МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ, ГАЗА И ПЛАЗМЫ

УДК 532.5

Е.А. Рувинская [1], О.Е. Куркина[1,2], А.А. Куркин[1]

УТОЧНЕННОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ТРЕХСЛОЙНОЙ СИММЕТРИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева[1],
Государственный университет – Высшая школа экономики (Нижегородский филиал)[2]

Рассматривается вопрос об уточнении модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза с учетом членов высшего порядка малости для случая, когда коэффициент кубической нелинейности может менять знак, на примере внутренних гравитационных волн в трехслойной симметричной модели жидкости (верхний и нижний слои имеют равную толщину, скачки плотности на границах раздела слоев одинаковы).

Ключевые слова: нелинейные эволюционные уравнения, внутренние гравитационные волны.

Динамика внутренних гравитационных волн в океане вызывает особый интерес со стороны исследователей, поскольку и по сей день остается одной из наиболее интересных и в то же время малоисследованных областей механики жидкости и газа. Внутренние волны пронизывают всю толщу вод и играют важнейшую роль во всех динамических процессах Мирового Океана. Так, в шельфовых зонах океана они влияют на изменение рельефа дна путем транспорта наносов или размывов и, в связи с этим могут создавать угрозу для морских сооружений. Амплитуды внутренних волн в океане достигают порой сотен метров, что может быть опасно также для подводных лодок. Перемешивание вод разных температур после прохождения внутренних волн больших амплитуд может оказывать губительное влияние на морскую флору и фауну. Важным аспектом является и то, что внутренние волны могут участвовать в распространении загрязнений на большие расстояния (подобно течениям). Понимание механизмов такого воздействия невозможно без подробных исследований свойств внутренних волн, уточнения их характеристик, особенностей динамики при различных сочетаниях условий в среде.

Таким образом, очевидна важность исследования внутренних волн с точки зрения вопросов обеспечения экологической безопасности: при осуществлении оценочной деятельности в ходе разработки различных гидротехнических и береговых сооружений, переноса осадков и формирования донного и берегового рельефа прибрежной зоны океана, а также распространения загрязнений и примесей в океане.

С тех пор, как на рубеже XIX–XX вв. внутренние волны в океане были открыты экспедицией Нансена на «Фраме» и работой Экмана, объяснившего наблюдения мореплавателей, появилось множество подходов к изучению этого природного явления. В настоящее время продолжают развиваться как численные модели [1–4], так и слабонелинейная теория, позволяющая моделировать динамику внутренних гравитационных волн с помощью эволюционных уравнений, получаемых путем асимптотических разложений полной системы уравнений гидродинамики по малым параметрам нелинейности и дисперсии. Последний подход интересен тем, что показывает неплохую согласованность результатов моделирования с результатами натурных и численных экспериментов, при этом не требует столь объемных вычислений, как в случае численного моделирования, и делает прозрачными связи между параметрами волн. Для применения слабонелинейной теории рассматриваются n-слойные «упрощенные» модели, среди которых наиболее хорошо изученной является двухслойная жидкость, для распространения внутренних волн в которой используется уравнение Гарднера [5–8]. Существуют также работы, посвященные исследованию внутренних волн в трехслойной среде (модифицированное уравнение Кортевега - де Вриза (мКдВ)) [9, 10], настоящая работа также развивает это направление. Рассматривается симметричная трехслойная жидкость. Для такой среды в силу симметрии коэффициент квадратичной нелинейности в слабонелинейных эволюционных уравнениях обращается в нуль, а коэффициент следующего по порядку члена кубической нелинейности может менять знак. Учет возможности смены знака коэффициента кубической нелинейности приводит к необходимости рассматривать расширение мКдВ, включающее нелинейные члены следующих порядков, для более точного описания волновых процессов.

Рассмотрим распространение внутренней волны на границах раздела слоев в трехслойной симметричной жидкости, ограниченной ровным плоским дном и абсолютно гладкой, неподвижной поверхностью.

Будем также считать, что относительный скачок плотности $\Delta\rho$ мал (приближение Буссинеска):

$$\rho_3 = \rho - \Delta\rho, \quad \rho_2 = \rho, \quad \rho_1 = \rho + \Delta\rho,$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 – плотности нижнего, среднего и верхнего слоев соответственно, поэтому в дальнейшем всеми членами $O(\Delta\rho)$ можно пренебречь. Толщину нижнего и верхнего слоев обозначим h, полную глубину жидкости – H, нижнюю границу раздела – $\eta(x,t)$, верхнюю – $\zeta(x, t)$ (рис. 1).

