ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1996 МАТЕМАТИКА № 4 (407)

УДК 517.938

С.Х.АРАНСОН, Е.В.ЖУЖОМА, Т.В.МЕДВЕДЕВ

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЧЕРРИ НА ОКРУЖНОСТИ И ПОТОКОВ ЧЕРРИ НА ТОРЕ [1)]

1. Введение

В 1938 г. Т.Черри [1] построил на торе T^2 аналитический поток с нигде не плотным множеством Ω, в котором всюду плотны незамкнутые устойчивые по Пуассону траектории и полутраектории. При этом Ω содержит конечное ненулевое число состояний равновесия $o_1,\dots,o_k$, каждое из которых является гиперболическим седлом. В современной терминологии Ω является странным аттрактором (или репеллером), т.к. за исключением точек $o_1,\dots,o_k$ множество Ω локально гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок и является притягивающим (или отталкивающим). Обобщение примера Черри привело к понятию потока Черри.

На негомотопной нулю замкнутой трансверсали поток Черри индуцирует отображение последования Пуанкаре без периодических орбит (с иррациональным числом вращения) с интервалами постоянства и точками разрыва. Вопрос о наличии или отсутствии у таких отображений блуждающих интервалов в полной общности до сих пор не решен (см. [2]–[4], [9]).

В данной статье мы решаем задачу эквивалентности потоков типа Черри на торе и преобразований Черри окружности.

2. Вспомогательные результаты

Обозначим через $P(\mathbb{R})$ множество неубывающих преобразований прямой $\mathbb{R}$ степени единица (т.е. $f(x+1)=f(x)+1$). Пусть $\pi:\mathbb{R}\to S^1$ — универсальное накрытие окружности S^1, $\pi(x)= =x(\mathrm{mod}\,1)$. Тогда $\overline{f}\in P(\mathbb{R})$ является накрывающим для некоторого преобразования $f:S^1\to S^1$, т.е. $f\cdot\pi=\pi\cdot\overline{f}$. Обозначим через $P(S^1)$ множество преобразований окружности S^1, для каждого из которых существует накрывающее преобразование из $P(\mathbb{R})$. Пусть $\overline{f}\in P(\mathbb{R})$. Число $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{f}^n(x)}{n}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{rot}(\overline{f})$, $x\in\mathbb{R}$, называется числом вращения преобразования $\overline{f}$. Если $f\in P(S^1)$, то число $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\overline{f}^n(x)}{n}(\mathrm{mod}1)\overset{\mathrm{def}}{=}\mathrm{rot}(f)$, $x\in\mathbb{R}$, где $\overline{f}\in P(\mathbb{R})$ – накрывающее для f преобразование, называется числом вращения преобразования f. Будем говорить, что отображения $f,g\in P(S^1)$ сопряжены, если существует такой гомеоморфизм $h\in P(S^1)$, что $f\cdot h=h\cdot g$. Ото-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 93-01-01407) и при частичной поддержке грантом № R 99 000.

бражение $f \in P(S^1)$ полусопряжено отображению $g \in P(S^1)$, если существует такое непрерывное отображение $h \in P(S^1)$, что $f \cdot h = h \cdot g$.

Следующая лемма известна в случае, когда f – гомеоморфизм (напр., [5]). Для преобразования $f \in P(S^1)$ доказательство аналогично, и мы его опускаем.

ЛЕММА 1. *Пусть* $f \in P(S^1)$, $\mathrm{rot}(f) \in \mathbb{R} \setminus Q$, *имеет орбиту, не являющуюся всюду плотной. Тогда:* 1) f *полусопряжено с* R_α *(поворотом на угол* α*) с помощью непрерывного отображения* $h \in P(S^1)$, *не являющегося гомеоморфизмом;* 2) *если* h_1, h_2 – *непрерывные преобразования, осуществляющие полусопряженность* f *с* R_α, *то существует такое число* β, *что* $h_1 = R_\beta \cdot h_2$ *(следовательно, любое непрерывное преобразование, полусопрягающее* f *с* R_α, *не является гомеоморфизмом и определяется с точностью до сдвига);* 3) *пусть* $h \in P(S^1)$ *осуществляет полусопряженность* f *с* R_α, *и положим* $X(f,h) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} \{x \in S^1 : h^{-1}(x)$ *содержит более одной точки*$\}$. *Тогда:* а) *для любого* $x \in X(f,h)$ *прообраз* $h^{-1}(x)$ *есть замкнутый интервал;* б) *множество* $\Omega(f) \overset{\mathrm{def}}{=\!=} S^1 \setminus \bigcup \mathrm{int}\, h^{-1}(x)$, *где объединение берется по всем* $x \in X(f,h)$, *является непустым замкнутым совершенным множеством, не зависящим от полусопряженного преобразования* h; в) $h[\Omega(f)] = S^1$.

