Известия вузов. Математика
2011, № 3, с. 86–94

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

С.В. СИДОРОВ

О ПОДОБИИ МАТРИЦ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМ СПЕКТРОМ НАД КОЛЬЦОМ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация. Приводится квазиполиномиальный алгоритм распознавания подобия над кольцом целых чисел матриц, имеющих целочисленный спектр и жорданова форма которых не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа. Если алгебраическая кратность всех собственных чисел равна единице, то оценивается число классов подобия.

Ключевые слова: подобие матриц, кольцо целых чисел, жорданова форма, спектр матрицы.

УДК: 512.64

Abstract. We consider matrices with integer spectra whose Jordan forms contain no blocks of equal order for one and the same eigenvalue. We propose a quasipolynomial time algorithm for recognizing the similarity of such matrices over the ring of integers. In the case, when the algebraic multiplicity of all eigenvalues equals 1, we estimate the number of similarity classes.

Keywords: similarity of matrices, ring of integers, Jordan form, matrix spectrum.

1. Введение и постановка задачи

Постановка задачи о подобии квадратных матриц над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$ является классической задачей линейной алгебры (см., например, [1], сс. 55, 170). Говорят, что матрица $B \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ подобна матрице $A \in \mathbf{Q}^{n\times n}$ над $\mathbf{Q}$, если существует такая невырожденная матрица S, что $B = S^{-1}AS$. Матрица S называется трансформирующей над $\mathbf{Q}$ матрицей. Поскольку отношение подобия является отношением эквивалентности, то множество матриц $\mathbf{Q}^{n\times n}$ разбивается на непересекающиеся классы подобных матриц. Естественным обобщением понятия подобия над полем $\mathbf{Q}$ является понятие подобия матриц над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$. А именно, говорят, что матрица $B \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ подобна матрице $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ над $\mathbf{Z}$, если существует такая унимодулярная матрица $S \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ (т. е. матрица, определитель которой равен 1 или -1), что $B = S^{-1}AS$. При этом матрица S называется трансформирующей над $\mathbf{Z}$ матрицей. Задача заключается в том, чтобы выяснить, подобны ли две данные целочисленные матрицы над $\mathbf{Z}$. В случае положительного ответа требуется найти трансформирующую матрицу. Ясно, что подобие целочисленных матриц над $\mathbf{Q}$ является необходимым условием их подобия над кольцом $\mathbf{Z}$, но не является достаточным, что показывают примеры уже для матриц второго порядка (см., например, [2]). Задача о подобии

Поступила 17.09.09, окончательный вариант 02.11.2009

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 09-01-00545-а.

матриц над $\mathbf{Z}$ в общем случае решена Р.А. Саркисяном [3] и независимо Ф. Груневальдом [4]. Описанные этими авторами алгоритмы являются экспоненциальными, что неудивительно, так как в общем случае не существует полиномиального алгоритма для распознавания подобия матриц над $\mathbf{Z}$, поскольку уже для $n = 2$ существуют примеры, показывающие, что размер элементов трансформирующей матрицы экспоненциально зависит от размеров элементов исходных матриц. Несмотря на это, для некоторых классов матриц можно предложить полиномиальные алгоритмы или, по крайней мере, квазиполиномиальные (т. е. полиномиальные при фиксированной размерности).

Данная работа содержит два основных результата. Первый из них — предложен квазиполиномиальный алгоритм распознавания подобия матриц над $\mathbf{Z}$ для класса матриц, имеющих целочисленный спектр и жордановы формы которых не содержат клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа. Второй результат — доказана конечность и получена оценка числа классов подобия матриц, все собственные числа которых различны. В работах Р.А. Саркисяна и А. Груневальда вопросы, связанные с мощностными свойствами классов подобия, не рассматриваются.

Пусть A и B — две целочисленные матрицы порядка n, имеющие характеристический многочлен $d(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_s)^{k_s}$, все корни которого целые. Рассмотрим подпространство $M_{A,B} = \{X \in \mathbf{Q}^{n\times n} \mid AX = XB\}$ и модуль $\Lambda_{A,B} = M_{A,B} \cap \mathbf{Z}^{n\times n}$. Если подпространство $M_{A,B}$ содержит невырожденную матрицу, то A и B подобны над полем рациональных чисел $\mathbf{Q}$. При этом критерием подобия является равенство рациональных жордановых форм для A и B. Нас же интересует вопрос о подобии матриц A и B над кольцом целых чисел $\mathbf{Z}$. Если модуль $\Lambda_{A,B}$ содержит унимодулярную матрицу S, то A и B подобны над $\mathbf{Z}$. Заметим, что $\dim M_{A,B} = \dim \Lambda_{A,B}$.