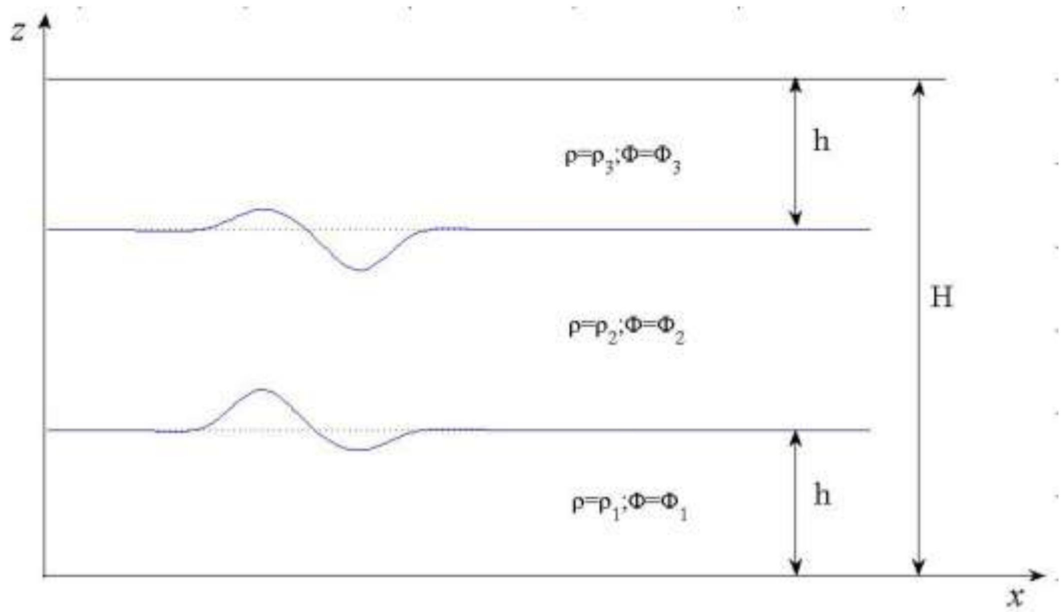

Рис. 1. Схема задачи

Стратифицированная жидкость по определению не является потенциальной [11]. Но мы схематизируем задачу, пренебрегая плавными изменениями плотности вне пикноклинов; для этого предположим, что толщина последних стремится к нулю. В этом случае мы имеем дело с тремя слоями разной плотности. Но тогда на границе раздела двух сред (верхнего и среднего слоя, среднего и нижнего слоя) так же, как и на границе вода-воздух, могут распространяться гравитационные волны, обусловленные действием силы тяжести. Вне скачка жидкость однородна, и здесь можно ввести потенциал скорости. Тогда для каждого слоя справедливо уравнение Лапласа:

$$\nabla^2\Phi_1 = 0, \quad 0 \le z \le h, \quad \Phi_{1z}(z=0) = 0, \tag{1}$$

$$\nabla^2\Phi_2 = 0, \quad h \le z \le H-h, \tag{2}$$

$$\nabla^2\Phi_3 = 0, \quad H-h \le z \le H, \quad \Phi_{3z}(z=H) = 0. \tag{3}$$

Граничное условие на поверхности ставится как условие твердой крышки, на дне – условие непротекания.

На границах раздела слоев запишем кинематические и динамические граничные условия, выполняющие роль условий «сшивки» для рассматриваемых функций.

На $z = \eta(x, t)$ кинематическое граничное условие для нижнего и среднего слоя, а также динамическое граничное условие в силу уравнения Коши- Лагранжа примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + \Phi_{1x}\eta_x - \Phi_{1z} = 0, \\ &\eta_t + \Phi_{2x}\eta_x - \Phi_{2z} = 0, \\ \rho_1\left(\Phi_{1t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 + g\eta\right) &= \rho_2\left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 + g\eta\right). \end{aligned}\right\} z = \eta(x,t) \tag{4}$$

Точно также можно записать кинематические и динамическое граничные условия для верхней границы раздела $z = \zeta(x, t)$:

$$\left.\begin{aligned} &\zeta_t + \Phi_{2x}\zeta_x - \Phi_{2z} = 0, \\ &\zeta_t + \Phi_{3x}\zeta_x - \Phi_{3z} = 0, \\ \rho_2\left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_2)^2 + g\zeta\right) &= \rho_3\left(\Phi_{3t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_3)^2 + g\zeta\right). \end{aligned}\right\} z = \zeta(x,t) \tag{5}$$

Для перехода к асимптотической процедуре необходимо определить малые параметры системы, исходя из геометрии задачи и масштаба исследуемых явлений. В настоящей работе рассматриваются длинные волны, т.е. горизонтальный масштаб бассейна значительно превосходит вертикальный, в то же время амплитуды распространяющихся возмущений предполагаются малыми по сравнению с глубиной водоема. Тогда малые параметры нелинейности и дисперсии, исходя из условия задачи, вводятся следующим образом: $\overline{\mu} = H/L$, $\varepsilon = A/H$, $\mu = \overline{\mu}^2$.

В предположении стандартного масштабирования малых параметров ($\varepsilon \sim \mu$) исходная система уравнений (1) – (5) преобразуется к виду

$$\Phi_{1z} + \varepsilon\Phi_{1x} = 0, \quad 0 \le z \le h, \quad \Phi_{1z}(z=0) = 0, \tag{6}$$

$$\Phi_{2z} + \varepsilon\Phi_{2x} = 0, \quad h \le z \le H-h, \tag{7}$$

$$\Phi_{3z} + \varepsilon\Phi_{3x} = 0, \quad H-h \le z \le H, \quad \Phi_{3z}(z=H) = 0. \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t + \varepsilon\Phi_{1x}\eta_x - \Phi_{1z} = 0, \\ &\eta_t + \varepsilon\Phi_{2x}\eta_x - \Phi_{2z} = 0, \\ \rho_1\left(\Phi_{1t} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Phi_{1x})^2 + \frac{1}{2}(\Phi_{1z})^2 + g\eta\right) &= \rho_2\left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Phi_{2x})^2 + \frac{1}{2}(\Phi_{2z})^2 + g\eta\right). \end{aligned}\right\} z = \eta(x,t) \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \zeta_t + \varepsilon \Phi_{2x}\zeta_x - \Phi_{2z} = 0, \\ \zeta_t + \varepsilon \Phi_{3x}\zeta_x - \Phi_{3z} = 0, \\ \rho_2\left(\Phi_{2t} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Phi_{2x})^2 + \frac{1}{2}(\Phi_{2z})^2 + g\zeta\right) = \rho_3\left(\Phi_{3t} + \frac{1}{2}\varepsilon(\Phi_{3x})^2 + \frac{1}{2}(\Phi_{3z})^2 + g\zeta\right). \end{aligned}\right\} z = \zeta(x,t) \qquad (10)$$

