Константиновна.

УДК 517

Числовые и функционалные ряды.Методические указания для самостоятельной работы студентов /Моск.ин-т электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; Сост. З.Н. Голубева, Н.К. Ерастова. М., 2013. -28с.

Методические указания содержат необходимые теоретические понятия и типовые задачи с решениями для выполнения домашних и аудиторных контрольных работ 3 , 4 модулей по математическому анализу для студентов инженерных факультетов.

Авторы приносят благодарность Амосову Б.А. и Быковой М.Г., прочитавших разработку и сделавших ряд полезных замечаний.

ISBN 978-5-94506-311-2

Учебное издание

Редактор Е.С. Резникова
Технический редактор О.Г. Завьялова

Подписано в печать 30.01.2013. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная №2.Ризография. Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,58.
Изд.№8. Тираж 30 экз. Заказ Бесплатно.
Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики».
109028,Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3/12.
Редакционно-издательский отдел Московского института электроники и математики Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики».
113054, Москва, ул.М. Пионерская,12.

В домашней работе №1 предложены задачи, в которых требуется исследовать на сходимость числовые ряды. Приведем основные определения и теоремы, необходимые для решения этих задач.

### *Числовые ряды*

Числовой ряд – это формальная сумма членов числовой последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots;$$

$a_n$ называется *общим членом* ряда; сумма первых $n$ членов ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

называется $n$–ой *частичной суммой* ряда.

Ряд называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \neq \infty .$$

В этом случае число $S$ называется суммой ряда, и тогда пишут

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S .$$

В противном случае, т.е. если предел не существует или равен бесконечности, ряд называется *расходящимся*.

***Необходимый признак сходимости***

*Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (Обратное утверждение неверно).

***Достаточный признак расходимости***

*Если* $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *расходится.*

**Ряд Дирихле** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{сходится, если } p > 1, \\ \text{расходится, если } p \leq 1. \end{cases}$

***Предельный признак сравнения***

*Пусть* $a_n, b_n > 0$ *для* $\forall n \geq n_0$ *и* $a_n \sim b_n$ *при* $n\to\infty$. *Тогда ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Для применения предельного признака сравнения следует помнить основные эквивалентности и шкалу бесконечностей, а именно:

| | Эквивалентности | | Шкала бесконечностей |
|---|---|---|---|
| 1) | $\sin\alpha_n \sim \alpha_n,\ n\to\infty$ | 1) | $n^k=o(n^p)$, $0<k<p$, $n\to\infty$ |
| 2) | $1-\cos\alpha_n \sim \dfrac{\alpha_n{}^2}{2},\ n\to\infty$ | 2) | $a^n=o(b^n)$, $1<a<b$, $n\to\infty$ |
| 3) | $e^{\alpha_n}-1\sim\alpha_n,\ n\to\infty$ | 3) | $\ln n=o(n^k)$, $k>0$, $n\to\infty$ |
| 4) | $\ln(1+\alpha_n)\sim\alpha_n,\ n\to\infty$ | 4) | $n^k=o(a^n)$, $a>1$, $k>0$, $n\to\infty$ |
| 5) | $(1+\alpha_n)^p-1\sim p\alpha_n,\ n\to\infty$ | | |

здесь $\alpha_n$–бесконечно малая последовательность, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

***Признак сравнения***

Пусть $0<a_n\le b_n$ *для* $\forall n\ge n_0\in\boldsymbol{N}$. Тогда, если

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ – сходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ –сходится;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ – расходится, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ –расходится.

***Признак Даламбера***

Пусть $a_n>0$ *для* $\forall n\ge n_0\in\boldsymbol{N}$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$$\begin{cases}\text{сходится, если } q<1,\\ \text{расходится, если } q>1,\\ \text{вопрос остается открытым, если } q=1.\end{cases}$$

***Радикальный признак Коши***

Пусть $a_n\ge 0$ *для* $\forall n\ge n_0\in\boldsymbol{N}$ и $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$

$$\begin{cases}\text{сходится, если } q<1,\\ \text{расходится, если } q>1,\\ \text{вопрос остается открытым, если } q=1.\end{cases}$$

***Интегральный признак Коши***

Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и монотонно убывает на полупрямой $[a,+\infty)$, $a\ge1$, $a_n\equiv f(n)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty}f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

## *Домашняя контрольная работа* №1

**Задача 1**. Сформулировать необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости и применить их (в тех случаях, когда это возможно) к исследованию на сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{30n-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{4n-3}}{3n-10}.$$

►a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\cos\frac{1}{n}$;

$$a_n = \ln\cos\frac{1}{n},\ \lim_{n\to\infty}\ln\cos\frac{1}{n} = \ln\cos(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}) = \ln\cos 0 = \ln 1 = 0.$$

Выполнен необходимый признак сходимости. Поэтому о сходимости ряда ничего нельзя сказать, нужны дополнительные исследования.

$b$) $\sum_{n=1}^{\infty}(3n-1)\sin\frac{1}{n}$;

$$a_n = (3n-1)\sin\frac{1}{n},\ \lim_{n\to\infty}(3n-1)\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n} = 3 \neq 0.\ (\text{Здесь } \alpha_n = \frac{1}{n} - \textit{б.м.})$$

Поэтому ряд *расходится* по достаточному признаку расходимости.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{30n-1}$;

$$a_n = \frac{n+1}{30n-1},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{30n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{30n} = \frac{1}{30} \neq 0.$$

Поэтому ряд *расходится* по достаточному признаку расходимости.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{4n-3}}{3n-10}$;

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{4n-3}}{3n-10},\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n-3}}{3n-10} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4n}}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{4}}{3n^{2/3}} = 0.$$

Выполнен необходимый признак сходимости. Поэтому о сходимости ряда ничего нельзя сказать, нужны дополнительные исследования. ◄

**Задача 2**. При помощи признака Даламбера или радикального признака Коши исследовать на сходимость ряды:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3n^2+\ln n}{3n^2+\sqrt{n^4}+\ln n}\right)^{3-2n},\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5n-\ln n}{\sqrt[3]{n^3+e^n}}.$$

**Решение**. *a*) Заметим, что в первом из рядов общий член имеет вид $a_n=(...)^{\cdots}$ с зависящим от $n$ показателем. В таких случаях применение признака Даламбера приводит к тяжелым выкладкам, а применение признака Коши вполне оправдано:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3n^2+\ln n}{3n^2+\sqrt{n^4+\ln n}}\right)^{\frac{3-2n}{n}}.$$

Здесь для основания степени имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3n^2+\ln n}{3n^2+\sqrt{n^4+\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2+\sqrt{n^4+\ln n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{3+\sqrt{1+\frac{\ln n}{n^4}}} = \frac{3}{4}.$$

Мы воспользовались тем, что $2n+\ln n = o(3n^2)$ и $\ln n = o(n^4)$ при $n\to\infty$ (см. шкалу бесконечностей).

Показатель $\frac{3-2n}{n}$ стремится к −2 при $n\to\infty$. Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3n^2+\ln n}{3n^2+\sqrt{n^4+\ln n}}\right)^{\frac{3-2n}{n}}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{9}>1.$$

Следовательно, согласно радикальному признаку Коши, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ расходится.

***Замечание***. Отметим, что в общем случае $(a_n)^{b_n}$ <u>не эквивалентно</u> $(\tilde{a}_n)^{\tilde{b}_n}$, где $a_n \sim \tilde{a}_n$, $b_n \sim \tilde{b}_n$. Было доказано только, что $\frac{a_n}{b_n}\sim\frac{\tilde{a}_n}{\tilde{b}_n}$.