Если обозначить базис модуля $\Lambda_{A,B}$ через $T_1, \ldots, T_m$, то задача о подобии матриц над $\mathbf{Z}$ сводится к разрешимости в целых числах уравнения

$$f(y_1, \ldots, y_m) = \det\left(\sum_{i=1}^{m} y_i T_i\right) = \pm 1.$$

2. Свойства трансформирующих матриц

Пусть J — жорданова форма матриц A и B, а S_A, S_B – соответствующие трансформирующие над $\mathbf{Q}$ матрицы. Таким образом, $AS_A = S_A J$, $BS_B = S_B J$. Можно считать, что матрицы S_A, S_B целочисленные.

Следующая лемма устанавливает связь между подпространствами $M_{A,B}$ и $M_{J,J}$.

Лемма 1. *Имеем* $M_{A,B} = S_A M_{J,J} S_B^{-1}$.

Доказательство. Если $X \in M_{J,J}$, т. е. $JX = XJ$, то $Y = S_A X S_B^{-1} \in M_{A,B}$. Действительно, $AY = AS_A X S_B^{-1} = S_A J X S_B^{-1} = S_A X J S_B^{-1} = S_A X S_B^{-1} B = YB$. Обратное доказывается аналогично. □

Опишем подпространство $M_{J,J}$. Для этого нам понадобится понятие обобщенной и правильной верхне-треугольной матрицы.

Определение 1. Пусть T — матрица размера $m \times n$. Будем говорить, что T — обобщенная верхне-треугольная матрица, если она имеет один из следующих видов:

1) T — квадратная верхне-треугольная матрица;

2) $T = \begin{pmatrix} 0 & T' \end{pmatrix}$, где 0 — нулевая матрица размеров $m \times (n - m)$, а T' — верхне-треугольная матрица порядка m;

3) $T = \binom{T'}{0}$, где 0 — нулевая матрица размеров $(m-n)\times n$, а T' — верхне-треугольная матрица порядка n.

Если в каждом из трех случаев у верхне-треугольной матрицы любая наддиагональ состоит из одинаковых элементов, то назовем обобщенную верхне-треугольную матрицу правильной верхне-треугольной.

Произвольная матрица X из M_{JJ} устроена следующим образом ([5], с. 196). Матрица X является блочно диагональной: $X = \mathrm{diag}(X^{(1)},\dots,X^{(s)})$, причем каждая из матриц $X^{(k)}$, в свою очередь, имеет блочную структуру в соответствии с блочной структурой жордановой матрицы. Блоки матрицы $X^{(k)}$ обозначим через $X_{ij}^{(k)}$, $i,j=1,\dots,p_k$, где p_k — число жордановых клеток, соответствующих собственному числу α_k. Каждый из этих блоков имеет правильную верхне-треугольную форму.

Рассмотрим пример. Ниже приведены жорданова матрица и произвольная матрица из $M_{J,J}$:

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right), \quad X = \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} x_1 & x_4 & 0 & x_8 & x_9 & 0 & 0\\ 0 & x_1 & 0 & 0 & x_8 & 0 & 0\\ \hline x_{10} & x_{11} & x_2 & x_5 & x_6 & 0 & 0\\ 0 & x_{10} & 0 & x_2 & x_5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 & x_7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 \end{array}\right),$$

где $x_1,\dots,x_{11}$ – произвольные рациональные числа.

Лемма 2. *Пусть X — блочная матрица с блоками X_{ij} размера $t_i\times t_j$, $i,j=1,\dots,m$, причем каждый блок имеет обобщенную верхне-треугольную форму и $t_1<t_2<\dots<t_m$. Тогда $\det X$ равен произведению диагональных элементов.*

Доказательство проведем индукцией по m. При $m=1$ утверждение леммы очевидно, поскольку в этом случае матрица X верхне-треугольная.