Граничные условия заданы на интерфейсах $z = \eta(x, t)$ и $z = \zeta(x, t)$, которые являются неизвестными функциями и подлежат определению. В предположении малости амплитуд распространяющихся возмущений граничные условия могут быть сведены к более простому виду путем разложения всех неизвестных функций, в них входящих, в ряды Тейлора по малым отклонениям от невозмущенного уровня:

$$f(x, z = \eta|\xi, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j \eta^j|\xi^j}{j!} \frac{\partial^j f}{\partial z^j}\bigg|_{z=h,H-h}.$$

Следующий этап асимптотической процедуры – разложение неизвестных функций в ряды по малому параметру:

$$\eta = \varepsilon(\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \ldots), \qquad (11)$$

$$\zeta = \varepsilon(\zeta_1 + \varepsilon\zeta_2 + \varepsilon^2\zeta_3 + \ldots). \qquad (12)$$

Нетрудно показать, что порядок малости потенциалов составляет $\sqrt{\varepsilon}$, поэтому

$$\Phi_i = \sqrt{\varepsilon}(\phi_{1(i)} + \varepsilon\phi_{2(i)} + \varepsilon^2\phi_{3(i)} + \ldots), i = 1,2,3, \qquad (13)$$

Завершающий этап – переход к медленному времени и медленной координате. Обозначим за c фазовую скорость длинных линейных волн (которую еще предстоит определить) и введем медленные переменные (согласно методу многих масштабов [12]):

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t. \qquad (14)$$

Тогда производные будут иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial x} = \varepsilon^{1/2}\frac{\partial}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -\varepsilon^{1/2}c\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial}{\partial \tau}. \qquad (15)$$

Подставим ряды (11) – (13) в исходную систему уравнений (6) – (10) и, используя переменные (14), (15), перейдем к итерационной процедуре вывода.

На каждом i-м шаге выписываем уравнения (из (6)–(8)) относительно i-й поправки ($\phi_{1(i)}$, $\phi_{2(i)}$, $\phi_{3(i)}$) для потенциалов Φ_1, Φ_2, Φ_3 при текущей i-й степени ε в разложении. Выражаем $\phi_{1(i)}$, $\phi_{2(i)}$, $\phi_{3(i)}$ (интегрируем). В силу того, что уравнения содержат вторые производные от $\phi_{1(i)}$, $\phi_{2(i)}$, $\phi_{3(i)}$ (в (6)–(8) входят лапласианы от искомых функций Φ_1, Φ_2, Φ_3), возникает две константы интегрирования (зависящие от медленного времени и координаты, так как интегрирование ведется по z). «Старшая» константа (при первой степени z) определяется следующим образом:

- для $\phi_{1(i)}$ – из условия «непротекания» на этом шаге;
- для $\phi_{3(i)}$ – из условия «твердой крышки» на этом шаге;
- для $\phi_{2(i)}$ – из системы кинематических граничных условий для Φ_2 на этом шаге.

«Младшая» константа интегрирования (при z^0) определяется на следующем шаге:

- для $\phi_{1(i)}$ – из кинематического граничного условия для Φ_1;
- для $\phi_{3(i)}$ – из кинематического граничного условия для Φ_3;
- для $\phi_{2(i)}$ – из системы кинематических граничных условий для Φ_2.

Из системы динамических граничных условий, в которые в силу конструкции уравнений входят поправки потенциалов с предыдущего шага, находим:

- связь между i-ми поправками к $\eta(x, t)$ и $\zeta(x, t)$, т. е. $\eta_i = f(\zeta_i)$ или наоборот;
- коэффициенты нелинейности, линейной и нелинейной дисперсии эволюционного уравнения для поправки i-1 порядка к $\eta(x, t)$ (либо к $\zeta(x, t)$).

Таким образом, решая рекурсивно систему уравнений (6) – (10) с учетом (11) – (15) по описанному алгоритму, в нулевом порядке по ε определим квадрат фазовой скорости линейных волн c^2. Очевидно, что в рамках линейной задачи в рассматриваемой трехслойной среде существуют две волновые моды: симметричная (когда обе границы раздела отклоняются параллельно, в одну сторону $\eta(x, t) = \zeta(x, t)$) и антисимметричная (когда границы раздела отклоняются на одинаковую величину, но в разных направлениях $\eta(x, t) = -\zeta(x, t)$). В настоящей работе мы рассматриваем лишь первую из этих мод, поэтому выбираем только один из возможных вариантов для фазовой скорости линейных волн:

$$c^2 = \frac{gh\Delta\rho}{\rho}. \tag{16}$$

В следующих порядках получим уравнения

$$\begin{gathered}
\varepsilon : \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}_\tau + \alpha \begin{pmatrix} \zeta_1\zeta_{1\xi} \\ \eta_1\eta_{1\xi} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}_{\xi\xi\xi} = 0, \\
\varepsilon^2 : \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_\tau + \alpha \begin{pmatrix} \zeta_1\zeta_2 \\ \eta_1\eta_2 \end{pmatrix}_\xi + \beta \begin{pmatrix} \zeta_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}_{\xi\xi\xi} + \alpha_1 \begin{pmatrix} \zeta_1^2\zeta_{1\xi} \\ \eta_1^2\eta_{1\xi} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}_{5\xi} + \gamma_1 \begin{pmatrix} \zeta_1\zeta_{1\xi\xi\xi} \\ \eta_1\eta_{1\xi\xi\xi} \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} \zeta_{1\xi}\zeta_{1\xi\xi} \\ -\eta_{1\xi}\eta_{1\xi\xi} \end{pmatrix} = 0, \dots .
\end{gathered} \tag{17}$$

Однако в конечном итоге необходимо получить уравнение относительно неизвестных функций $\eta(x,t)$ для нижней и $\zeta(x, t)$ для верхней границ раздела. Обратившись к рядам (11) и (12), можно записать следующие выражения (на примере $\eta(x,t)$) для слагаемых, входящих в уравнения (17), через искомую функцию:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \varepsilon\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial\eta_3}{\partial t} + \dots\right),$$
$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \varepsilon\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + \dots\right),$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^n\eta}{\partial x^n} = \varepsilon\left(\frac{\partial^n\eta_1}{\partial x^n} + \varepsilon\frac{\partial^n\eta_2}{\partial x^n} + \varepsilon^2\frac{\partial^n\eta_3}{\partial x^n} + \dots\right), \\
\eta\frac{\partial\eta}{\partial x} = \varepsilon^2(\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \varepsilon^3\eta_4 + \dots)\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + \varepsilon^3\frac{\partial\eta_4}{\partial x} + \dots\right) = \\
= \varepsilon^2\left[\eta_1\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\left(\eta_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\left(\eta_3\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \eta_1\frac{\partial\eta_3}{\partial x}\right) + \dots\right], \\
\eta^2\frac{\partial\eta}{\partial x} = \varepsilon^3(\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \varepsilon^2\eta_3 + \varepsilon^3\eta_4 + \dots)^2\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + \varepsilon^3\frac{\partial\eta_4}{\partial x} + \dots\right) = \\
= \varepsilon^3\left[\eta_1^2 + 2\varepsilon\eta_1\eta_2 + \varepsilon^2\left(\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3\right) + 2\varepsilon^3(\eta_1\eta_4 + \eta_2\eta_3) + \dots\right]\left(\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + \varepsilon^3\frac{\partial\eta_4}{\partial x} + \dots\right) = \\
= \varepsilon^3\left[\eta_1^2\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \varepsilon\left(\eta_1^2\frac{\partial\eta_2}{\partial x} + 2\eta_1\eta_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x}\right) + \varepsilon^2\left(\left(\eta_2^2 + 2\eta_1\eta_3\right)\frac{\partial\eta_1}{\partial x} + \eta_1^2\frac{\partial\eta_3}{\partial x} + 2\eta_1\eta_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x}\right) + \dots\right],
\end{gathered} \tag{18}$$

и т.д.

Выписывая аналогичные ряды для всех слагаемых всех порядков, входящих в уравнения (17), с такой точностью по ε, чтобы обеспечить корректность уравнения, и складывая все уравнения (17) до нужного порядка включительно, в полученном суммарном уравнении выделим эти комбинации, приводя все слагаемые к виду рядов для η и ζ, которые даны ранее.

Таким образом, получим обобщенное уравнение Кортевега-де Вриза для верхнего и нижнего интерфейсов (в исходных переменных):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_t + c\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_x + \alpha\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\\ \eta\eta_x\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{xxx} + \alpha_1\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_x\\ \eta^2\eta_x\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{5x} + \gamma_1\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{xxx}\\ \eta\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_2\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} +\\
&+\alpha_2\begin{pmatrix}\zeta^3\zeta_x\\ -\eta^3\eta_x\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{7x} + \gamma_{21}\begin{pmatrix}\zeta_{xx}\zeta_{xxx}\\ \eta_{xx}\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_{22}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xxxx}\\ \eta_x\eta_{xxxx}\end{pmatrix} + \gamma_{23}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{5x}\\ \eta\eta_{5x}\end{pmatrix} + \gamma_{31}\begin{pmatrix}\zeta_x\\ \eta_x\end{pmatrix}^3 +\\
&+\gamma_{32}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xx}\\ \eta\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} + \gamma_{33}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{xxx}\\ \eta^2\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}\zeta^4\zeta_x\\ \eta^4\eta_x\end{pmatrix} + \beta_3\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{9x} + \gamma_{41}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{6x}\\ -\eta_x\eta_{6x}\end{pmatrix} + \gamma_{42}\begin{pmatrix}\zeta_{xx}\zeta_{5x}\\ -\eta_{xx}\eta_{5x}\end{pmatrix} +\\
&+\gamma_{43}\begin{pmatrix}\zeta_{xxx}\zeta_{xxxx}\\ -\eta_{xxx}\eta_{xxxx}\end{pmatrix} + \gamma_{51}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{xx}\zeta_{xxx}\\ \eta\eta_{xx}\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_{52}\begin{pmatrix}\int\zeta_x\zeta_{xx}\zeta_{xxx}dx\\ \int\eta_x\eta_{xx}\eta_{xxx}dx\end{pmatrix} + \gamma_{53}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xxxx}\\ \eta\eta_x\eta_{xxxx}\end{pmatrix} + \gamma_{54}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{5x}\\ \eta^2\eta_{5x}\end{pmatrix} +\\
&+\gamma_{55}\begin{pmatrix}\zeta_x^2\zeta_{xxx}\\ \eta_x^2\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_{56}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}^2\\ \eta_x\eta_{xx}^2\end{pmatrix} + \gamma_{61}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x^3\\ -\eta\eta_x^3\end{pmatrix} + \gamma_{62}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta^2\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} + \gamma_{63}\begin{pmatrix}\zeta^3\zeta_{xxx}\\ -\eta^3\eta_{xxx}\end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned} \tag{19}$$