$b$) При исследовании ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+5n-\ln n}{\sqrt[3]{n^3+e^n}}$ применять радикальный признак Коши нецелесообразно, а перед использованием признака Даламбера ряд стоит упростить, пользуясь предельным признаком сравнения:

$$0<a_n=\frac{2n^2+5n-\ln n}{\sqrt[3]{n^3+e^n}}\sim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{e^n}}=\frac{2n^2}{e^{n/3}}=b_n\ (n\to\infty).$$

Теперь применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)^2}{e^{(n+1)/3}}\cdot\frac{e^{n/3}}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{e^{1/3}e^{n/3}}\cdot\frac{e^{n/3}}{2n^2}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}<1.$$

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится, а тогда и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ также сходится. ◄

**Задача 3.** Используя предельный признак сравнения, упростить ряды. К упрощенным рядам применить условие сходимости ряда Дирихле или интегральный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt{2n+3}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{1-\cos\frac{1}{n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n\cdot\sqrt[3]{2n-1}},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{(3n^3-1)\cdot\ln^3 n}}.$$

$a$) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt{2n+3}}$;

$$0<a_n=\frac{3\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt[3]{n^2+1}\cdot\sqrt{2n+3}}\sim\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sqrt{2n}}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot n^{2/3}},\ n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ расходится как ряд Дирихле с $p=\frac{2}{3}<1$, поэтому расходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{2}\cdot n^{2/3}}$, а тогда по предельному признаку сравнения расходится и исходный ряд.

$b)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[3]{1-\cos\frac{1}{n^2}}$;

$$0<a_n=\sqrt[3]{1-\cos\frac{1}{n^2}}\sim\sqrt[3]{\frac{1}{2n^4}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}\cdot n^{4/3}},\ n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ сходится как ряд Дирихле с $p=\frac{4}{3}>1$, поэтому сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}\cdot n^{4/3}}$, а тогда по предельному признаку сравнения сходится и исходный ряд.

$c)$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{n\cdot\sqrt[3]{2n-1}}$;

$$0<a_n=\frac{arctgn}{n\cdot\sqrt[3]{2n-1}}\sim\frac{\pi/2}{n\cdot\sqrt[3]{2n}}=\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\cdot n^{4/3}},\ n\to\infty.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}$ сходится как ряд Дирихле с $p>1$, поэтому сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2\sqrt[3]{2}\cdot n^{4/3}}$, а тогда по предельному признаку сравнения сходится и исходный ряд.

d) $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{(3n^3-1)\cdot\ln^3 n}}$;

$$0<a_n=\sqrt{\frac{2n+1}{(3n^3-1)\cdot\ln^3 n}}\sim\sqrt{\frac{2n}{3n^3\cdot\ln^3 n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot n\cdot\ln^{3/2} n}=f(n),\ n\to\infty.$$

Функция $f(x)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot x\cdot\ln^{3/2} x}$ положительна и непрерывна на $[2,+\infty)$. Кроме того,

$$f'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\ln^{3/2} x+x\cdot(3/2)\ln^{1/2} x\cdot(1/x)}{x^2\cdot\ln^3 x}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\ln^{1/2} x\cdot(2\ln x+3)}{2x^2\cdot\ln^3 x}<0$$

для любых $x\in[2,+\infty)$. Следовательно, функция убывает на $[2,+\infty)$. Поэтому можно применить интегральный признак Коши:

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\cdot\ln^{3/2} x}dx=\int_2^{+\infty}\frac{d\ln x}{\ln^{3/2} x}=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{dt}{t^{3/2}}.$$

Этот несобственный интеграл I-го рода сходится как интеграл Дирихле с $p>1$. Поэтому по интегральному признаку Коши сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot n\cdot\ln^{3/2} n}$, а тогда и исходный ряд сходится.◀

Следующая задача посвящена **знакопеременным** рядам. Поэтому нам понадобятся следующие сведения.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся* (сходится абсолютно), если сходится ряд, составленный из абсолютных величин, т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся* (сходится условно). Справедлива

**Теорема**. Если ряд сходится абсолютно, то он сходится. Обратное утверждение неверно, т.е. из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость.

Ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, где $b_n>0$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$, называется *знакочередующимся* рядом. Для исследования на сходимость такого ряда можно применять

*Признак Лейбница*. Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ ($b_n>0$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$) сходится, если

1) $b_n \to 0$ при $n \to \infty$;
2) $b_{n+1} < b_n$ для $\forall n \in \boldsymbol{N}$,

т.е. последовательность $b_n$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для ряда, сходящегося по признаку Лейбница, справедлива оценка погрешности, возникающая при вычислении его суммы:

$$|S - S_n| < b_{n+1}, \quad \forall n \in \boldsymbol{N}.$$

Отметим, что если $b_n \to 0$ и $b_n>0$, начиная с некоторого номера $n_1$, а $b_{n+1}<b_n$, начиная с некоторого номера $n_2$, то ряд также сходится, и оценка справедлива для $n \geq \max\{n_1, n_2\}$.

**Задача 4**. Исследовать на абсолютную сходимость ряды

$$a) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n+2}, \quad b) \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{e}-1}{n}(-1)^n.$$

К ряду, не сходящемуся абсолютно, применить признак Лейбница. Для каждого из рядов определить число слагаемых, которое нужно взять для вычисления сумм данных рядов с пятью верными знаками после запятой.

$a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n+2}$.

Составим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \sqrt{n+1}}{n+2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}.$$

Члены полученного ряда положительны, можно применить к нему предельный признак сравнения:

$$b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \sim \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}},\ n\to\infty .$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится как ряд Дирихле с $p=\frac{1}{2}<1$, поэтому исходный ряд не сходится абсолютно. Так что вопрос о его сходимости остается открытым.

Поскольку исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{n+2}$ является знакочередующимся, попробуем к нему применить признак Лейбница:

1) $b_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > 0$ для $\forall n\in \boldsymbol{N}$ и $b_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ при $n\to\infty$;

2) пусть $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}$; тогда

$$f'(x) = \frac{\frac{x+2}{2\cdot\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}}{(x+2)^2} = \frac{x+2-2(x+1)}{2(x+2)^2\cdot\sqrt{x+1}} = \frac{-x}{2(x+3)^2\sqrt{x+1}} < 0$$

для всех $x\geq 1$. Поэтому функция $f(x)$ убывает на $[1,+\infty)$, а тогда и последовательность $b_n=f(n)$ является убывающей. Следовательно, выполнены условия признака сходимости Лейбница и ряд сходится. (Но так как он не сходится абсолютно, то сходимость этого ряда условная).

Для вычисления суммы ряда с пятью верными знаками после запятой воспользуемся оценкой:

$$|S - S_n| < b_{n+1},$$

т.е. достаточно найти $n$, при которых

$$|S-S_n| < \frac{\sqrt{n+2}}{n+3} < \frac{\sqrt{n+3}}{n+3} = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \leq 10^{-5}.$$

Отсюда получаем: $\sqrt{n+3} \geq 10^5$, или $n \geq 10^{10}-3$.

*b*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{e}-1}{n}(-1)^n$.

Это знакопеременный ряд. Поэтому сначала исследуем его на абсолютную сходимость. Составим ряд из абсолютных величин:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sqrt[n]{e}-1}{n}(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{1/n}-1}{n}.$$

Члены полученного ряда положительны, и можно применить к нему предельный признак сравнения:

$$b_n = \frac{e^{1/n}-1}{n} \sim \frac{1}{n^2},\ n\to\infty .$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится как ряд Дирихле с $p$ =2>1, поэтому исходный ряд сходится абсолютно. Однако оценивать сумму ряда мы умеем, только если ряд сходится по признаку Лейбница. Исходный ряд является знакочередующимся, причем:

1) $b_n \to 0$ , $n\to\infty$;

2) $$b_{n+1}-b_n=\frac{e^{1/(n+1)}-1}{n+1}-\frac{e^{1/n}-1}{n}=\frac{n\cdot e^{1/(n+1)}-n-n\cdot e^{1/n}-e^{1/n}+n+1}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{-n\cdot(e^{1/n}-e^{1/(n+1)})-(e^{1/n}-1)}{n(n+1)}<0,$$

так как обе скобки в числителе положительны для $\forall n\in\boldsymbol{N}$. Следовательно, последовательность $b_n$ – убывающая. Так что ряд сходится и по признаку Лейбница. Поэтому для суммы ряда справедлива оценка:

$$\left|S-S_n\right|<b_{n+1},$$

т.е.

$$\left|S-S_n\right|<\frac{e^{1/(n+1)}-1}{n+1}<\frac{e^{1/n}}{n}<\frac{3}{n}\le 10^{-5}\,(1<e^{1/(n+1)}<e^{1/n}<3).$$

Отсюда $n \geq 3\cdot 10^5$. ◄

*Замечание*. Если оказалось, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то исходный ряд *расходится* по достаточному признаку расходимости, так как в этом случае и $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n b_n \neq 0$ (этот предел тогда не существует!). Следовательно, нет и суммы ряда, и бессмысленно говорить об оценке погрешности.