3. Преобразования Черри

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Преобразование $\overline{f} \in P(\mathbb{R})$ называется преобразованием Черри прямой $\mathbb{R}$, если оно удовлетворяет следующим условиям: 1) на любом конечном интервале преобразование $\overline{f}$ имеет конечное число интервалов постоянства (т.е. интервалов, на каждом из которых $\overline{f}$ принимает постоянное значение) и конечное число точек разрыва; 2) в концевых точках интервалов постоянства преобразование $\overline{f}$ непрерывно; 3) если x_0 — точка разрыва, то $\overline{f}(x) \uparrow \overline{f}(x_0)$ при $x \uparrow x_0$ (т.е. в точках разрыва преобразование $\overline{f}$ непрерывно слева); 4) $\overline{f}$ имеет иррациональное число вращения; 5) если $[a;b]$ – интервал постоянства, то для любого $n \in \mathbb{N}$ полный прообраз $\overline{f}^{-n}([a;b])$ является замкнутым интервалом, в некоторой окрестности которого преобразование $\overline{f}$ является гомеоморфизмом; 6) если x_0 — точка разрыва преобразования $\overline{f}$ и $[c;d] = [\overline{f}(x_0); \lim\limits_{x \downarrow x_0} \overline{f}(x)]$, то для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ образ $\overline{f}^n([c;d])$ есть замкнутый интервал, в некоторой окрестности которого $\overline{f}$ является гомеоморфизмом; 7) все образы интервалов постоянства и все точки разрыва преобразования $\overline{f}$ лежат в $\Omega(\overline{f}) = \pi^{-1}[\Omega(f)]$.

Множество преобразований Черри прямой обозначим через $\mathrm{Ch}(\mathbb{R})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Преобразование $f \in P(S^1)$ называется преобразованием Черри окружности S^1, если существует накрывающее для f преобразование Черри прямой. Множество преобразований Черри окружности обозначим через $\mathrm{Ch}(S^1)$.

В дальнейшем, если не оговорено противное, предполагается, что преобразование Черри не является гомеоморфизмом, т.е. имеет, по крайней мере, одну точку разрыва или один интервал постоянства. В силу иррациональности числа вращения преобразования Черри окружности положительная полуорбита любой точки относительно этого преобразования не является всюду плотной. Поэтому согласно лемме 1 преобразование Черри окружности полусопряжено повороту с помощью некоторого непрерывного монотонно неубывающего отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $f\in \mathrm{Ch}(S^1)$ полусопряжено с R_α, $\alpha=\mathrm{rot}(f)$, с помощью непрерывного отображения $h\in P(S^1)$, и пусть замкнутый интервал I отображается посредством h в точку, причем $h^{-1}[h(I)]=I$. Если $f^n(I)$ — интервал для всех $n\in Z$, то I называется серым интервалом.

В силу леммы 1 определение серого интервала не зависит от полусопряженного отображения h.

Пусть I - серый интервал. Из равенства $R_\alpha^n\cdot h=h\cdot f^n$, $n\in\mathbb{N}$, следует, что интервал $f^i(I)$ принадлежит некоторому серому интервалу, который обозначим через $\hat{f}^i(I)$ для любого $i\in\mathbb{Z}$. Заметим, что не всегда $f^i(I)=\hat{f}^i(I)$. Например, $f(I)$ может примыкать к интервалу постоянства, тогда $\hat{f}(I)$ равен объединению интервала $f(I)$ и интервала постоянства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть I — серый интервал преобразования $f\in \mathrm{Ch}(S^1)$. Объединение $J(I)=\bigcup\limits_{n\in Z}\hat{f}^n(I)$ называется серой ячейкой.

Дадим теперь определения черного интервала и черной ячейки (отрицательных и положительных) преобразования Черри f окружности S^1.

Пусть $[a;b]\subset S^1$ - интервал постоянства преобразования $f\in \mathrm{Ch}(S^1)$. Согласно условию 5) определения 1 полный прообраз $f^{-n}([a;b])$ является интервалом для любого $n\in\mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ — целые неотрицательные числа), который называется черным отрицательным интервалом. Объединение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} f^{-n}([a;b])\overset{\mathrm{def}}{=\!=} J(a;b)$ называется черной отрицательной ячейкой.

Если $x_0\in S^1$ - точка разрыва преобразования $f\in \mathrm{Ch}(S^1)$, то $[f(x_0);\ \lim\limits_{x\downarrow x_0} f(x)]\overset{\mathrm{def}}{=\!=}[c;d]$ - интервал, который обозначим через $\hat{f}(x_0)$. Согласно условию 6) определения 1 $f^n([c;d])$ - интервал для любого $n\in\mathbb{Z}^+$, который называется черным положительным интервалом. Объединение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}^+} f^n([c;d])\overset{\mathrm{def}}{=\!=} J(x_0)$ называется черной положительной ячейкой.

Положим $X(f,h)=\bigcup h(I)$, где объединение берется по всем серым интервалам I. Множество $X(f,h)$ представляет собой не более чем счетное семейство орбит поворота R_α, где $\alpha=\mathrm{rot}(f)$.

Положим $X^-(f,h)=\bigcup h(I)$, где объединение берется по всем черным отрицательным I. Согласно условию 1) определения 1 множество $X^-(f,h)$ представляет собой конечное число отрицательных полуорбит поворота R_α.

Аналогично $X^+(f,h)=\bigcup h(I)$, где объединение берется по всем черным положительным интервалам I, представляет собой конечное число положительных полуорбит поворота R_α.

Если серый интервал $[\alpha;\beta]$ содержит интервалы постоянства, то точке $h([\alpha;\beta])$ припишем код $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^-$ следующим образом. Согласно условиям 5) и 7) любой интервал $[a;b]\subseteq [\alpha;\beta]$ постоянства имеет общую концевую точку с интервалом $[\alpha;\beta]$. Поэтому $[\alpha;\beta]$ содержит не более двух интервалов постоянства. Если $[\alpha;\beta]$ содержит два интервала постоянства, то положим $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^-=(1;1)^-$. Если $[\alpha;\beta]$ содержит один интервал постоянства $[a;b]$, то либо $a=\alpha$, либо $b=\beta$. В первом случае положим $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^-=(1;0)^-$, во втором — $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^-=(0;1)^-$.