Коэффициенты уравнения (19) могут быть выписаны в обезразмеренном виде как функции параметра $l = h/H$:

$$\begin{gathered}
\alpha = 0\,,\ \frac{\beta}{cH^2} = -\frac{(4l-3)l}{12}\,,\ \frac{\alpha_1}{c}H^2 = -\frac{3(26l-9)}{8l^3}\,,\quad \frac{\beta_1}{cH^4} = \frac{\left(16l^3-45l+30\right)l}{1440}\,,\\
\gamma_1 = 0\,,\quad \frac{\gamma_2}{cH} = \frac{3\left(8l^2-10l+3\right)}{8l}\,,\quad \frac{\alpha_2}{c}H^3 = \frac{9\left(52l^2-44l+9\right)}{16l^5}\,,\\
\frac{\beta_2}{cH^6} = -\frac{c\left(320\,l^5-1008\,l^4+1260\,l^3-945\,l^2+630\,l-252\right)l}{120960}\,,\\
\frac{\gamma_{21}}{cH^3} = -\frac{\left(256\,l^4-200\,l^3-198\,l^2+231\,l-57\right)}{96\,l}\,,\\
\frac{\gamma_{22}}{cH^3} = -\frac{\left(352\,l^4-704\,l^3+486\,l^2-123\,H^3 l+6\right)}{192\,l}\,,\qquad \gamma_{23} = 0\,,\\
\frac{\gamma_{31}}{c} = \frac{\left(40l^3+726\,l^2-819\,l+207\right)}{96l^3}\,,\quad \frac{\gamma_{32}}{c} = \frac{\left(1912\,l^3-678\,l^2-927\,l+342\right)}{96l^3}\,,\\
\frac{\gamma_{33}}{c} = \frac{\left(952\,l^3-1110\,l^2+369\,l-36\right)}{96l^3}\,,\quad \frac{\alpha_3}{c}H^4 = -\frac{9\left(1324\,l^3-1508\,l^2+513\,l-45\right)}{128\,l^7}\,,\\
\frac{\beta_3}{cH^8} = -\frac{\left(17152\,l^7-76800\,l^6+151200\,l^5-171360\,l^4+121275\,l^3+56700\,l^2+21420\,l-6120\right)l}{29030400}\,,\\
\frac{\gamma_{41}}{cH^5} = \frac{\left(11264\,l^6-33376\,l^5+37824\,l^4-19350\,l^3+4335\,l^2-684\,l+180\right)}{34560\,l}\,,\\
\frac{\gamma_{42}}{cH^5} = \frac{\left(5504\,l^6+4192\,l^5-40152\,l^4+55030\,l^3-31005\,l^2+7218\,l-444\right)}{11520\,l}\,,
\end{gathered} \tag{20}$$

$$\frac{\gamma_{43}}{cH^5} = -\frac{\left(4864\, l^6 - 14240\, l^5 + 7968\, l^4 + 13578\, l^3 - 21219\, l^2 + 10809\, l - 1926\right)}{6912\, l},$$

$$\frac{\gamma_{51}}{cH^2} = -\frac{\left(16544\, l^5 - 18784\, l^4 + 16842\, l^3 - 25377\, l^2 + 18504\, l - 3996\right)}{2304\, l^3},$$

$$\frac{\gamma_{52}}{cH^2} = -\frac{3\left(32l^3 - 64l^2 + 42l - 9\right)}{256\, l},$$

$$\frac{\gamma_{53}}{cH^2} = -\frac{\left(56864\, l^5 + 93936\, l^4 - 330570\, l^3 + 26485\, l^2 - 76320\, l + 6804\right)}{11520\, l^3},$$

$$\frac{\gamma_{54}}{cH^2} = -\frac{\left(48672\, l^5 - 94256\, l^4 + 64590\, l^3 - 18255\, l^2 + 2430\, l - 216\right)}{11520\, l^3},$$

$$\frac{\gamma_{55}}{cH^2} = \frac{\left(189280\, l^5 - 646880\, l^4 + 743190\, l^3 - 334395\, l^2 + 33030\, l + 6804\right)}{11520\, l^3},$$

$$\frac{\gamma_{56}}{cH^2} = \frac{\left(121120\, l^5 - 275560\, l^4 + 152040\, l^3 + 70800\, l^2 - 91035\, l + 20844\right)}{5760\, l^3},$$

$$\frac{\gamma_{61}}{c} H = -\frac{\left(1424\, l^4 + 332\, l^3 - 3444\, l^2 + 2271\, l - 405\right)}{64 l^5},$$

$$\frac{\gamma_{62}}{c} H = -\frac{\left(10928\, l^4 - 11476\, l^3 - 192\, l^2 + 2787\, l - 594\right)}{128\, l^5},$$

$$\frac{\gamma_{63}}{c} H = -\frac{\left(1904\, l^4 - 3172\, l^3 + 1848\, l^2 - 441 l + 36\right)}{64 l^5}.$$