***

В домашней работе №2 предложены задачи, для решения которых требуются сведения о функциональных последовательностях и функциональных рядах. Приведем основные определения и теоремы, необходимые для решения этих задач.

## *Функциональные последовательности*

Определения.

1) Последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ldots,\ u_n(x),\ldots,$$

заданных на множестве $\tilde{D}\subset\boldsymbol{R}$, называется *функциональной последовательностью* (ф.п.).

Т.е. ф.п. – это функция натурального аргумента $n$ и действительного переменного $x$. При фиксированном $x$ ф.п. становится числовой последовательностью.

2) Множество тех $x$, при каждом из которых соответствующая числовая последовательность сходится, называется *множеством сходимости* $D$ ф.п., а функция

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x),\ \forall x\in D,$$

–*пределом* ф.п., или *предельной* функцией. Иными словами, $u(x)$ – предельная функция ф.п., если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in D \ \exists N(\varepsilon, x): \ \forall n > N(\varepsilon, x) \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon.$$

Коротко это записывается так:

$$u_n(x) \underset{D}{\rightarrow} u(x).$$

3) Ф.п., сходящаяся к $u(x)$ на множестве $D$, называется *равномерно сходящейся* к $u(x)$ *на множестве* $D$, если

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Sup}_{x\in D} |u_n(x) - u(x)| = 0,$$

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon): \forall x \in D$ и $\forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$ (иными словами, можно найти номер $N(\varepsilon)$, общий для всех $x \in D$ ).

В этом случае пишут:

$$u_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} u(x).$$

Очевидно, что если ф.п. сходится равномерно на множестве $D$, то она сходится и при каждом $x \in D$.

### *Функциональные ряды*

Определения

1) Формальная сумма членов ф.п. называется функциональным рядом (ф.р.) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \ x \in \tilde{D}$. При фиксированном $x$ это будет числовой ряд. Аналогично случаю числовых рядов функции $u_n(x)$, $n$=1, 2,…, называются членами ф.р., а

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x), \ x \in \tilde{D},$$

называется $n$-ой частичной суммой ряда.

2) Множество тех $x$, при каждом из которых соответствующий числовой ряд сходится, называется *множеством* (*областью*) *сходимости* $D$ ф.р. Другими словами, при каждом $x \in D$ существует конечный предел последовательности частичных сумм этого ряда, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \ x \in D,$$

называется *суммой* ряда. В этом случае пишут $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$.

3) Ф.р. называется *равномерно сходящимся* к $S(x)$ *на* $D$, если на этом множестве сходится равномерно последовательность его частичных сумм, т.е. $S_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} S(x)$.

Очевидно, что если ряд сходится равномерно на множестве $D$, то он сходится и при каждом $x \in D$.

**Теоремы** (о функциональных последовательностях).

1) О непрерывности предельной функции ф.п:

- $$\left.\begin{cases} a)\ u_n(x)\ \textit{непрерывны}\ \forall x\in D, \forall n\in N \\ b)\ u_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} u(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow u(x)\, \textit{непрерывна на } D.$$

2) О почленном интегрировании ф.п.

- $$\left.\begin{cases} a)\ u_n(x)\ \textit{непрерывны}\ \forall x\in D, \forall n\in N \\ b) u_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} u(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)dx =$$

$$= \int_a^b \lim_{n\to\infty} u_n(x)dx = \int_a^b u(x)dx, \forall[a,b]\subset D.$$

3) О почленном дифференцировании ф.п.

- $$\left.\begin{cases} a)\ u_n(x),\ u_n'(x)\ \textit{непрерывны} \\ \quad \forall x\in D, \forall n\in N, \\ b)\ u_n(x) \underset{D}{\rightarrow} u(x), \\ c) u_n'(x) \underset{D}{\rightrightarrows} v(x). \end{cases}\right\} \Rightarrow u'(x) = v(x), \textit{т.е. } \frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} u_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{du_n(x)}{dx},\ \forall x\in D.$$

Аналогичные теоремы справедливы для функциональных рядов.

**Теоремы** (о функциональных рядах).

1) О непрерывности суммы функционального ряда:

- $$\left.\begin{cases} a)\ u_n(x)\ \textit{непрерывны}\ \forall x\in D, \forall n\in N \\ b)\ S_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} S(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow S(x)\ \textit{непрерывна на } D.$$

2) О почленном интегрировании функционального ряда:

- $$\left.\begin{cases} a)\ u_n(x)\ \textit{непрерывны}\ \forall x\in D, \forall n\in N \\ b) S_n(x) \underset{D}{\rightrightarrows} S(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right]dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx,\ \forall[\mathrm{a,b}]\subset \mathrm{D}.$$

3) О почленном дифференцировании функционального ряда:

- $$\left.\begin{cases} a)\; u_n(x),\;\; u_n'(x) \\ \quad \text{непрерывны } \forall x\in D, \forall n\in N \\ b)\; S_n(x) \underset{D}{\to} S(x) \\ c)\; S_n'(x) \underset{D}{\rightrightarrows} T(x) \end{cases}\right\} \Rightarrow S'(x)=T(x),\; \text{т.е. } \frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dx}u_n(x),\; \forall x\in D.$$

4) Достаточные условия равномерной сходимости ф.р. (признак Вейерштрасса):

- $$\left.\begin{cases} a)\; |u_n(x)|\le c_n \;\; \forall x\in D, \forall n\in N \\ b)\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n - \text{сходится} \end{cases}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ сходится равномерно на } D.$$

### *Степенные ряды*

Функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-x_0)^n ,$$

где $C_n$ – заданные числа, называется *степенным рядом* (ст. р.) с центром в точке $x_0$ (или по степеням $x-x_0$). Числа $C_n$ называются коэффициентами ряда.

**Теоремы** (о степенных рядах).

1) Для ст.р. существует число $R\geq 0$ такое, что:
   a) если $|x-x_0|<R$, то ряд сходится абсолютно (при $x=x_0$ ряд очевидно сходится!);
   b) если $|x-x_0|>R$, то ряд расходится;
   c) если $|x-x_0|=R$, то о сходимости ряда ничего нельзя сказать, нужны дополнительные исследования.

Интервал $(x_0-R, x_0+R)$ называется *интервалом сходимости* ст.р., а число $R$ – *радиусом сходимости* степенного ряда. Если ряд сходится в единственной точке $x=x_0$, то полагают $R=0$. Если интервалом сходимости является вся числовая прямая, пишут $R=\infty$.

Если существует ( конечный или бесконечный )

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|, \text{то } R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right|.$$

Аналогично, если существует ( конечный или бесконечный )

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}, \text{ то } \; R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|C_n|}}.$$

(*Замечание*: указанные формулы неприменимы, если бесконечное число коэффициентов $C_n$ обращается в 0.)