Если X_{11} невырожденная матрица, то рассмотрим блочную унимодулярную матрицу S, блочная структура которой такая же, как у матрицы X. Строение матрицы S следующее. Все диагональные блоки — единичные матрицы. Блоки в первом столбце имеют вид $S_{i1} = -X_{i1}X_{11}^{-1}$, $i=2,\dots,m$. Остальные блоки нулевые. Рассмотрим матрицу $Y=SX$. Очевидно, что $\det X=\det Y$. Матрица Y имеет ту же блочную структуру, что и X, причем

$$\begin{gathered} Y_{1j}=X_{1j},\quad j=1,\dots,m,\\ Y_{i1}=0, i=2,\dots,m,\\ Y_{ij}=X_{ij}-X_{i1}X_{11}^{-1}X_{1j},\quad i,j\ge 2. \end{gathered}$$

Следовательно, по теореме Лапласа $\det Y=\det X_{11}\det Z$, где Z — матрица, полученная из Y удалением первой блочной строки и первого блочного столбца, т. е. $Z_{ij}=Y_{i+1,j+1}$, $i,j=1,\dots,m-1$. Докажем, что блоки $Y_{ij}=X_{ij}-X_{i1}X_{11}^{-1}X_{1j}$, $i,j\ge 2$, имеют обобщенную верхне-треугольную форму, причем главные диагонали блоков Y_{ii} и X_{ii}, $i=2,\dots,m$ совпадают. Действительно,

$$X_{i1}X_{11}^{-1}X_{1j} = \begin{pmatrix} X'_{i1}\\ 0\end{pmatrix} X_{11}^{-1}\begin{pmatrix}0 & X'_{1j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X'_{i1}X_{11}^{-1}X'_{1j}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поскольку матрицы X'_{i1}, X_{11}^{-1}, X'_{1j} верхне-треугольные, то их произведение также верхне-треугольная матрица. Следовательно, матрица $Y_{ij} = X_{ij} - X_{i1}X_{11}^{-1}X_{1j}$ обобщенная верхне-треугольная, причем главные диагонали матриц X_{ij} и Y_{ij} совпадают, в частности, и при $i = j$. По предположению индукции $\det Z$ равен произведению диагональных элементов матрицы Z, которые совпадают с диагональными элементами матрицы X.

Если же матрица X_{11} вырожденная, то хотя бы один из ее диагональных элементов равен нулю. Пусть k — номер какого-нибудь из нулевых элементов диагонали. Тогда в матрице X имеем $(t_1 - k + 1) + (t_2 - k) + \dots + (t_m - k) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i - mk + 1$ строк (с номерами от k до t_1, от $\sum\limits_{i=1}^{j} t_i + k + 1$ до $\sum\limits_{i=1}^{j+1} t_i$, $j = 1, \dots, m-1$) длины $t_1 + \dots + t_m$, у которых mk общих элементов равны нулю, а именно, элементы с номерами от 1 до k, от $\sum\limits_{i=1}^{j} t_i + 1$ до $\sum\limits_{i=1}^{j+1} t_i + k + 1$, $j = 1, \dots, m-1$. Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{m} t_i - mk + 1 > \sum\limits_{i=1}^{m} t_i - mk$, то эти строки линейно зависимы. Следовательно, $\det X = 0$. Но в этом случае и произведение диагональных элементов равно нулю. □

Лемма 3. *Если жорданова матрица J не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа, то определитель любой матрицы из $M_{J,J}$ равен произведению диагональных элементов.*

Доказательство. Так как $\det X = \prod\limits_{i=1}^{s} \det X^{(i)}$, то достаточно доказать лемму для жордановой матрицы, имеющей одно собственное число. В этом случае любая матрица из $M_{J,J}$ является правильной верхне-треугольной, а значит, и обобщенной верхне-треугольной. По предыдущей лемме следует, что $\det X$ равен произведению диагональных элементов. □

3. Алгоритм

Теорема 1. *Пусть A и B — две $n \times n$-матрицы с целочисленным спектром, подобные над полем $\mathbf{Q}$. Если жорданова форма обеих матриц не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа, то определитель $f(y_1, \dots, y_m) = \det\Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i T_i\Big)$ произвольной матрицы из $\Lambda_{A,B}$ является произведением линейных функций с целыми коэффициентами относительно переменных $y_1, \dots, y_m$.*