Полностью аналогично припишем код $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^+$ точке $h([\alpha;\beta])$, если серый интервал $[\alpha, \beta]$ содержит интервалы вида $\hat{f}(x_0)$, где x_0 — точка разрыва преобразования f.

Отметим, что точки, снабженные кодом, являются начальными точками полуорбит $X^-(f,h)$ или $X^+(f,h)$, которые принадлежат орбитам из $X(f,h)$. Заметим также, что некоторым точкам из $X^-(f,h) \cap X^+(f,h)$ приписываются два кода.

Пусть $f \in \mathrm{Ch}(S^1)$. Схемой $S(f,h)$ преобразования f относительно полусопрягающего отображения h назовем совокупность орбит $X(f,h)$, полуорбит $X^-(f,h)$, $X^+(f,h)$ и закодированных точек $X^*(f,h)$, снабженных соответствующими кодами.

Схемы преобразований $f, g \in \mathrm{Ch}(S^1)$ называются изоморфными, если существует такое $\beta \in \mathbb{R}$, что

$$R_\beta[X(f,h_1)] = X(g,h_2), \quad R_\beta[X^-(f,h_1)] = X^-(g,h_2),$$

$$R_\beta[X^+(f,h_1)] = X^+(g,h_2), \quad R_\beta[X^*(f,h_1)] = X^*(g,h_2),$$

причем каждую точку из $X^*(f,h_1)$ поворот R_β переводит в точку с тем же кодом (или кодами), где отображения h_1, h_2 осуществляют полусопряженность f, g соответственно с поворотами $R_{\mathrm{rot}(f)}$, $R_{\mathrm{rot}(g)}$. В силу леммы 1 схемы преобразования $f \in \mathrm{Ch}(S^1)$ относительно разных полусопрягающих отображений h с поворотом $R_{\mathrm{rot}(f)}$ изоморфны.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть преобразования f и $g \in \mathrm{Ch}(S^1)$ на окружности полусопряжены с поворотами посредством отображений h_1, h_2, и пусть $S(f,h_1)$, $S(g,h_2)$ - схемы f, g относительно h_1, h_2 соответственно. Преобразования f, g сопряжены тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rot}(f)=\mathrm{rot}(g)$ *и схемы $S(f,h_1)$, $S(g,h_2)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как число вращения иррационально, то $\Omega(f)$ и $\Omega(g)$ нигде не плотны на S^1 и представляют из себя канторовское множество. Поэтому из условий 5) и 6) определения 1 следует, что h_1 и h_2 соответственно переводят черный (положительный и отрицательный) интервал в точку.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $h \circ f = g \circ h$. Тогда согласно [5] $\mathrm{rot}(f)=\mathrm{rot}(g)$. Так как h — гомеоморфизм, осуществляющий топологическую сопряженность f с g, то $h[\Omega(f)]=\Omega(g)$. Возьмем точку $x \in X(f,h_1)$. В силу леммы 1 замкнутый интервал $h_1^{-1}(x)$ пересекается с $\Omega(f)$ только по своим концевым точкам и по построению множества $X(f,h_1)$ является серым интервалом отображения f. Поэтому $h[h_1^{-1}(x)]$ есть серый замкнутый интервал, пересекающийся с $\Omega(g)$ только в концевых точках. Отсюда вытекает, что под действием h_2 серый интервал $h[h_1^{-1}(x)]$ отображается в точку из $X(g,h_2)$. Если точка $x \in X(f,h_1) \cap X^+(f,h_1)$ (либо $x \in X(f,h_1) \cap X^-(f,h_1)$) и точке x не приписан код, то $h_1^{-1}(x)$ содержит черный положительный (отрицательный) интервал. Поэтому $h(h_1^{-1}(x))$ также содержит черный положительный (отрицательный) интервал и, следовательно, $h_2(h(h_1^{-1}(x))) \in X(g,h_2) \cap X^+(g,h_2)$ (либо $h_2(h(h_1^{-1}(x))) \in X(g,h_2) \cap X^-(g,h_2)$) и не имеет кода. Если $x \in X(a,h_1) \cap X^+(f,h_1)$ (либо $x \in X(a,h_1) \cap X^-(f,h_1)$) и точка x снабжена кодом, то $h_1^{-1}(x)$ содержит интервал постоянства (точку разрыва) отображения f, который при гомеоморфизме h перейдет в интервал постоянства (точку разрыва) отображения g. Отсюда и из монотонности отображения h следует, что $h_2(h(h_1^{-1}(x)))$ будет снабжена тем же кодом, что и x.

В случае $x \in X^{+}(f,h_1)\setminus X(f,h_1)$ (либо $x\in X^{-}(f,h_1)\setminus X(f,h_1)$), т.е. когда черный положительный (отрицательный) интервал $h_1^{-1}(x)$ не содержится в сером интервале, доказательство аналогично.