2) Ст.р. сходится *равномерно* на любом $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.
3) Ст.р. можно почленно интегрировать по любому $[a, b]$ из $(x_0 - R, x_0 + R)$, при этом радиус сходимости не изменяется.
4) Ст.р. можно почленно дифференцировать любое число раз на $(x_0 - R, x_0 + R)$, при этом радиус сходимости не изменяется.

### *Ряд Тейлора*

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ точки $x_0$ и дифференцируема любое число раз (бесконечно дифференцируема) в этой точке, то ей можно поставить в соответствие степенной ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, т.е.

$$f(x) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ с центром в точке $x_0$ (или по степеням $x - x_0$). (Здесь $f^{(0)}(x_0) \overset{def}{=} f(x_0)$, $0! \overset{def}{=} 1$.) Если остаточный член $r_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ в $O(x_0)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$r_n(x) \overset{def}{=} \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \right) \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

то функция $f(x)$ равна сумме своего ряда Тейлора в этой окрестности, т.е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n, \ x \in O(x_0).$$

В частности, это условие выполнено, если $f(x)$ имеет в $O(x_0)$ производные всех порядков, ограниченные одним и тем же числом.

В этом случае говорят, что функция раскладывается в ряд Тейлора с центром в точке $x_0$ (или по степеням $x - x_0$). Если $x_0=0$, то ряд Тейлора называется рядом Маклорена.

Приведем основные разложения в ряд Маклорена:

$$1)\ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty, +\infty);$$

$$2)\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \ x \in (-\infty, +\infty);$$

$$3)\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in (-\infty, +\infty);$$

$$4)\ \ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \ x \in (-1, 1];$$

$$5)\ (1 + x)^p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p-1) \cdot \ldots \cdot (p - n + 1) x^n}{n!}, \ x \in (-1, 1).$$

Важные частные случаи последней формулы:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n.$$

### *Ряд Фурье по тригонометрической системе*

Пусть $f(x)$ принадлежит пространству кусочно-непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций ( $f(x)\in \widetilde{C}[a,b]$), т.е. $f(x)$ имеет не более конечного числа точек разрыва первого рода на $[a, b]$. Тогда ей можно поставить в соответствие функциональный ряд вида $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$, т.е.

$$f(x)\mapsto\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l},$$

где $l=(b-a)/2$,

$$a_0=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx,\quad b_n=\frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx.$$

Этот ряд называется ее *рядом Фурье по тригонометрической системе*:

$$1,\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},\cos\frac{2\pi x}{l},\sin\frac{2\pi x}{l},\dots,\cos\frac{\pi nx}{l},\sin\frac{\pi nx}{l},\dots.$$

**<u>Теорема</u>** (*о поточечной сходимости ряда Фурье*). Пусть $f(x), f'(x)\in\widetilde{C}[a,b]$. Тогда в каждой точке $x\in \boldsymbol{R}$ существует сумма $S(x)$ ее ряда Фурье по тригонометрической системе, причем:

a) для $\forall x\in(a,b)$: $S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, в частности, в точках непрерывности функции $S(x)=f(x)$;

b) на концах отрезка $S(a)=S(b)=\dfrac{f(a+0)+f(b-0)}{2}$;

c) $S(x)=S(x+2l)$, где $l=(b-a)/2$, т.е. $S(x)$ – периодическая с периодом $2l$.

### *Неполные ряды Фурье*

Пусть теперь $f(x)\in\widetilde{C}[-l,l]$.

a) Если $f(x)$ – четная, т.е. $f(x)=f(-x)$, то все $b_n=0$, а для $a_0$, $a_n$ получаем

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx.$$

При этом

$$f(x)\mapsto\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}. \qquad (*)$$

b) Если $f(x)$ – нечетная, т.е. $f(x)=-f(-x)$, то $a_0=0$ и все $a_n=0$, а для $b_n$ получаем

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx.$$

При этом

$$f(x)\mapsto\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi nx}{l}. \qquad (**)$$

Любую функцию $f(x)\in\tilde{C}[a,b]$, $[a,b]\subset[0,+\infty)$ или $[a,b]\subset(-\infty,0]$, можно разложить в ряд по косинусам кратных дуг, т. е. в ряд вида (*), или по синусам кратных дуг, т.е. в ряд вида (**). Для этого ее следует продолжить четным (или нечетным) образом на симметричный относительно нуля отрезок. Если $[a,b]\subset[0,+\infty)$ и $a\neq0$, то на $(-a,a)$ продолженную функцию полагают равной нулю, и тогда $l=b$; если $[a,b]\subset(-\infty,0]$ и $b\neq0$, то на $(-b,b)$ продолженную функцию полагают равной нулю, и тогда $l=|a|$. Полученную функцию разложить в ряд на новом отрезке.

## *Домашняя работа №2*

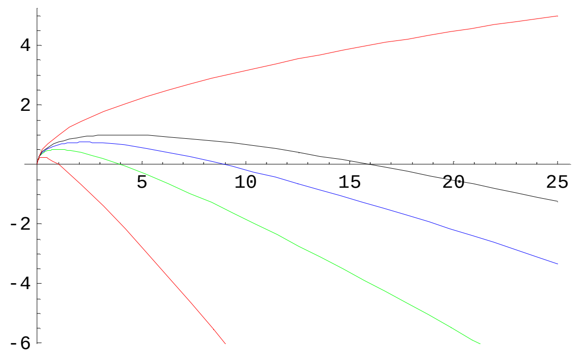
**Задача 1.** Для данной функциональной последовательности $u_n=\sqrt{x}-\dfrac{x}{n}$ определить область сходимости, предельную функцию и характер сходимости. На одном и том же чертеже изобразить графики нескольких первых функций последовательности и график предельной функции.

►1) Члены последовательности определены при любом $x\geq0$. Найдем предельную функцию:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{x}-\frac{x}{n}\right)=\sqrt{x}-\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=\sqrt{x}.$$

Следовательно, предельная функция $u(x)=\sqrt{x}$, а область сходимости $D=[0,+\infty)$.

2) Построим графики первых трех членов последовательности и предельной функции: $u_1=\sqrt{x}-x,\ u_2=\sqrt{x}-\dfrac{x}{2},\ u_3=\sqrt{x}-\dfrac{x}{3},\ u_4=\sqrt{x}-\dfrac{x}{4},\ u=\sqrt{x}$.




3) Определим характер сходимости. Оценим разность:

$$|u_n(x)-u(x)|=\left|\sqrt{x}-\frac{x}{n}-\sqrt{x}\right|=\frac{|x|}{n}=\frac{x}{n}\quad(\text{так как } x\geq0).$$

Зададим $\varepsilon$=1. Какое бы большое натуральное число $n$ мы ни взяли, найдется $x$>0 (например, $x$=2$n$) такое, что $\frac{x}{n} > \varepsilon$. Поэтому последовательность сходится на $D$ неравномерно. (Или иначе: $\sup\limits_{x\in[0,+\infty)} \frac{x}{n} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,+\infty)} |u_n(x) - u(x)| \neq 0$. Следовательно, последовательность не сходится равномерно на $D$.) ◄

Отметим, что все члены последовательности и предельная функция непрерывны на [0,+∞), но последовательность сходится неравномерно.

***

**Задача 2**. Доказать непрерывность функции $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x + 1}{e^n + 100x}$ на отрезке [1,4] и возможность почленного интегрирования и дифференцирования ряда.

►1) Члены ряда $u_n(x) = \frac{n^2 x + 1}{e^n + 100x}$ являются непрерывными функциями на отрезке [1,4]. Кроме того, $|u_n(x)| = \left|\frac{n^2 x + 1}{e^n + 100x}\right| \le \frac{4n^2 + 1}{e^n + 100}$ для всех $x \in [1,4]$ и любого $n$=1,2,…. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 + 1}{e^n + 100}$ сходится (по предельному признаку сравнения и признаку Даламбера), так как $\frac{4n^2 + 1}{e^n + 100} \sim \frac{4n^2}{e^n} = b_n > 0$ и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)^2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{4n^2 \cdot e} = \frac{1}{e} < 1.$$

Поэтому исходный ряд сходится равномерно на [1,4] по признаку Вейерштрасса, и его сумма $f(x)$ является *непрерывной на этом отрезке* функцией. Кроме того, ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке, так как выполнены все условия теоремы о почленном интегрировании функционального ряда.