Доказательство. Пусть J — жорданова форма матриц A и B, а $G_1, \dots, G_m$ — базис $M_{J,J}$. Если обозначить через p_i число жордановых клеток, соответствующих i-му собственному числу, то можно считать, что базисные матрицы с номерами от 1 до $p = \sum\limits_{i=1}^{s} p_i$ являются диагональными. А именно, G_j — диагональная матрица, диагональ которой заполнена нулями и единицами, причем единицы расположены на местах с номерами от $1 + \sum\limits_{i=1}^{j-1} t_i$ до $\sum\limits_{i=1}^{j} t_i$, $j = 1, \dots, p$.

Из леммы 1 следует, что матрицы $H_j = S_A G_j S_B^{-1}$, $j = 1, \dots, m$ образуют базис в $M_{A,B}$. Так как среди жордановых клеток в J, соответствующих одному и тому же собственному числу, нет клеток одинакового порядка, то согласно лемме 3 определитель матрицы

$X = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i G_i \in M_{J,J}$ равен $\det X = x_1^{t_1} \cdots x_p^{t_p}$, где t_i – порядок i-й жордановой клетки. Следовательно, определитель матрицы $Y = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i H_i = S_A \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i G_i \Big) S_B^{-1} = S_A X S_B^{-1} \in M_{A,B}$ равен $\det Y = \frac{\det S_A}{\det S_B} x_1^{t_1} \cdots x_p^{t_p}$.

Пусть $T_1, \ldots, T_m$ — базис $\Lambda_{A,B}$ и $f(y_1, \ldots, y_m) = \det \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i T_i \Big)$ — определитель произвольной матрицы из $\Lambda_{A,B}$. Разложив матрицу T_i по базису H_j, $j = 1, \ldots, m$, получим $T_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{ji} H_j$, $\beta_{ji} \in \mathbf{Q}$. Далее, $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i T_i = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{ji} H_j = \sum\limits_{j=1}^{m} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{ji} \Big) H_j$. Тогда $f(y_1, \ldots, y_m) = \det \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i T_i \Big) = \det \Big(\sum\limits_{j=1}^{m} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{ji} \Big) H_j \Big) = \frac{\det S_A}{\det S_B} \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{1i} \Big)^{t_1} \cdots \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{pi} \Big)^{t_p}$ — произведение линейных функций с рациональными коэффициентами. Сделаем эквивалентное преобразование, чтобы коэффициенты стали целыми. Рассмотрим произвольную скобку $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{ji}$ в этом произведении. Обозначим через Δ_j наименьшее общее кратное знаменателей рациональных чисел $\beta_{ji}, i = 1, \ldots, m$, через δ_j — наибольший общий делитель целых чисел $\beta_{ji}\Delta_j, i = 1, \ldots, m$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \beta_{ji} = \frac{\delta_j}{\Delta_j} \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \frac{\beta_{ji}\Delta_j}{\delta_j}$ и $f(y_1, \ldots, y_m) = a \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \gamma_{1i} \Big)^{t_1} \cdots \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \gamma_{pi} \Big)^{t_p}$, где $\gamma_{ji} = \frac{\beta_{ji}\Delta_j}{\delta_j}$ и $a = \frac{\det S_A}{\det S_B} (\frac{\delta_1}{\Delta_1})^{t_1} \cdots (\frac{\delta_p}{\Delta_p})^{t_p}$ — целые числа. □

Доказательство теоремы дает алгоритм для распознавания подобия матриц с указанными свойствами, поскольку решение задачи сводится к решению в целых числах некоторой системы линейных уравнений. Приведем пошаговое описание алгоритма.

Алгоритм

Дано: две матрицы $A, B \in \mathbf{Z}^{n \times n}$, имеющие целочисленный спектр и жорданова форма которых не содержит клеток одинакового порядка для одного и того же собственного числа.

Шаг 1. Найти жорданову форму J матриц A и B и трансформирующие матрицы S_A, S_B. Пусть t_i — порядок i-й клетки, $i = 1, \ldots, p$, где p — число клеток.