Покажем, что h_0 коммутирует с R_α. Возьмем $x\in S^1\setminus(X(f,h_1)\cup X^{+}(f,h_1)\cup X^{-}(f,h_1))$, тогда

$$R_\alpha\circ h_0(x) = R_\alpha\circ h_2\circ h\circ h_1^{-1}(x) = h_2\circ h\circ f\circ h_1^{-1}(x) = h_2\circ h\circ h_1^{-1}\circ R_\alpha(x) = h_0\circ R_\alpha(x).$$

По непрерывности $R_\alpha\circ h_0(x)=h_0\circ R_\alpha(x)$ для всех $x\in S^1$. Согласно лемме 1 $h_0=R_\beta$ для некоторого $\beta\in R$ и $h_0[X(f,h_1)]=R_\beta[X(f,h_1)]=X(g,h_2)$, т.е. $X(f,h_1)\equiv X(g,h_2)$, и аналогичные соотношения выполняются для множеств $X^{+}(f,h_1)$, $X^{-}(f,h_1)$ и $X^{*}(f,h_1)$, причем коды закодированных точек сохраняются.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Для канторовского множества Ω на окружности S^1 положим $\mathring{\Omega}=\Omega\setminus\Gamma(\Omega)$, где $\Gamma(\Omega)$ — множество концевых точек смежных интервалов $S^1\setminus\Omega$. По условию существует такое $\beta\in R$, что

$$X(g,h_2) = R_\beta[X(f,h_1)],\qquad X^{+}(g,h_2) = R_\beta[X^{+}(f,h_1)],$$

$$X^{-}(g,h_2) = R_\beta[X^{-}(f,h_1)],\qquad X^{*}(g,h_2) = R_\beta[X^{*}(f,h_1)]$$

и закодированные точки при повороте R_β переходят в точки с теми же кодами. Так как $h_1[\mathring{\Omega}(f)] = S^1\setminus(X(f,h_1)\cup X^{+}(f,h_1)\cup X^{-}(f,h_1))$ и $h_2[\mathring{\Omega}(g)] = S^1\setminus(X(g,h_2)\cup X^{+}(g,h_2)\cup X^{-}(g,h_2))$, то определено отображение $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1|\mathring{\Omega}(f):\mathring{\Omega}(f)\to\mathring{\Omega}(g)$. Покажем, что это отображение равномерно непрерывно. Зададим $\varepsilon>0$. Существует такой конечный набор смежных интервалов $J_1,\dots,J_k$ канторовского множества $\Omega(g)$, что длина любого множества $S^1\setminus\bigcup_{i=1}^{k}J_i$ меньше ε. Так как

$$h_2\left[\bigcup_{i=1}^{k}J_i\right]\subseteq X(g,h_2)\cup X^{+}(g,h_2)\cup X^{-}(g,h_2),$$

$$R_\beta[X(f,h_1)\cup X^{+}(f,h_1)\cup X^{-}(f,h_1)] = X(g,h_2)\cup X^{+}(g,h_2)\cup X^{-}(g,h_2),$$

то имеются такие смежные интервалы $G_1,\dots,G_k$ канторовского множества $\Omega(g)$, что

$$R_\beta\left[h_1\left(\bigcup_{i=1}^{k}G_i\right)\right] = h_2\left(\bigcup_{i=1}^{k}J_i\right).$$

Пусть число $0<\delta<1/2$ меньше длины каждого G_i, $i=1,\dots,k$. Тогда если расстояние между точками $x_1,x_2\in\mathring{\Omega}(f)$ меньше δ, то наименьшая дуга окружности с концевыми точками x_1, x_2 не содержит интервал G_i $(i=1,\dots,k)$. Следовательно, одна из дуг с концевыми точками $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1(x_i)$, $i=1,2$, не содержит ни одного интервала J_i, $i=1,\dots,k$. Поэтому $|h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1(x_1)-h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1(x_2)|<\varepsilon$, что доказывает равномерную непрерывность отображения $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1|\mathring{\Omega}(f)$. Аналогично показывается, что отображение $h_1^{-1}\circ R_\beta^{-1}\circ h_2|\mathring{\Omega}(g):\mathring{\Omega}(g)\to\mathring{\Omega}(f)$ также равномерно непрерывно.

Так как $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1|\mathring{\Omega}(f)$ равномерно непрерывно, то оно продолжается до непрерывного отображения $h:\mathrm{cl}[\mathring{\Omega}(f)]=\Omega(f)\to\Omega(g)=\mathrm{cl}[\mathring{\Omega}(g)]$, где $\mathrm{cl}(A)$ — замыкание множества A. Так как отображение h есть продолжение монотонного отображения $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1$, то h также непрерывно. Поскольку множество точек из $\mathring{\Omega}$ всюду плотно в канторовском множестве Ω, то $h[\Gamma(\Omega(f))]=\Gamma(\Omega(g))$.

Отображение h взаимно однозначно, т.к. этим свойством обладает $h\big|_{\mathring{\Omega}(f)}$ и $h:\Omega(f)\longrightarrow$ $\longrightarrow\Omega(g)$ – гомеоморфизм. Отметим, что если $x\in\Gamma(\Omega(f))$ есть точка разрыва отображения f и при этом x ограничивает некоторый серый интервал, то $h_1(x)$ приписан соответствующий код $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^+$ и $R_\beta\circ h_1(x)$ имеет тот же код. Значит, $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1(x)$ содержит точку разрыва отображения g, которая согласно условию 7) определения 1 содержится в $\Gamma(\Omega(g))$. Поскольку h является монотонным продолжением отображения $h_2^{-1}\circ R_\beta\circ h_1$ с $\mathring{\Omega}(f)$ на $\Omega(f)$, то $h(x)$ есть точка разрыва отображения g, соответствующая коду $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^+$. Пользуясь изоморфностью схем, продолжим h до отображения окружности так, чтобы $h\circ f=f\circ h$.