Уравнение (19) соответствует случаю, когда эффекты слабой нелинейности и дисперсии оказываются одного порядка малости, т.е., как уже отмечалось, $\varepsilon \sim \mu$. Обращение в ноль коэффициента квадратичной нелинейности нарушает классическую иерархию малых членов асимптотического разложения. В этом случае стандартное масштабирование уравнения Кортевега-де Вриза $\varepsilon \sim \mu$ требует модификации $\varepsilon^2 \sim \mu$ для учета дисперсионных и нелинейных эффектов в одном порядке, при этом должна возрастать роль следующих по нелинейности членов в асимптотическом разложении волнового поля. Для того, чтобы выполнить модифицированное масштабирование, перепишем уравнение (19) в переменных $\tilde{\eta} = \varepsilon\eta$, $\tilde{\zeta} = \varepsilon\zeta$, $\tilde{x} = \overline{\mu} x$, $\tilde{t} = \overline{\mu} t$ (знаки «тильда» опускаем):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_t + c\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_x + \varepsilon\alpha\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\\ \eta\eta_x\end{pmatrix} + \mu\beta\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{xxx} + \\
&+\varepsilon^2\alpha_1\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_x\\ \eta^2\eta_x\end{pmatrix} + \mu^2\beta_1\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{5x} + \varepsilon\mu\left(\gamma_1\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{xxx}\\ \eta\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_2\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix}\right) + \\
&+\varepsilon^3\alpha_2\begin{pmatrix}\zeta^3\zeta_x\\ -\eta^3\eta_x\end{pmatrix} + \mu^3\beta_2\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{7x} + \varepsilon\mu^2\left(\gamma_{21}\begin{pmatrix}\zeta_{xx}\zeta_{xxx}\\ \eta_{xx}\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \gamma_{22}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xxxx}\\ \eta_x\eta_{xxxx}\end{pmatrix} + \gamma_{23}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{5x}\\ \eta\eta_{5x}\end{pmatrix}\right) + \\
&\quad +\varepsilon^2\mu\left(\gamma_{31}\begin{pmatrix}\zeta_x\\ \eta_x\end{pmatrix}^3 + \gamma_{32}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xx}\\ \eta\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} + \gamma_{33}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{xxx}\\ \eta^2\eta_{xxx}\end{pmatrix}\right) + \varepsilon^4\alpha_3\begin{pmatrix}\zeta^4\zeta_x\\ \eta^4\eta_x\end{pmatrix} + \mu^4\beta_3\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{9x} + \qquad (21)\\
&+\varepsilon\mu^3\left(\gamma_{41}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{6x}\\ -\eta_x\eta_{6x}\end{pmatrix} + \gamma_{42}\begin{pmatrix}\zeta_{xx}\zeta_{5x}\\ -\eta_{xx}\eta_{5x}\end{pmatrix} + \gamma_{43}\begin{pmatrix}\zeta_{xxx}\zeta_{xxxx}\\ -\eta_{xxx}\eta_{xxxx}\end{pmatrix}\right) +
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon^2\mu^2\left(\gamma_{51}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_{xx}\zeta_{xxx}\\ \eta\eta_{xx}\eta_{xxx}\end{pmatrix}+\gamma_{52}\begin{pmatrix}\int\zeta_x\zeta_{xx}\zeta_{xxx}dx\\ \int\eta_x\eta_{xx}\eta_{xxx}dx\end{pmatrix}+\gamma_{53}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xxxx}\\ \eta\eta_x\eta_{xxxx}\end{pmatrix}+\gamma_{54}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{5x}\\ \eta^2\eta_{5x}\end{pmatrix}+\gamma_{55}\begin{pmatrix}\zeta_x^2\zeta_{xxx}\\ \eta_x^2\eta_{xxx}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\gamma_{56}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}^2\\ \eta_x\eta_{xx}^2\end{pmatrix}\right)+\varepsilon^3\mu\left(\gamma_{61}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x^3\\ -\eta\eta_x^3\end{pmatrix}+\gamma_{62}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta^2\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix}+\gamma_{63}\begin{pmatrix}\zeta^3\zeta_{xxx}\\ -\eta^3\eta_{xxx}\end{pmatrix}\right)=0\,.$$

Применяя в (21) соотношение между малыми параметрами $\varepsilon^2=\mu$, получим гораздо более простое уравнение:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_t+\alpha_1\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_x\\ \eta^2\eta_x\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{xxx}+\\ &+\varepsilon\left(\alpha_2\begin{pmatrix}\zeta^3\zeta_x\\ -\eta^3\eta_x\end{pmatrix}+\gamma_2\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix}\right)+\\ &+\varepsilon^2\left(\alpha_3\begin{pmatrix}\zeta^4\zeta_x\\ \eta^4\eta_x\end{pmatrix}+\gamma_{31}\begin{pmatrix}\zeta_x^3\\ \eta_x^3\end{pmatrix}+\gamma_{32}\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xx}\\ \eta\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix}+\gamma_{33}\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{xxx}\\ \eta^2\eta_{xxx}\end{pmatrix}+\beta_1\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{5x}\right)+O\left(\varepsilon^3\right)=0,\end{aligned}\tag{22}$$

где коэффициенты также определяются формулами (20).