Шаг 2. Вычислить матрицы $H_j = S_A G_j S_B^{-1}$, $j = 1, \ldots, m$, образующие базис $M_{A,B}$, где G_j — диагональная матрица, диагональ которой заполнена нулями и единицами, причем единицы расположены на местах с номерами от $1 + \sum\limits_{i=1}^{j-1} t_i$ до $\sum\limits_{i=1}^{j} t_i$, $j = 1, \ldots, p$.

Шаг 3. Найти $T_1, \ldots, T_m$ — базис модуля $\Lambda_{A,B}$.

Шаг 4. Разложить матрицы T_i по базису H_j, $j = 1, \ldots, m$. Получим $T_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \beta_{ji} H_j$, $\beta_{ji} \in \mathbf{Q}$.

Шаг 5. Найти НОК (наименьшее общее кратное) знаменателей рациональных чисел β_{ji}, $i = 1, \ldots, m$, которое обозначим через Δ_j. Затем найдем величины $\delta_j = \text{НОД}\{\beta_{ji}\Delta_j$, $i = 1, \ldots, m\}$, $\gamma_{ji} = \frac{\beta_{ji}\Delta_j}{\delta_j}$, $j = 1, \ldots, m$, $a = \frac{\det S_A}{\det S_B} (\frac{\delta_1}{\Delta_1})^{t_1} \cdots (\frac{\delta_p}{\Delta_p})^{t_p}$, где НОД означает, как обычно, наибольший общий делитель. Для подобия матриц A, B необходима и достаточна разрешимость в целых числах уравнения $f(y_1, \ldots, y_m) = a \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \gamma_{1i} \Big)^{t_1} \cdots \Big(\sum\limits_{i=1}^{m} y_i \gamma_{pi} \Big)^{t_p} = \pm 1$. Если $|a| \neq 1$, то A и B не подобны. В противном случае нужно выяснить, совместна ли в целых числах хотя бы одна из следующих 2^p систем линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\gamma_{1i} = \pm 1, \\ \dots\dots\dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_i\gamma_{pi} = \pm 1. \end{cases}$$

Если все они несовместны в целых числах, то A и B не подобны над $\mathbf{Z}$, в противном случае пусть $y_1^0, \dots, y_m^0$ – одно из решений. При этом A и B подобны над $\mathbf{Z}$, а матрица $T = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i^0 T_i$ является трансформирующей над $\mathbf{Z}$.

Все шаги данного алгоритма, кроме шага 5, можно выполнить за полиномиальное время от n и размера максимального по модулю коэффициента матриц A и B. На шаге 5 приходится в худшем случае решать 2^p систем линейных уравнений (можно ограничиться рассмотрением 2^{p-1} систем). Поэтому приведенный алгоритм является квазиполиномиальным.

4. Приведение матрицы с целочисленным спектром к верхне-треугольному виду преобразованием подобия

В этом разделе показано, как можно упростить матрицу с целочисленным спектром преобразованием подобия. Доказано, что каждый такой класс подобия содержит верхнетреугольную матрицу, многие элементы которой можно ограничить величинами, зависящими от собственных чисел. Доказана также конечность числа классов подобия и приведена верхняя оценка этого числа при условии, что все собственные числа имеют алгебраическую кратность 1.

Теорема 2. *Если матрица $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ имеет целочисленный спектр, то A подобна над $\mathbf{Z}$ некоторой верхне-треугольной матрице A', на диагонали которой стоят собственные числа матрицы A.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ очевидно. Пусть верно для $n - 1$. Если α_1 — собственное число матрицы A, то найдется целочисленный собственный вектор x_1, компоненты которого взаимно простые числа. Таким образом, $Ax_1 = \alpha_1 x_1$. Дополним вектор x_1 до базиса решетки $\mathbf{Z}^n$ некоторыми векторами $x_2, \dots, x_n$. Тем самым получили унимодулярную матрицу $X = (x_1, \dots, x_n)$. Ясно, что матрица $B = X^{-1}AX$ имеет вид $B = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & u \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$. Все собственные числа матрицы C целые, поэтому по предположению индукции существует унимодулярная матрица Y такая, что матрица $Y^{-1}CY$ верхне-треугольная. Рассмотрим матрицу $Z = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right)$. Тогда $A' = Z^{-1}BZ = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Y^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & u \\ \hline 0 & C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & u \\ \hline 0 & Y^{-1}C \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & uY \\ \hline 0 & Y^{-1}CY \end{array}\right)$ — верхне-треугольная матрица, по диагонали которой расположены собственные числа матрицы A. □