Рассмотрим поворот R_α, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus Q$. Допустимой схемой называется совокупность не более чем счетного семейства X орбит, конечного семейства X^+ положительных и X^- отрицательных полуорбит поворота R_α, обладающих следующими свойствами: а) каждой начальной точке положительной (отрицательной) полуорбиты из пересечения $X^+\cap X$ $(X^-\cap X)$ приписан код $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^{+(-)}$, $\varepsilon_1\in\{0,1\}$, $\varepsilon_1+\varepsilon_2\geqslant 1$; б) все полуорбиты из $X^+\cup X^-$, не принадлежащие X, попарно не пересекаются; в) для каждой орбиты $o\in X$ имеются не более четырех полуорбит из $X^-\cup X^+$, лежащих на o, причем не более двух из каждого множества X^-, X^+, и любая точка орбиты o принадлежит не более двум полуорбитам из $X^-\cup X^+$; г) если две полуорбиты из $X^-\cup X^+$ пересекаются (следовательно, лежат на некоторой орбите из X), то коды $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $(\varepsilon_1',\varepsilon_2')$ их начальных точек противоположны, т.е. $\varepsilon_i+\varepsilon_i'=1$, $i=1,2$.

Преобразование $f\in\mathrm{Ch}(S^1)$ имеет допустимую схему относительно любого полусопряжения f с $R_{\mathrm{rot}(f)}$. Действительно, пусть $S(f,h)$ — схема f относительно полусопрягающего h. Если две полуорбиты $o_1^{()}$, $o_2^{()}$ из $X^-(f,h)\cup X^+(f,h)$ не принадлежат $X(f,h)$, то соответствующие им черные ячейки не пересекаются с серыми интервалами и в силу условий 5), 6) определения 1 не имеют пересекающихся черных интервалов. Следовательно, $o_1^{()}$, $o_2^{()}$ не пересекаются.

Аналогично из условия 7) определения 1 вытекают свойства в), г).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $R_\alpha:S^1\longrightarrow S^1$ — поворот с $\alpha\in\mathbb{R}\setminus Q$ и S — допустимая схема. Тогда существует $f\in\mathrm{Ch}(S^1)$, полусопряженное посредством h с R_α, $\alpha=\mathrm{rot}(f)$, и такое, что $S(f,h)=S$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем на каждой орбите из множества X и на каждой полуорбите из $X^+\cup X^-\setminus X$ по одной точке $x_1,\ldots,x_l,\ldots$, причем для положительных (отрицательных) полуорбит из $X^+\setminus X$ $(X^-\setminus X)$ возьмем начальную точку. Точке $R_\alpha^n(x_l)$, $n\in\mathbb{Z}$ для $x_l\in X$ и $n\geqslant 0$ $(n\leqslant 0)$ для $x_l\in X^+$ $(x_l\in X^-)$, поставим в соответствие число $a_n^{(l)}>0$ так, чтобы $\sum\limits_{n,l}a_n^{(l)}=a<+\infty$. Например, $a_n^{(l)}=(|n|+l+1)^{-1}(|n|+l+2)^{-1}$.

Вместо каждой точки $R_\alpha^n(x_l)$ поместим на окружности отрезок $I_n^{(l)}$ длины $a_n^{(l)}$. В результате получим окружность $S(1+a)$ длины $1+a$, причем взаимное расположение интервалов $I_n^{(l)}$, $n\in Z$, $l=1,\ldots$, лежащих на $S(1+a)$, совпадает с взаимным расположением точек $x_n^{(l)}$,

$l=1,\ldots,$ лежащих на S^1. Приведенная конструкция называется раздуванием. Окружность $S(1+a)$ получается раздуванием каждой точки из $X\cup X^+\cup X^-$. По построению $\tilde h(I_n^{(l)})=x_n^{(l)}$, $\tilde h\left(\bigcup\limits_{l,n} I_n^{(l)}\right)=X\cup X^+\cup X^-$.

Т.к. X всюду плотно в S^1 и $\tilde h$ монотонно неубывающее, то множество $\Omega=S^1\setminus\bigcup\limits_{n,l}\operatorname{int} I_n^{(l)}$ канторовское [10].