Уравнение (22) выведено здесь для уточнения описания волновой динамики в тех случаях, когда коэффициент квадратичной нелинейности обращается в ноль, а коэффициент кубической нелинейности имеет значения, близкие к нулю, т.е. при соотношении толщин слоев, близком к $h/H=9/26$. Проанализируем поведение коэффициентов уравнения (22). Графики зависимостей безразмерных величин коэффициентов от толщины верхнего и нижнего слоев в симметричной жидкости показаны на рис. 2. Как видно из рис. 2, коэффициент α_2 слагаемого нелинейности четвертой степени также может менять знак в окрестности указанной точки, и только коэффициент нелинейности пятой степени α_3 всюду отрицателен. Коэффициенты дисперсии β, β_1 и нелинейной дисперсии γ_2 всюду положительны на области определения, а коэффициенты слагаемых нелинейной дисперсии γ_{31}, γ_{32}, γ_{33} имеют по одной точке смены знака, не совпадающей с $h/H=9/26$.

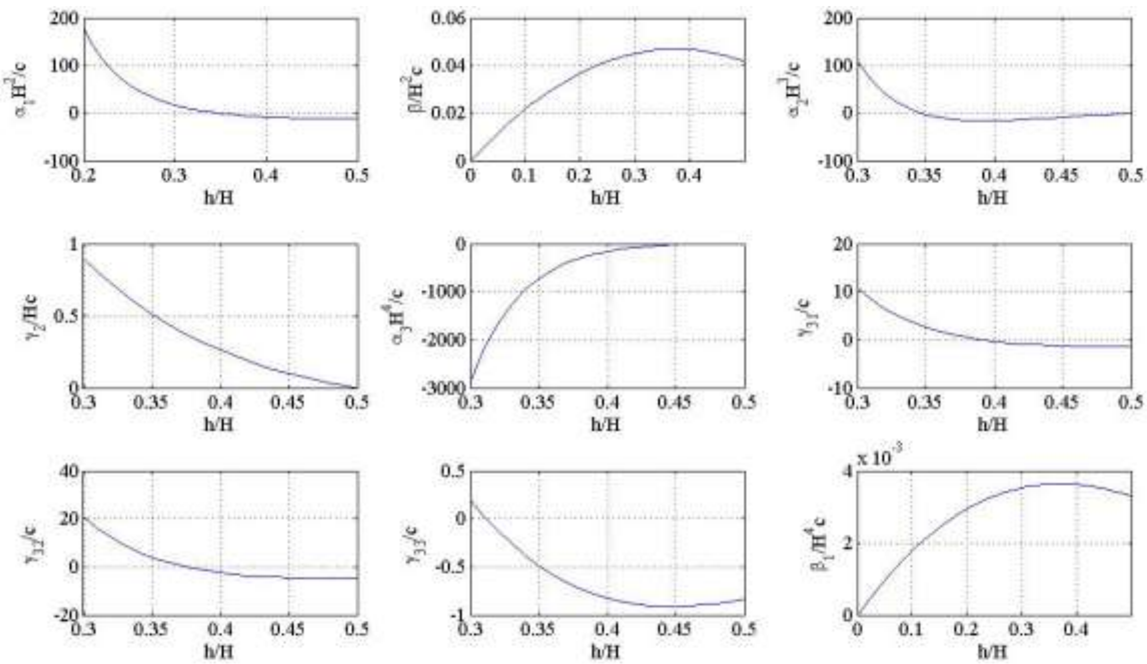

Рис. 2. Поведение коэффициентов расширенного уравнения Кортевега-де Вриза в зависимости от соотношения толщин слоев

Для более детального анализа разложим выражения для коэффициентов уравнения (21) в ряд Тейлора в окрестности точки h = 9/26 H ($\Delta = l - 9/26$):

$$\frac{\beta}{cH^2} = \frac{63}{1352} + \frac{1}{52}\Delta + O\left(\Delta^2\right),$$

$$\frac{\alpha_2 H^3}{c} = \frac{5940688}{6561}\Delta + O\left(\Delta^2\right), \quad \frac{\gamma_2}{cH} = \frac{7}{13} - \frac{115}{18}\Delta + O\left(\Delta^2\right),$$

$$\frac{\alpha_3 H^4}{c} = -\frac{47411260}{59049} + \frac{1208410197\ 8}{531441}\Delta + O\left(\Delta^2\right),$$

$$\frac{\gamma_{31}}{c} = \frac{1483}{486} - \frac{298285}{2916}\Delta + O\left(\Delta^2\right), \quad \frac{\gamma_{32}}{c} = \frac{2341}{486} - \frac{641017}{2916}\Delta + O\left(\Delta^2\right),$$

$$\frac{\gamma_{33}}{c} = -\frac{109}{243} - \frac{30589}{2916}\Delta + O\left(\Delta^2\right), \quad \frac{\beta_1}{cH^4} = \frac{66291}{18279040} + \frac{1099}{1054560}\Delta + O\left(\Delta^2\right).$$