Лемма 4. *Пусть T_1 и T_2 — две целочисленные верхне-треугольные матрицы с диагональными элементами α и β соответственно размеров $p \times p$ и $q \times q$. Тогда для любой $p \times q$ матрицы A найдется такая целочисленная $p \times q$ матрица X, что элементы матрицы $R = A + XT_2 - T_1X$ удовлетворяют условию $0 \le r_{ij} < \beta - \alpha$.*

Доказательство. Элементы матриц T_1 и T_2 будем обозначать $t_{ij}^{(1)}$ и $t_{ij}^{(2)}$ соответственно. Тогда

$$r_{ij} + (\beta - \alpha)x_{ij} = a_{ij} + \sum_{k=1}^{j-1} x_{ik}t_{kj}^{(2)} - \sum_{s=i+1}^{p} t_{is}^{(1)} x_{sj}, \tag{1}$$

где $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$. Из равенства (1) при $i = p$ получаем $r_{pj} + (\beta - \alpha)x_{pj} = a_{pj} + \sum\limits_{k=1}^{j-1} x_{pk}t_{kj}^{(2)}$. При $j = 1$ последнее равенство принимает вид $r_{p1} + (\beta - \alpha)x_{p1} = a_{p1}$, поэтому x_{p1} можно выбрать так, чтобы r_{p1} был остатком от деления a_{p1} на $\beta - \alpha$. Аналогично для каждого $j = 2, \dots, q$ элемент x_{pj} можно выбрать так, чтобы r_{pj} был остатком от деления $a_{pj} + \sum\limits_{k=1}^{j-1} x_{pk}t_{kj}^{(2)}$ на $\beta - \alpha$. Таким образом, элементы p-й строки матрицы R удовлетворяют требуемому условию. Теперь предположим, что найдены элементы x_{ij}, $i > u$, $j = 1, \dots, q$. Найдем элементы строки с номером u матрицы X, удовлетворяющие условию

$$r_{uj} + (\beta - \alpha)x_{uj} = a_{uj} + \sum_{k=1}^{j-1} x_{uk}t_{kj}^{(2)} - \sum_{s=u+1}^{p} t_{us}^{(1)} x_{sj}.$$

При $j = 1$ имеем $r_{u1} + (\beta - \alpha)x_{u1} = a_{u1} - \sum\limits_{s=u+1}^{p} t_{us}^{(1)} x_{s1}$, поэтому x_{u1} можно выбрать так, чтобы r_{u1} был остатком от деления величины $a_{u1} - \sum\limits_{s=u+1}^{p} t_{us}^{(1)} x_{s1}$ на $\beta - \alpha$. Заметим, что элементы x_{s1} при $s > u$ уже найдены ранее. Аналогично для каждого $j = 2, \dots, q$ элемент x_{uj} можно выбрать так, чтобы r_{uj} был остатком от деления $a_{uj} + \sum\limits_{k=1}^{j-1} x_{uk}t_{kj}^{(2)} - \sum\limits_{s=u+1}^{p} t_{us}^{(1)} x_{sj}$ на $\beta - \alpha$. Таким образом, элементы u-й строки матрицы R удовлетворяют требуемому условию. □

Теорема 3. *Пусть $A = (A_{ij})$, $i, j = 1, \dots, m$, — блочная верхне-треугольная матрица порядка n, в которой блоки A_{ij} имеют размеры $k_i \times k_j$, причем диагональные блоки A_{ii} являются верхне-треугольными матрицами с элементами α_i по диагонали. Предполагаем, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$. Тогда матрица A подобна над $\mathbf{Z}$ матрице R такой же структуры, в которой элементы r_{uv}^{ij} каждого блока R_{ij}, $1 \le i < j \le m$, удовлетворяют условию $0 \le r_{uv}^{ij} < \alpha_j - \alpha_i$, $u = \sum\limits_{s=1}^{i-1} k_s + 1, \dots, \sum\limits_{s=1}^{i} k_s$, $v = \sum\limits_{s=1}^{j-1} k_s + 1, \dots, \sum\limits_{s=1}^{j} k_s$.*