На $\mathring{\Omega}=S^1\setminus\bigcup\limits_{n,l} I_n^{(l)}$ отображение $\tilde h$ взаимно однозначное и в силу монотонности является гомеоморфизмом на свой образ $S^1\setminus X$. Поэтому $R_\alpha|S^1\setminus X: S^1\setminus X\to S^1\setminus X$ индуцирует посредством $\tilde h$ гомеоморфизм $\tilde f|\mathring{\Omega}=\tilde h^{-1}\circ R_\alpha\circ\tilde h|\mathring{\Omega}:\mathring{\Omega}\to\mathring{\Omega}$. Аналогично доказательству равномерной непрерывности отображения $h_2^{-1}\circ R_\alpha\circ h_1$ в доказательстве теоремы 1 показывается, что $\tilde f|\mathring{\Omega}$ равномерно непрерывно и может быть продолжено до гомеоморфизма $\tilde f|\Omega:\Omega\to\Omega$. Пусть интервал $I_n^{(l)}$ с концами (α,β) получен в результате раздувания точки $x_n^{(l)}$ с кодом $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^{+(-)}$. Тогда отметим на $I_{n+k}^{(l)}$ $(I_{n-k}^{(l)})$, $k=0,1,2,\ldots$ одну точку $y_{1k}^{(l)}$ при $\varepsilon_1+\varepsilon_2=1$ или две точки $y_{1k}^{(l)}$ и $y_{2k}^{(l)}$ при $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2$. Считаем, что $y_{1k}^{(l)}$ лежит на $I_{n\pm k}^{(l)}$ раньше $y_{2k}^{(l)}$. Если некоторой точке было приписано два кода $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)^+$ и $(\varepsilon_1',\varepsilon_2')^-$, то по свойству г) эти коды должны быть противоположны. Выберем точку $y_{10}^{(l)}$ соответствующей коду с $\varepsilon_1=1$ и точку $y_{20}^{(l)}$ — коду с $\varepsilon_2=1$. Определим $\tilde f(y_{ik-1}^{(l)})=y_{ik}^{(l)}$ $(\tilde f^{-1}(y_{ik-1}^{(l)})=y_{ik}^{(l)})$, $k=1,2,\ldots$, $i=1,2$. Если $\varepsilon_1=1$, то продолжим $\tilde f$ на весь $[\alpha,y_{10}]$ так, чтобы (α,y_{10}) был интервалом постоянства отображения $\tilde f$. Если $\varepsilon_2=1$, то доопределим $\tilde f$ на $[y_{i0},\beta]$ так, чтобы (y_{i0},β) был интервалом постоянства $\tilde f$, $i=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ (если $\varepsilon_1=1$, то продолжим $\tilde f^{-1}$ на весь $[\alpha,y_{10}]$ так, чтобы (α,y_{10}) был интервалом постоянства отображения $\tilde f^{-1}$, а если $\varepsilon_2=1$, то доопределим $\tilde f^{-1}$ на $[y_{i0},\beta]$ так, чтобы (y_{i0},β) был интервалом постоянства $\tilde f^{-1}$, $i=\varepsilon_1+\varepsilon_2$). Далее продолжим $\tilde f$ до гомеоморфизма $\tilde f: S(1+a)\to$ $\to S(1+a)$. ■

4. Потоки Черри

Пусть на торе T^2 задан C^r-поток f^t $(r\geqslant 1)$. Квазиминимальным множеством потока называется замыкание незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории. Согласно [6] на T^2 любой поток может иметь не более одного квазиминимального множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. C^r-поток f^t $(r\geqslant 1)$ на T^2 называется потоком Черри, если выполняются следующие условия: 1) f^t имеет одно квазиминимальное множество $\Omega(f^t)$, в котором лежит конечное число состояний равновесия $O_1,\ldots,O_k$; 2) все $O_1,\ldots,O_k$ являются гиперболическими седлами; 3) пусть L_1^i, L_2^i, L_3^i, L_4^i – сепаратрисы седла O_i $(i=1,\ldots,k)$, занумерованные при обходе вокруг седла O_i. Тогда существует одна сепаратриса, например, L_3^i такая, что $\Omega(f^t)\cap[\omega(L_3^i)\cup\alpha(L_3^i)]=0_i$. Для остальных сепаратрис L_1^i, L_2^i, L_4^i выполняется включение $\Omega(f^t)\subset\omega(\alpha)(L_j^i)$, $j=1,2,4$. Сепаратрису L_3^i седла O_i будем называть черной.

Непосредственно из определения 5 вытекает, что множество $\Omega(f^t)$ нигде не плотно. В силу [6] $\Omega(f^t)\setminus\{O_1,\ldots,O_k\}$ локально гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок. Из включения $O_i \in \Omega(f^t)$ следует, что, по крайней мере, две сепаратрисы L_1^i, L_2^i или L_1^i, L_4^i являются незамкнутыми устойчивыми по Пуассону полутраекториями, причем одна сепаратриса является продолжением по Бендиксону другой сепаратрисы. Очевидно, обе сепаратрисы (L_1^i, L_2^i или L_1^i, L_4^i) принадлежат $\Omega(f^t)$ и плотны в $\Omega(f^t)$.

Компоненту множества $D(f^t) = T^2 \setminus [\Omega(f^t) \bigcup_{i=1}^{k} (L_1^i \cup L_2^i \cup L_4^i)]$, содержащую хотя бы одну черную сепаратрису, назовем черной ячейкой (такие компоненты всегда имеются). Остальные компоненты множества $D(f^t)$ называются серыми ячейками (таких компонент может не быть). Черную ячейку будем называть положительной (отрицательной), если черная сепаратриса, которую она содержит, является ω- (соответственно α-) сепаратрисой седла из $\Omega(f^t)$.

Добавим к условиям 1)–3) определения 5 техническое условие 4): в каждой черной ячейке потока f^t лежит ровно одно состояние равновесия — топологический узел; кроме этих узлов и седел $O_1,\dots,O_k$ поток f^t других состояний равновесия не имеет.

Множество потоков Черри на торе обозначим через $\mathrm{Ch}(T^2)$. Если в условии 2) определения 5 опустить требование гиперболичности седел $O_1,\dots,O_k$, то получим определение потока типа Черри. Множество потоков типа Черри обозначим через $\mathrm{Tch}(T^2)$. Очевидно, $\mathrm{Ch}(T^2) \subset \mathrm{Tch}(T^2)$.