2) Продифференцируем члены ряда:

$$u_n'(x) = \frac{n^2(e^n + 100x) - 100 \cdot (n^2 x + 1)}{(e^n + 100x)^2} = \frac{n^2 e^n - 100}{(e^n + 100x)^2}.$$ Это также непрерывные

функции на отрезке [1,4]. Далее, $|u_n'(x)| = \left|\frac{n^2 e^n - 100}{(e^n + 100x)^2}\right| \le \frac{n^2 e^n + 100}{(e^n + 100)^2}$

для всех $x \in [1,4]$ и любого $n$=1, 2,…. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n + 100}{(e^n + 100)^2}$:

$\frac{n^2 e^n + 100}{(e^n + 100)^2} \sim \frac{n^2 e^n}{e^{2n}} = \frac{n^2}{e^n} = b_n$ ($n\to\infty$) и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{e^{n+1}} \cdot \frac{e^n}{n^2} = \frac{1}{e} < 1$. Следовательно, ряд сходится (по предельному признаку сравнения и признаку Даламбера), а тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 e^n - 100}{(e^n + 100x)^2}$ сходится равномерно на отрезке

[1,4] по признаку Вейерштрасса. Поэтому ряд $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x+1}{e^n+100x}$ можно почленно дифференцировать на этом отрезке, так как выполнены все условия теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда, и его сумма $f(x)$ является дифференцируемой *на этом отрезке* функцией.◄

**Задача 3**. Для функции $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n(-1)^n}{(2n-7)5^n}$ найти область определения и нарисовать эскиз графика этой функции в малой окрестности точки $x=1$.

►1) Преобразуем члены ряда: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n(-1)^n}{(2n-7)5^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n(x-1/2)^n}{(2n-7)5^n}$. Теперь видно, что ряд является степенным с центром в точке $x_0=1/2$ и коэффициентами $C_n=\frac{2^n(-1)^n}{(2n-7)5^n}$. Область определения функции $f(x)$, заданной функциональным рядом, совпадает с областью сходимости этого ряда. При $x=1/2$ ряд сходится, а при $x\neq 1/2$ применим признак Даламбера к ряду, составленному из абсолютных величин:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x-1/2|^{n+1}}{|2n-5|5^{n+1}}\cdot\frac{|2n-7|5^n}{2^n|x-1/2|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2n}{2n\cdot 5}|x-1/2|=\frac{2}{5}|x-1/2|.$$

Отсюда получаем:

a) если $\frac{2}{5}|x-1/2|<1$, то ряд сходится, причем абсолютно;

b) если $\frac{2}{5}|x-1/2|>1$, то ряд расходится;

c) если $\frac{2}{5}|x-1/2|=1$, то нужны дополнительные исследования.

Таким образом, радиус сходимости ряда $R=5/2$, а интервал сходимости: $(-2;3)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. при $x=-2$ и $x=3$.

a) Пусть $x=-2$, т.е. $(x-1/2)=-\frac{5}{2}$. Тогда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n5^n(-1)^n}{(2n-7)5^n2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-7}=-\frac{1}{7}-\frac{1}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{1}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2n-7}.$$

Последний ряд справа является знакоположительным. Применим к нему предельный признак сравнения:

$\frac{1}{2n-7}>0$ при $n\geq 4$, $\frac{1}{2n-7}\sim\frac{1}{2n}$ при $n\to\infty$; ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится как ряд Дирихле с $p=1$, поэтому и исходный ряд расходится. (Напомним, что если изменить или отбросить конечное число членов ряда, то сходимость или расходимость ряда не изменится). Так что $x=-2$ не принадлежит области сходимости ряда.

b) Пусть $x$=3, т.е. $x-1/2=\frac{5}{2}$. Тогда получаем числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(-1)^n5^n}{(2n-7)5^n2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-7}=-\frac{1}{7}+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{1}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-7}.$$

Этот числовой ряд не сходится абсолютно в силу сказанного в пункте а). Но так как он является знакочередующимся при $n\geq 4$, к нему можно попробовать применить признак Лейбница:

1) $b_n=\frac{1}{2n-7}>0$ при $n\geq 4$, $\frac{1}{2n-7}\sim\frac{1}{2n}\to 0$ при $n\to\infty$;

2) $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2n-5}-\frac{1}{2n-7}=\frac{2n-7-2n+5}{(2n-7)(2n-5)}=\frac{-2}{(2n-7)(2n-5)}<0$ при любом $n\geq 4$.

Поэтому ряд сходится (условно), и $x$=3 принадлежит области сходимости ряда.

Итак, областью сходимости ряда, а следовательно, и областью определения функции $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n(-1)^n}{(2n-7)5^n}$ является полуинтервал $(-2; 3]$.

2) Определим знак функции в малой окрестности точки $x$=1. Эта точка принадлежит интервалу сходимости степенного ряда, и поэтому ряд в ней сходится, причем абсолютно. Имеем

$$f(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-7)5^n}=-\frac{1}{7}+\frac{1}{5\cdot 5}-\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{5^3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-7)5^n}=-\frac{284}{3\cdot 7\cdot 5^3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-7)5^n}.$$

Отсюда видно, что ряд является знакочередующимся при $n\geq 4$. В ряде, стоящем справа, для дальнейших вычислений удобнее сделать замену переменной суммирования. Положим $m=n-3$; тогда $m$=1 при $n$=4. Теперь получаем:

$$f(1)+\frac{284}{3\cdot 7\cdot 5^3}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+3}}{(2m-1)5^{m+3}}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)5^{m+3}}.$$

Ряд $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)5^{m+3}}$ является знакочередующимся. (Его сумму и частичные суммы будем обозначать $\tilde{S},\tilde{S}_m$ соответственно). Последовательность модулей его членов $\tilde{b}_m=\frac{1}{(2m-1)5^{m+3}}$ стремится к нулю монотонно. Действительно, для любого $m\geq 1$

$$\tilde{b}_{m+1}-\tilde{b}_m=\frac{1}{(2m+1)5^{m+4}}-\frac{1}{(2m-1)5^{m+3}}=\frac{-8m-6}{(2m+1)(2m-1)5^{m+4}}<0.$$

Следовательно, верна оценка $|\tilde{S}-\tilde{S}_1|<\tilde{b}_2$, т.е. $\tilde{S}_1-b_n<\tilde{S}<\tilde{S}_1+b_n$. Имеем:

$\tilde{S}=f(1)+284/(3\cdot 7\cdot 5^3)$, $\tilde{S}_1=1/5^4$, $\tilde{b}_2=1/(3\cdot 5^5)$,

т.е.

$$-284/(3\cdot 7\cdot 5^3)+1/5^4-1/(3\cdot 5^5)<f(1)<-284/(3\cdot 7\cdot 5^3)+1/5^4+1/(3\cdot 5^5),$$

или

$$-284/(3\cdot 7\cdot 5^3)+14/(3\cdot 5^5)<f(1)<-284/(3\cdot 7\cdot 5^3)+16/(3\cdot 5^5)),$$

$$-\frac{7002}{21\cdot 375}< f(1)<-\frac{6988}{21\cdot 375}.$$

Следовательно, $f(1)<0$. Но $f(x)$ непрерывна в любой точке, принадлежащей интервалу сходимости, поэтому $f(x)<0$ в малой окрестности точки $x=1$ по теореме о сохранении знака непрерывной функцией.