Доказательство. Рассмотрим блочную матрицу Y_{ij}, блочная структура которой такая же, как у матрицы A. Ее диагональные блоки – единичные матрицы соответствующих порядков. Блок, находящийся в i-й строке и j-м столбце, равен X_{ij}. Остальные блоки нулевые. Тогда матрица $B = Y_{ij}^{-1} A Y_{ij}$ будет иметь такую же блочную структуру. При этом изменятся блок A_{ij} и блоки, находящиеся выше и правее его (т. е. блоки A_{ik}, A_{sj}, $k = j+1, \dots, m$, $s = 1, \dots, i-1$). Сам блок A_{ij} заменится на $R_{ij} = A_{ij} + A_{ii}X_{ij} - X_{ij}A_{jj}$. По предыдущей лемме X_{ij} можно выбрать так, чтобы элементы матрицы R_{ij} находились в пределах от 0 до $\alpha_j - \alpha_i - 1$. Тогда ясно, что блоки первой наддиагонали матрицы $B_1 = (Y_{12} \dots Y_{m-1,m})^{-1} A (Y_{12} \dots Y_{m-1,m})$ будут удовлетворять условиям теоремы. Далее у матрицы $B_2 = (Y_{13}Y_{24} \dots Y_{m-2,m})^{-1} B_1 (Y_{13}Y_{24} \dots Y_{m-1,m})$ блоки второй наддиагонали будут удовлетворять нужному условию (при этом первая наддиагональ не меняется). По индукции определим матрицу $B_k = (Y_{1,k+1}Y_{2,k+2} \dots Y_{m-k,m})^{-1} B_{k-1} (Y_{1,k+1}Y_{2,k+2} \dots Y_{m-k,m})$. Тогда искомой матрицей будет $B_{m-1} = Y_{1,m}^{-1} B_{m-2} Y_{1,m}$. □

Если характеристический многочлен имеет вид $d(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_n)$, причем $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$, то из теоремы 3 следует, что каждый класс подобия содержит матрицу, элементы которой ограничены величиной, зависящей только от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Это означает, что число классов подобия конечно, и мы можем его оценить.

Следствие 1. Число классов подобия матриц, имеющих характеристический многочлен $d(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_n)$, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, конечно и не превосходит величины $\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_j - \alpha_i)$.

Следующая теорема показывает, что полученную верхнюю оценку числа классов подобия можно уменьшить.

Теорема 4. *Пусть матрица $A \in \mathbf{Z}^{n\times n}$ имеет характеристический многочлен $d(\lambda) = (\lambda-\alpha_1)\cdots(\lambda-\alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{Z}$ и $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Тогда A подобна некоторой верхне-треугольной матрице $T = (t_{ij})$, у которой*

$$t_{ii} = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$0 \le t_{i,i+1} \le \left\lfloor \frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2} \right\rfloor, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$0 \le t_{i,i+k} < \alpha_{i+k} - \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad k = 2, \ldots, n-i.$$

Доказательство. Во-первых, матрица A подобна верхне-треугольной матрице $B = (b_{ij})$, у которой по диагонали расположены числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а элементы первой наддиагонали удовлетворяют условию $0 \le b_{k,k+1} < \alpha_{k+1} - \alpha_k$. Действительно, рассмотрим матрицу Y_k, которая получена из единичной матрицы заменой элемента k-й строки, $(k+1)$-го столбца на q_k, где q_k — остаток от деления $a_{k,k+1}$ на $\alpha_{k+1} - \alpha_k$. Таким образом, $a_{k,k+1} = q_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + r_k$, $0 \le r_k < \alpha_{k+1} - \alpha_k$. Тогда матрица $B = (Y_1 \ldots Y_{n-1})^{-1} A (Y_1 \ldots Y_{n-1})$ удовлетворяет требуемым условиям.