Пусть $f^t \in \mathrm{Tch}(T^2)$, и $\Omega(f^t)$ – квазиминимальное множество. Точка $m \in \Omega(f^t)$ называется достижимой изнутри граничной точкой, если существует такая дуга λ с концевой точкой m, что $\lambda \setminus m \subset T^2 \setminus \Omega(f^t)$ (напр., все седла $O_1,\dots,O_k$ являются достижимыми изнутри граничными точками). Множество точек из $\Omega(f^t)$, не являющихся достижимыми изнутри граничными точками, обозначим через $\mathring{\Omega}(f^t)$. Это множество состоит из устойчивых по Пуассону в обе стороны траекторий.

Напомним, что иррациональной обмоткой на торе называется поток, накрывающий для которого на $\mathbb{R}^2$ задается системой $\dot{x}=1$, $\dot{y}=\mu$, $\mu \in \mathbb{R}\setminus Q$. Обозначим через $f_0^t(k)$ поток на T^2, получаемый из иррациональной обмотки f_0^t добавлением $k \geq 1$ непроходимых крошек (непроходимой крошкой называется особенность ровно с двумя седловыми секторами).

Следующая лемма аналогична лемме 1, доказательство ее мы опускаем (см. замечание ниже).

ЛЕММА 2. *Пусть* $f^t \in \mathrm{Tch}(T^2)$ *и квазиминимальное множество* $\Omega(f^t)$ *содержит* $k \geq 1$ *седел* $O_1,\dots,O_k$. *Тогда существует непрерывное (не являющееся гомеоморфизмом) преобразование* $h: T^2 \to T^2$ *со следующими свойствами*: 1) *точки* $h(O_1),\dots,h(O_k)$ *являются непроходимыми крошками потока* $f_0^t(k)$, *где* $\mathrm{rot}(f^t)=\mathrm{rot}(f_0^t(k))$; 2) *черную положительную (отрицательную) ячейку отображение* h *переводит в* α- (ω-) *сепаратрису некоторой непроходимой крошки*; 3) *каждую траекторию множества* $\mathring{\Omega}(f^t)$ *отображение* h *переводит в траекторию потока* $f_0^t(k)$ *с сохранением направления по времени, и более того, ограничение* $h|\mathring{\Omega}(f^t)$ *является гомеоморфизмом на свой образ*; 4) *пусть* w — *серая ячейка, тогда* a) *если достижимая изнутри граница* δw *ячейки* w *не содержит седел, то* $h(w \cup \delta w)$ – *траектория потока* $f_0^t(k)$, b) *если* δw *содержит одно седло, то* $h(w \cup \delta w)$ *состоит из одной непроходимой крошки и обеих ее* *сепаратрис потока* $f_0^t(k)$, c) *если* δw *содержит два седла, то* $h(w \cup \delta w)$ *состоит из двух непроходимых крошек и их сепаратрис*; 5) *образы черных ячеек попарно не пересекаются*; 6) *отображение h гомотопно тождественному*; 7) $h[\Omega(f^t)]=T^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В теории динамических систем отображение h, удовлетворяющее лемме 2, называется операцией сдувания (blowing-down map). Для потока Данжуа f^t на торе такое отображение было построено в [7]. В общем случае операция сдувания построена в [8]. Для потока типа Черри лемму 2 можно вывести либо из леммы 1 и работы [7], либо уточнением общей теоремы из работы [8].

Пусть поток типа Черри f^t и поток $f_0^t(k)$ удовлетворяют лемме 2. Обозначим через f_0^t иррациональную обмотку, полученную из $f_0^t(k)$ удалением всех непроходимых крошек. Пусть $X(f^t,h)=\bigcup h(w)$, где объединение берется по всем черным и серым ячейкам w потока f^t, и обозначим через $X(f^t,h)$ семейство соответствующих траекторий иррациональной обмотки f_0^t (т.е. тех траекторий, которые как множества пересекаются с $X_0(f^t,h)$).

Каждой траектории l из $X(f^t,h)$ припишем набор символов (код) из множества $\{-1;\ 0;\ 1;$ л; п; лп; пл$\}$ следующим образом: цифра -1 (соответственно $+1$) приписывается, если l содержит образ отрицательной (положительной) ячейки, и цифра 0 приписывается, если l содержит образ серой ячейки. Если мы приписали l два числа, то приписываем также букву "л" или "п" (первую букву слов "левый" или "правый" соответственно) в зависимости от того, с какой стороны серая ячейка примыкает к черной. Если мы приписали l три числа, то приписываем еще две буквы "лп" или "пл" аналогичным образом. Семейство $X(f^t,h)$ с приписанными кодами назовем схемой потока f^t, полученной с помощью операции сдувания h (и обозначим снова через $X(f^t,h)$).

Отметим, что число траекторий, в код которых входят цифры ± 1, конечно. Семейство траекторий, в код которых входит цифра 0, не более чем счетное.

Пусть X — не более чем счетное семейство траекторий иррациональной обмотки f_0^t. Предположим, что каждой траектории приписан набор символов (код) из множества $\{-1;\ 0;\ +1;$ л; п; лп; пл$\}$, при этом a) код каждой траектории из X содержит от одной до трех различных цифр; b) число траекторий, в код которых входят цифры ± 1, конечно; c) если код некоторой траектории содержит цифры $+1$, -1, то он содержит также цифру 0; d) если код содержит две цифры, то он содержит одну из букв "л" или "п"; e) если код содержит три цифры, то он содержит буквы "лп" или "пл". Такой набор траекторий с приписанными кодами назовем абстрактной допустимой схемой. Из определения потока типа Черри вытекает, что его схема является допустимой для любой операции сдувания.