3) Определим знак первой производной $f'(x)$ в малой окрестности точки $x=1$:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(2x-1)^{n-1}(-1)^n}{(2n-7)5^n}.$$

Отсюда

$$f'(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{(2n-7)5^n}=\frac{2}{5\cdot 5}-\frac{4}{3\cdot 5^2}+\frac{6}{5^3}+\frac{8}{5^4}+\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{(2n-7)5^n}.$$

Видим, что ряд является знакочередующимся, только начиная с номера $n=4$. Далее, для $n\geq 4$ имеем:

$$0<b_n=\frac{2n}{(2n-7)5^n}\sim\frac{1}{5^n}\to 0\ (n\to\infty)\ \text{и}$$

$$b_{n+1}-b_n=\frac{2n+2}{(2n-5)5^{n+1}}-\frac{2n}{(2n-7)5^n}=2\cdot\frac{-8n^2+20n-7}{(2n-7)(2n-5)5^{n+1}}=2\cdot\frac{-8n(n-4)-12n-7}{(2n-7)(2n-5)5^{n+1}}<0.$$

Поэтому справедлива оценка: $\left|f'(1)-S_4\right|<b_5$, т.е.

$$-\frac{10}{3\cdot 5^5}< f'(1)-\left(\frac{2}{5\cdot 5}-\frac{4}{3\cdot 5^2}+\frac{6}{5^3}+\frac{8}{5^4}\right)<\frac{10}{3\cdot 5^5},$$

или

$$0<\frac{8}{5^4}-\frac{2}{3\cdot 5^4}+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{3}{5^2}\right)< f'(1)<\frac{2}{5}\left(\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}\right)+\frac{2}{3\cdot 5^4}.$$

Отсюда следует, что $f'(1)>0$ и $f'(x)>0$ в малой окрестности точки $x=1$ по тем же соображениям, что и в пункте 2). Поэтому в этой окрестности функция *возрастает*.

4) Определим знак второй производной $f''(x)$ в малой окрестности точки $x=1$:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n(n-1)(2x-1)^{n-2}(-1)^n}{(2n-7)5^n}.$$

Отсюда

$$f''(1)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n(n-1)(-1)^n}{(2n-7)5^n}=-\frac{8}{3\cdot 5^2}+\frac{24}{5^3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{4n(n-1)(-1)^n}{(2n-7)5^n}=\frac{32}{3\cdot 5^3}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{4n(n-1)(-1)^n}{(2n-7)5^n}.$$

Видим, что ряд является знакочередующимся, только начиная с номера $n=4$. Далее, для $n\geq 4$ имеем:

$0<b_n=\dfrac{4n(n-1)}{(2n-7)5^n}\sim\dfrac{2n}{5^n}\to 0$ , поскольку $2n=o(5^n)$ при $n\to\infty$, и

$$b_{n+1}-b_n=\frac{4(n+1)n}{(2n-5)5^{n+1}}-\frac{4n(n-1)}{(2n-7)5^n}=4n\cdot\frac{-8n^2+30n-32}{(2n-7)(2n-5)5^{n+1}}=4n\cdot\frac{-8n(n-4)-2n-32}{(2n-7)(2n-5)5^{n+1}}<0.$$

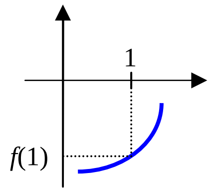
Поэтому справедлива оценка:

$$-\frac{80}{3\cdot 5^5}<f''(1)-\left(\frac{32}{3\cdot 5^3}+\frac{48}{5^4}\right)<\frac{80}{3\cdot 5^5}, \text{ или}$$

$$0<\frac{16\cdot 19}{3\cdot 5^4}-\frac{16}{3\cdot 5^4}<f''(1)<\frac{16}{3\cdot 5^4}+\frac{16\cdot 19}{3\cdot 5^4}.$$

Так что $f''(1)>0$ и $f''(x)>0$ в малой окрестности точки $x$=1 по тем же соображениям, что и в пункте 2). Поэтому в этой окрестности функция выпукла вниз.

Итак, в достаточно малой окрестности точки $x$=1 функция $f(x)$ отрицательна, возрастает и выпукла вниз:




***

**Задача 4**. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^2\sin x^{2,5}dx$, взяв четыре ненулевых слагаемых стандартного разложения. Оценить погрешность результата.

Стандартное разложение для функции sin$x$ имеет вид:

$$\sin x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Подставляя вместо $x$ в это разложение $x^{2,5}$, получаем:

$$\sin x^{2,5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{5n-2,5}}{(2n-1)!}=x^{2,5}-\frac{x^{7,5}}{3!}+\frac{x^{12,5}}{5!}-\frac{x^{17,5}}{7!}+\ldots.$$

Отсюда получаем теперь разложение в ряд (но это *не* степенной ряд!) для подынтегральной функции:

$$x^2\sin x^{2,5}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{5n-0,5}}{(2n-1)!}=x^{4,5}-\frac{x^{9,5}}{3!}+\frac{x^{14,5}}{5!}-\frac{x^{19,5}}{7!}+\ldots.$$

Члены этого функционального ряда непрерывные на отрезке [0, 1] функции, и ряд сходится равномерно на этом отрезке (и не только на нем!) по признаку Вейерштрасса. Действительно, $|u_n(x)|=\left|\dfrac{(-1)^{n+1}x^{5n-0,5}}{(2n-1)!}\right|\le\dfrac{1}{(2n-1)!}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)!}$ сходится, например, по признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0<1.$$

Следовательно, этот ряд можно почленно интегрировать на отрезке [0, 1]. Тогда получим:

$$I=\int_0^1 x^2\sin x^{2,5}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\int_0^1 x^{5n-0,5}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!}\frac{x^{5n+0,5}}{(5n+0,5)}\Bigg|_0^1=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2}{(2n-1)!(10n+1)}=\frac{2}{11}-\frac{2}{3!\cdot 21}+\frac{2}{5!\cdot 31}-\frac{2}{7!\cdot 41}+\ldots.$$

Поскольку ряд является знакочередующимся и $b_n=\dfrac{2}{(2n-1)!(10n+1)}\to 0$ монотонно ($n\to\infty$), то для его суммы справедлива оценка: $|I-S_4|<b_5$, т.е.

$$\left|I-\left(\frac{2}{11}-\frac{2}{3!\cdot 21}+\frac{2}{5!\cdot 31}-\frac{2}{7!\cdot 41}\right)\right|<\frac{2}{9!\cdot 51}.$$

Итак,

$$\int_0^1 x^2\sin x^{2,5}dx\approx 0,1664731\pm 0,0000001.◄$$

**Задача 5**. Для функции $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{3x-2}$ написать три слагаемых разложения Тейлора в точке $x$=1. Вычислить точное и приближенное значение функции при $x$=1,1.

Воспользуемся известным разложением:

$$(1+z)^p=1+\frac{pz}{1!}+\frac{p(p-1)z^2}{2!}+o(z^2),\ z\to 0.$$

Если $x\to 1$, то $z=x-1\to 0$. Поэтому для $p$=1/2 и $z=x-1$ получаем:

$$\sqrt{x}=(1+(x-1))^{1/2}=1+\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{1!}+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)(x-1)^2}{2!}+o((x-1)^2),\ x\to 1,\text{ т.е.}$$

$$\sqrt{x}=1+\frac{(x-1)}{2}-\frac{(x-1)^2}{8}+o((x-1)^2),\ x\to 1.$$

Отсюда

$$2-\sqrt{x}=1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{8}+o((x-1)^2),\ x\to 1$$

Для $p$=−1 имеем:

$$(3x-2)^{-1}=(1+3(x-1))^{-1}=1+\frac{(-1)3(x-1)}{1!}+\frac{(-1)(-2)9(x-1)^2}{2!}+o((x-1)^2),\ x\to 1,$$

т.е.