Далее рассмотрим блочную унимодулярную матрицу $S_k = \left(\begin{smallmatrix} -E_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & E' & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{smallmatrix}\right)$, где $E' = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда $S^{-1} = S$. Выясним, что произойдет с матрицей B, если взять S в качестве трансформирующей матрицы. Разбив матрицу B на блоки аналогично S, имеем

$$S^{-1}BS = \begin{pmatrix} -E_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & E' & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ 0 & B_{22} & B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & E' & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -B_{11} & -B_{12} & -B_{13} \\ 0 & E'B_{22} & E'B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E_{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & E' & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & -B_{12}E' & -B_{13} \\ 0 & E'B_{22}E' & E'B_{23} \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$E'B_{22}E' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_k & b_{k,k+1} \\ 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_k & (\alpha_{k+1} - \alpha_k) - b_{k,k+1} \\ 0 & \alpha_{k+1} \end{pmatrix},$$
$$-B_{12}E' = \begin{pmatrix} b_{1,k} & b_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ b_{k-1,k} & b_{k-1,k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1,k} & -b_{1,k} - b_{1,k+1} \\ \vdots & \vdots \\ b_{k-1,k} & -b_{k-1,k} - b_{k-1,k+1} \end{pmatrix},$$
$$E'B_{23} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{k,k+2} & \ldots & b_{k,n} \\ b_{k+1,k+2} & \ldots & b_{k+1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{k+1,k+2} - b_{k,k+2} & \ldots & b_{k+1,n} - b_{k,n} \\ b_{k+1,k+2} & \ldots & b_{k+1,n} \end{pmatrix},$$

то изменяются элементы матрицы B, расположенные выше и правее элемента $b_{k,k+1}$, а также меняют знак элементы блока B_{13}. В частности, такое преобразование изменяет лишь один элемент первой наддиагонали, а именно элемент $b_{k,k+1}$ меняется на $(\alpha_{k+1}-\alpha_k)-b_{k,k+1}$. Таким образом, можно добиться выполнения условий

$$0 \le b_{k,k+1} \le \left\lfloor \frac{\alpha_{k+1}-\alpha_k}{2} \right\rfloor, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Чтобы для элементов $b_{k,k+j}$, $j = 2, \ldots, n-k$, выполнилось условие $0 \le b_{k,k+j} < \alpha_{k+j} - \alpha_k$, рассмотрим трансформирующую матрицу Q_{kj}, которая получена из единичной матрицы заменой элемента, расположенного в k-й строке и $(k+j)$-м столбце, на число q_{kj}, где q_{kj} — остаток от деления $b_{k,k+j}$ на $\alpha_{k+j} - \alpha_k$. Имеем $b_{k,k+j} = q_{kj}(\alpha_{k+j} - \alpha_k) + r_{kj}$. Тогда матрица $Q_{kj}^{-1} B Q_{kj}$ отличается от B элементом $b_{k,k+j}$, который заменяется на $r_{kj} = b_{k,k+j} - q_{kj}(\alpha_{k+j} - \alpha_k)$, и элементами, расположенными выше и правее $b_{k,k+j}$. Таким образом, не изменяя элементов первой наддиагонали, можем добиться выполнения требуемых условий. $\square$

Следствие 2. Число классов подобия матриц, имеющих характеристический многочлен $d(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n)$, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$, конечно и не превосходит величины $\prod\limits_{i=1}^{n-1} \left(\left\lfloor \frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2} \right\rfloor + 1 \right) \prod\limits_{j-i \ge 2} (\alpha_j - \alpha_i)$.

Литература

[1] Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры* (Наука, М., 1970).
[2] Шевченко В.Н., Сидоров С. В. *О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел*, Изв. вузов. Математика, №4, 57–64 (2006).
[3] Саркисян Р.А. *Проблема сопряженности для наборов целочисленных матриц*, Матем. заметки **25** (6), 811–824 (1979).
[4] Grunewald F. *Solution of the conjugacy problem in certain arithmetic groups*, Word problems II, Stud. Logic Found. Math. **95**, 101-139 (1980).
[5] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц* (Физматлит, М., 2004).

С.В. Сидоров

ассистент, кафедра математической логики и высшей алгебры,
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950,

`e-mail:` sesidorov@yandex.ru

S.V. Sidorov

Assistant, Chair of Mathematical Logic and Higher Algebra,
Nizhni Novgorod State University,
23 Gagarin Ave., Nizhni Novgorod, 603950 Russia,

`e-mail:` sesidorov@yandex.ru