Две абстрактные допустимые схемы X_1, X_2 называются соизмеримыми, если существует такой диффеоморфизм $F:T^2 \to T^2$, что: 1) $F(X_1)=X_2$; 2) накрывающий $\overline{F}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ для F имеет вид $\overline{x}=ax+by$, $\overline{y}=cx+dy+\xi$, где $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - целочисленная унимодулярная матрица, $\xi \in \mathbb{R}$; 3) коды траекторий $l \in X_1$, $F(l) \in X_2$ равны для всех траекторий $l \in X_1$; 4) F осуществляет топологическую орбитальную эквивалентность соответствующих иррациональных обмоток.

Напомним, что два потока f^t, g^t на T^2 называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\varphi:T^2 \to T^2$, переводящий траектории одного потока в траектории другого потока с сохранением направления по времени. Если последнее требование сохранения по времени убрать, то получим определение топологической эквивалентности f^t, g^t.

ТЕОРЕМА 3. *Два потока f_1^t, f_2^t типа Черри на T^2 топологически орбитально эквивалентны тогда и только тогда, когда их схемы $X(f_1^t, h_1)$, $X(f_2^t, h_2)$ соизмеримы, где h_i — некоторая операция сдувания потока f_i^t (i=1, 2).*

Из теоремы 3, в частности, вытекает, что с точностью до соизмеримости схема потока типа Черри не зависит от операции сдувания.

Для потока f^t обозначим через f^{-t} поток, полученный из f^t обращением направления по времени.

СЛЕДСТВИЕ. Два потока f_1^t, f_2^t типа Черри на T^2 топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда схемы потоков f_1^t, f_2^t или f_1^{-t}, f_2^t соизмеримы.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть X — абстрактная допустимая схема, и f_0^t — соответствующая иррациональная обмотка. Тогда на T^2 существует C^∞-поток типа Черри f^t, схема которого равна X (в частности,* $\mathrm{rot}(f^t)=\mathrm{rot}(f_0^t)$).

Пусть X - абстрактная допустимая схема. Обозначим через $|X^+|$, $|X^-|$, $|X^0|$ мощность множества траекторий из X, коды которых содержат цифры +1, −1, 0 соответственно.

Следующая теорема показывает, что величины $|X^+|$, $|X^-|$, $|X^0|$ (в том случае, когда $|X^0|$ конечно) и число вращения $\mathrm{rot}(f^t)$ не определяют полный инвариант потока f^t.

ТЕОРЕМА 5. *На T^2 существует континуум попарно топологически не эквивалентных C^∞-потоков f_y^t типа Черри с одинаковым числом вращения Пуанкаре и одними и теми же величинами $|X^+|$, $|X^-|$, $|X^0|$ в любом из следующих случаев:* a) $|X^+|+|X^-|+|X^0|\geqslant 4$; b) $|X^+|=|X^0|=0$, $|X^-|\geqslant 2$; c) $|X^-|=|X^0|=0$, $|X^+|\geqslant 2$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть X — абстрактная допустимая схема. Тогда на T^2 существует C^1-поток Черри, схема которого равна X.*

ТЕОРЕМА 7. *Пусть X — абстрактная допустимая схема, при этом либо $|X^+|=|X^0|=0$, либо $|X^-|=|X^0|=0$. Тогда на T^2 существует C^∞-поток Черри, схема которого равна X.*

Громоздкие доказательства теорем 4–7 опускаем.

Сформулируем две нерешенные проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. Существует ли C^r-поток ($r\geqslant 2$) Черри, у которого $|X^+|\geqslant 1$, $|X^-|\geqslant 1$?

ПРОБЛЕМА 2. Существует ли C^r-поток ($2\leqslant r\leqslant 4$) Черри с $|X^0|\neq 0$?

ЛИТЕРАТУРА

1. Cherry N. *Analytic quasi-periodic discontinuous type on a torus* // Proc. London Math. Soc. - 1938. - V.44. - № 3. - P.175–215.

2. Арансон С.Х. *О топологической структуре квазиминимальных множеств потоков Черри на торе* // Методы качествен. теории дифференц. уравнений. - Горький, 1985. - С.3–18.

3. Арансон С.Х. *О топологической структуре потоков Черри на торе* // Функц. анализ и его прилож. - 1986. - Т.20. - № 1. - С.62-63.

4. Martens M., van Strien S., de Melo W., Mendes P. *On Cherry flows* // Ergod. Theor. Dynam. Syst. - 1990. - V.10. - P.531-554.

5. Herman M. *Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations* // Publ. Math. I.H.E.S. - 1979. - V.49. - P.5-233.

6. Майер А.Г. *О траекториях на ориентируемых поверхностях* // Матем. сб. - 1943. - Т.12. - № 1. - С.71-84.

7. Арансон С.Х., Жужома Е.В. *О топологической классификации сингулярных динамических систем на торе* // Изв. вузов. Математика. - 1976. - № 5. - С.104-107.

8. Gardiner C. *The structure of flows exhibiting nontrivial recurrence on two-dimensional manifolds* // J. Different. Equat. - 1985. - V.57. - № 1. - P.138-158.

9. Арансон С.Х., Жужома Е.В. *C^1-поток Черри с серыми ячейками* // Методы качествен. теории дифференц. уравнений. - Горький, 1988. - С.5-10.

10. Denjoy A. *Sur les courbes definies par les equations differentielles a la surface du tore* // J. math. pures et appl. - 1932. - № 9. - V.4. - P.333-375.

Нижегородский государственный университет

Поступила
03.06.1994