$$(3x-2)^{-1}=1-3(x-1)+9(x-1)^2+o((x-1)^2),\ x\to 1.$$

Теперь для нашей функции получаем разложение

$$f(x)=\frac{2-\sqrt{x}}{3x-2}=(2-\sqrt{x})\cdot(3x-2)^{-1}=$$

$$=\left[1-\frac{(x-1)}{2}+\frac{(x-1)^2}{8}+o((x-1)^2)\right]\cdot\left[1-3(x-1)+9(x-1)^2+o((x-1)^2)\right]=$$

$$=1-3(x-1)-\frac{x-1}{2}+9(x-1)^2+\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{3(x-1)^2}{2}+o((x-1)^2)=$$

$$=1-\frac{7}{2}(x-1)+\frac{85}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2),x\to 1.$$

Отсюда следует

$$f(1{,}1)\approx 1-\frac{7}{2}\cdot 0{,}1+\frac{85}{8}\cdot 0{,}1^2=0{,}75625\approx 0{,}76.$$

С такой же точностью, т.е. до второго знака включительно после запятой, при помощи калькулятора получаем:

$$f(1{,}1)=\frac{2-\sqrt{1{,}1}}{3\cdot 1{,}1-2}\approx\frac{2-1{,}05}{1{,}3}\approx 0{,}73.$$

Можно было непосредственно вычислить производные в заданной точке и подставить в формулу Тейлора-Пеано:

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2),x\to 1.$$

$$f(1)=1,\ f'(1)=\left[-\frac{1}{2\sqrt{x}(3x-2)}-\frac{(2-\sqrt{x})3}{(3x-2)^2}\right]\Bigg|_{x=1}=-\frac{7}{2},$$

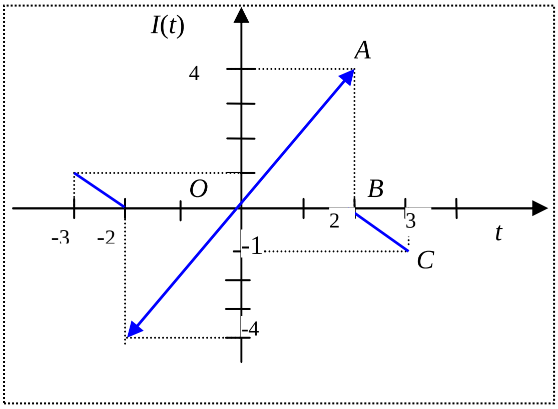
$$f''(1)=\left[\frac{1}{4x\sqrt{x}(3x-2)}+\frac{3}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}(3x-2)^2}+\frac{(2-\sqrt{x})3\cdot 2\cdot 3}{(3x-2)^3}\right]\Bigg|_{x=1}=\frac{85}{4}.$$

Тогда получаем: $f(x)=1-\frac{7}{2}(x-1)+\frac{85}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2),x\to 1.$ ◄

**Задача 6**. На вход фильтра подается нечетно-периодический ток, график полупериода которого имеет вид ломаной с вершинами $O(0,0)$, $A(2,4)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$. Нарисовать график этого тока. Выяснить, к чему сходится ряд Фурье в точках разрыва. Найти сигнал на выходе фильтра, если известно, что фильтр пропускает только первую гармонику. Оценить потерю мощности при прохождении через фильтр.

►Начертим график тока на периоде $2l=6$.

$$I(t)=\begin{cases}2t, & t\in[0;2),\\ -(t-2), & t\in[2;3].\end{cases}$$



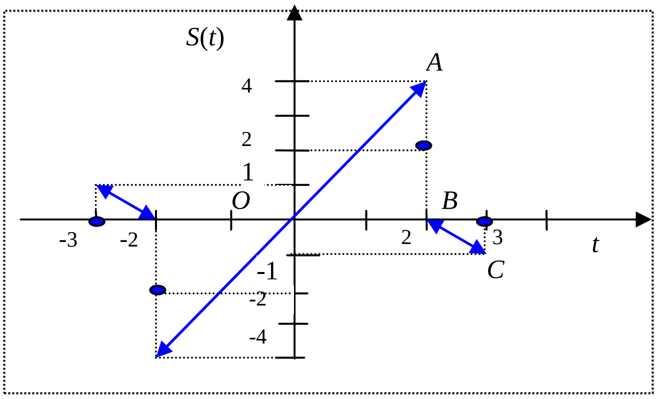
Обозначим сумму ряда Фурье этого тока через $S(t)$. Тогда, в силу теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье и с учетом нечетности функции, в точках разрыва получаем:

$$S(2) = -S(-2) = \frac{I(2-0)+I(2+0)}{2} = \frac{4+0}{2} = 2\,.$$

А на концах промежутка $[-3,3]$ имеем:

$$S(3) = S(-3) = \frac{I(-3+0)+I(3-0)}{2} = \frac{1+(-1)}{2} = 0\,.$$

График суммы ряда Фурье на промежутке длиной в один период выглядит так:




Сигнал на выходе фильтра имеет вид

$$I_{вых}(t) = b_1 \sin\frac{\pi t}{3},$$

где $b_1 = \frac{2}{3}\int\limits_0^3 I(t)\sin\frac{\pi t}{3}\,dt = \frac{2}{3}\left[\int\limits_0^2 2t\sin\frac{\pi t}{3}\,dt + \int\limits_2^3 (2-t)\sin\frac{\pi t}{3}\,dt\right].$

Вычислим сначала следующий интеграл:

$$\int\limits_a^b t\sin\frac{\pi t}{3}\,dt = \left\{\begin{matrix} u = t \Rightarrow & du = dt \\ dv = \sin\frac{\pi t}{3}\,dt \Rightarrow & v = -\frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3} \end{matrix}\right\} = -\frac{3t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\bigg|_a^b + \frac{3}{\pi}\int\limits_a^b \cos\frac{\pi t}{3}\,dt =$$

$$= -\frac{3t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\bigg|_a^b + \frac{9}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{3}\bigg|_a^b.$$

Теперь для коэффициента $b_1$ получим:

$$b_1=\frac{2}{3}\left[\int_0^2 2t\sin\frac{\pi t}{3}dt+\int_2^3(2-t)\sin\frac{\pi t}{3}dt\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[-\frac{6t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\Bigg|_0^2+\frac{18}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{3}\Bigg|_0^2-2\cdot\frac{3}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\Bigg|_2^3+\frac{3t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{3}\Bigg|_2^3-\frac{9}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{3}\Bigg|_2^3\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\underline{-\frac{12}{\pi}\cos\frac{2\pi}{3}}+\underline{\underline{\frac{18}{\pi^2}\sin\frac{2\pi}{3}}}+\frac{6}{\pi}+\underline{\frac{6}{\pi}\cos\frac{2\pi}{3}}-\frac{9}{\pi}-\underline{\frac{6}{\pi}\cos\frac{2\pi}{3}}+\underline{\underline{\frac{9}{\pi^2}\sin\frac{2\pi}{3}}}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\underline{-\frac{12}{\pi}\cos\frac{2\pi}{3}}+\underline{\underline{\frac{27}{\pi^2}\sin\frac{2\pi}{3}}}-\frac{3}{\pi}\right]=\frac{2}{3}\left[-\frac{12}{\pi}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{27}{\pi^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{\pi}\right]=$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{3}{\pi}+\frac{27\sqrt{3}}{2\pi^2}\right]=\frac{2\pi+9\sqrt{3}}{\pi^2}.$$

Таким образом,

$$I_{вых}(t)=\frac{2\pi+9\sqrt{3}}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{3}.$$

Оценим потерю мощности за один период:

$$N_{вх}=\frac{R}{6}\int_{-3}^{3}I^2(t)dt=\frac{R}{3}\left[\int_0^2 4t^2dt+\int_2^3(2-t)^2\,dt\right]=\frac{R}{3}\cdot\frac{4t^3}{3}\Bigg|_0^2+\frac{R}{3}\frac{(t-2)^3}{3}\Bigg|_2^3=\frac{11}{3}R.$$

$$N_{вых}=\frac{R}{6}\int_{-3}^{3}I_{вых}{}^2(t)dt=\frac{R}{6}\left[\int_{-3}^{3}b_1{}^2\sin^2\frac{\pi t}{3}dt\right]=\frac{R}{2}b_1{}^2.$$ (Здесь $R$ – сопротивление цепи.)

$$\eta=\left(1-\frac{N_{вых}}{N_{вх}}\right)100^0/_0=\left(1-\frac{3b_1{}^2}{22}\right)100^0/_0=\left(1-\frac{3(2\pi+9\sqrt{3})^2}{22\pi^4}\right)100^0/_0\approx 33^0/_0.$$

***

Остается рассмотреть **аудиторную контрольную работу**.

1) Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать ряд на сходимость (абсолютную и условную) в концах интервала сходимости:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n\left(e^{1/n}-1\right)}{\sqrt{n}}x^{2n}.$$

При $x$=0 ряд сходится, а при $x\neq 0$ применим признак Даламбера к ряду из абсолютных величин:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|x|^{2n+2}\left|e^{1/(n+1)}-1\right|}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n|x|^{2n}\left|e^{1/n}-1\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x|^2\,1/(n+1)}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{1/n}=2|x|^2.$$

Отсюда следует, что ряд сходится абсолютно при $2|x|^2<1$, т.е. при $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, расходится при $|x|>\frac{1}{\sqrt{2}}$, и вопрос остается открытым при $|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, интервал сходимости данного степенного ряда есть $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала.

а) Пусть $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(e^{1/n}-1)}{\sqrt{n}}$. Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость. Применим к ряду, составленному из абсолютных величин, т.е. к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{1/n}-1)}{\sqrt{n}}$, предельный признак сравнения: $\frac{e^{1/n}-1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{n\sqrt{n}}$, $n\to\infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится как ряд Дирихле с $p>1$. Следовательно, и исходный ряд сходится абсолютно.

b) Пусть $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(e^{1/n}-1)}{\sqrt{n}}$, который сходится (см. пункт а)).

Таким образом, множеством сходимости степенного ряда является отрезок $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]$.◄

2) Разложить данную функцию по степеням $x$ и указать множество сходимости ряда к функции $f(x)$:

$$f(x)=xarctgx.$$

Рассмотрим сначала функцию $g(x)=\mathrm{arctg}x$. Чтобы разложить эту функцию по степеням $x$, воспользуемся известным разложением для $(1+x)^p$ по степеням $x$:

$$(1+x)^p=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p-1)(p-2)...(p-n+1)}{n!}x^n,\ |x|<1.$$

Подставим сюда $t^2$ вместо $x$, $p=-1$ и проинтегрируем по отрезку $[0, x]$. (Степенной ряд можно интегрировать внутри интервала сходимости, причем радиус сходимости степенного ряда не изменяется). Имеем:

$$arctgx=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)(-1-1)(-1-2)...(-1-n+1)t^{2n}}{n!}dt=$$

$$=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)(-2)(-3)...(-n)t^{2n}}{n!}dt==\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n!t^{2n}}{n!}dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Умножая полученный ряд на $x$, получаем:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}.$$

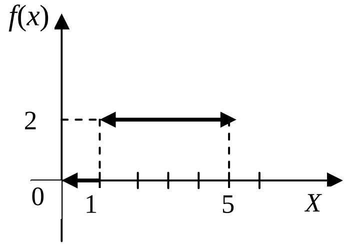
Интервал сходимости этого ряда $(-1, 1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала, т.е. при $|x|=1$. Получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Этот ряд абсолютно расходится, так как $\frac{1}{2n+1}\sim\frac{1}{2n},\ n\to\infty$, а ряд $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится (ряд Дирихле с $p$=1). Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ сходится по признаку Лейбница (знакочередующийся с монотонно стремящимся к нулю модулем общего члена).

Итак, множество сходимости ряда $[-1, 1]$, а отсюда можно заключить, что этот отрезок есть множество сходимости ряда Тейлора к своей функции (последнее вытекает из второй теореме Абеля и следствия из нее, которые не доказываются в нашем курсе) ◄

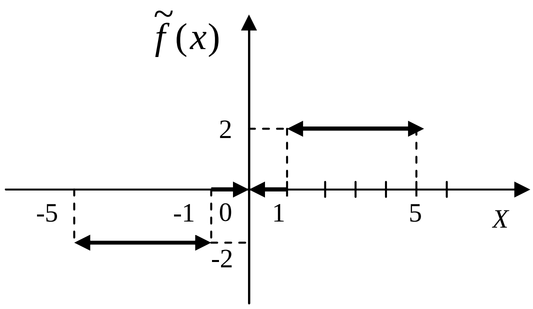
3) Разложить функцию в ряд по синусам кратных дуг на данном интервале. Построить графики функции и суммы ряда на нескольких периодах:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 1,\\ 2, & 1<x<5.\end{cases}$$

Построим график заданной функции:




Продолжим функцию $f(x)$ на симметричный относительно нуля отрезок нечетным образом, и полученную функцию обозначим $\tilde{f}(x)$. Ее график имеет вид:




Эту новую функцию разложим в ряд Фурье на отрезке $[-5, 5]$. Функция $\tilde{f}(x)$ нечетная, поэтому все коэффициенты $a_n$ ($n$=0,1,2,…) равны нулю, а для $b_n$ получаем формулу:

$$b_n=\frac{2}{5}\int_0^5\tilde{f}(x)\sin\frac{\pi nx}{5}dx=\frac{2}{5}\left[\int_0^1 0\cdot\sin\frac{\pi nx}{5}dx+\int_1^5 2\cdot\sin\frac{\pi nx}{5}dx\right]=\frac{2}{5}\int_1^5 2\sin\frac{\pi nx}{5}dx=$$

$$=-\frac{4}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{5}\Big|_1^5=-\frac{4}{\pi n}\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi n}{5}\right)=\frac{4}{\pi n}\left(\cos\frac{\pi n}{5}-(-1)^n\right).$$

Поскольку на интервале (0, 5) $\tilde{f}(x)=f(x)$, то в силу теоремы о поточечной сходимости ряда Фурье в точках непрерывности функции получаем:

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{5}-(-1)^n\right)\sin\frac{\pi n x}{5},\quad x\in(0,1)\cup(1,5).$$

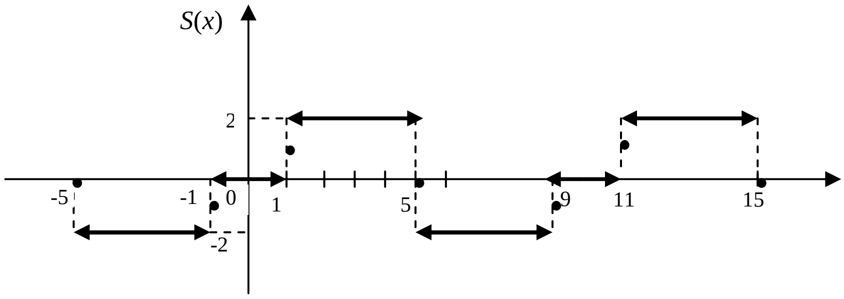
В точках разрыва функции $\tilde{f}(x)$ и на концах интервала сумма $S(x)$ ее ряда Фурье соответственно равна:

$$S(-1)=\frac{\tilde{f}(-1+0)+\tilde{f}(-1-0)}{2}=-1,$$

$$S(1)=\frac{\tilde{f}(1+0)+\tilde{f}(1-0)}{2}=1,\ S(0)=\frac{\tilde{f}(+0)+\tilde{f}(-0)}{2}=0,$$

$$S(-5)=S(5)=\frac{\tilde{f}(-5+0)+\tilde{f}(5-0)}{2}=0.$$

График ряда Фурье на двух периодах имеет вид:




***