Тогда расширенное модифицированное уравнение Кортевега-де Вриза (22) в окрестности точки h = 9/26 H принимает вид

$$\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_t + \frac{63H^2c}{1352}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{xxx} + \varepsilon\frac{7Hc}{13}\begin{pmatrix}\zeta_x\zeta_{xx}\\ -\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} + \varepsilon^2\left(-\frac{47411260c}{59049H^4}\begin{pmatrix}\zeta^4\zeta_x\\ \eta^4\eta_x\end{pmatrix} + \frac{1483}{486}c\begin{pmatrix}\zeta_x^3\\ \eta_x^3\end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \frac{2341}{486}c\begin{pmatrix}\zeta\zeta_x\zeta_{xx}\\ \eta\eta_x\eta_{xx}\end{pmatrix} - \frac{109}{243}c\begin{pmatrix}\zeta^2\zeta_{xxx}\\ \eta^2\eta_{xxx}\end{pmatrix} + \frac{66291H^4c}{18279040}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}_{5x}\right) + O\left(\varepsilon^3\right) = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) уточняет характер волновой динамики вблизи точки нулевой кубической нелинейности за счет нелинейных дисперсий следующих порядков и нелинейности пятого порядка.

Выводы

Предлагается нелинейно-дисперсионная теория внутренних гравитационных волн малой, но конечной амплитуды, распространяющихся на границах раздела слоев в трехслойной симметричной жидкости. В основе теории лежит асимптотическая процедура разложения гидродинамических полей в уравнениях идеальной слоистой вертикально-однородной несжимаемой жидкости в ряды по малым параметрам нелинейности и дисперсии. В результате временная эволюция волнового поля и трансформация его вдоль координаты распространения описываются нелинейным эволюционным уравнением второго порядка точности относительно малых параметров. В первом порядке по нелинейности и дисперсии полученное уравнение совпадает с широко известным модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза. Полученное уравнение позволяет более точно описывать внутренние волновые поля и должно рассматриваться для симметричных сред, параметры которых обеспечивают близкие к нулю значения коэффициента кубической нелинейности.

Представленные результаты получены в рамках реализации мероприятия «Проведение научных исследований научными группами под руководством докторов наук» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, а также при поддержке грантов Президента РФ для молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-846.2009.1) и докторов наук (МД-99.2010.5), и РФФИ 10-05-00199а.

Библиографический список

1. **Канарская, Ю. В.** Негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью: дисс. … канд. физ.-мат. наук, 01.02.05 / Канарская Ю.В. // Киев, 2004. 126 с.
2. **Ландау, Л.Д.** Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 733 с.
3. **Пелиновский, Е.Н.** Нелинейные эволюционные уравнения / Е.Н. Пелиновский, В.Е. Фридман, Ю.К. Энгельбрехт. – Таллин, Валгус, 1984. – 154 с.
4. **Талипова, Т.Г.** Влияние кубической нелинейности на трансформацию интенсивных внутренних волн / Т.Г. Талипова [и др.] // Доклады Российской Академии наук. 1999. 364. № 6. С. 824–827.
5. **Clarke, S.** On the generation of solitons and breathers in the modified Korteweg – de Vries equation / S. Clarke [at al.] // Chaos. 2000. 10. No. 2. P. 383–392.
6. **Grue, J.** A method for computing unsteady fully nonlinear interfacial waves / Grue J., Friis, A., Palm, E. and Rusas, P.-O. // J. Fluid Mech. 1997. V. 351. P. 223.
7. **Kakutani, T.** Solitary waves on a two-layer fluid / T. Kakutani, N. and Yamasaki // J. Phys. Soc. Japan. 1978. V. 45. P. 674–679.
8. **Koop, C.G.** An investigation of internal solitary waves in two-fluid system / C.G. Koop, and Butler, G. // J. Fluid Mech. 1981. V. 112. P. 225–251.
9. **Lamb, K.** Numerical experiments of internal wave generation by strong tidal flow across a finite amplitude bank edge // J. Geoph. Res. 1994. V. 99. C1. P. 843–864.
10. **Miles, J.W.** On internal solitary waves // Tellus, 1979. V. 31. P. 456–462.
11. **Miles, J.W.** On internal solitary waves // Tellus, 1981. V. 33. P. 397–401.
12. **Vlasenko, V.** Nonlinear internal waves forced by tides near the critical latitude. / V. Vlasenko [at al.] // Deep-Sea Research I. 2003. V. 50. P. 317–338.

Дата поступления
в редакцию 15.10.2010

E.A. Rouvinskaya, O.E. Kurkina, A.A. Kurkin

IMPROVED NONLINEAR EVOLUTIONARY EQUATION FOR INTERFACIAL GRAVITY WAVES IN A SYMMETRIC THREE-LAYER FLUID

In the present study we derive the improved modified Korteweg-de Vries equation of higher-order in small parameters of nonlinearity and dispersion for the specific case when the coefficient of cubic nonlinear term can change its sign. Such a situation is considered for the example of interfacial gravity waves in a symmetric three-layer fluid (when the upper and lower layers have equal widths and small density jumps on the interfaces are equal).

Key words: nonlinear evolutionary equations, interfacial gravity waves.