

Метод оценки риск-нейтральной плотности вероятности по котировкам опционов

Громницкий Т. В., Лапшин, В. А.

Аннотация — В данной работе разработан метод построения риск-нейтральной плотности вероятности по котировкам опционов, позволяющий дать оценку точности искомой плотности. Риск-нейтральная плотность представляется сплайном, который

1) минимизирует расстояние Кульбака-Лейблера до логнормальной плотности (что обеспечивает связь с моделью Блека-Шоулза),

2) минимизирует отклонение цен, восстановленных по полученной плотности, от действительных цен опционов.

Неопределенность, возникающая из-за Bid-Ask спреда не позволяет однозначно построить кривую плотности, поэтому методом Монте Карло строится оценка точности. При построении оценки используется факторный анализ приращений «улыбок» волатильности, меняющихся с течением времени. Результаты факторного анализа позволяют генерировать свойственные рынку кривые, которые и составляют оценку точности.

Ключевые слова — риск-нейтральная плотность, подразумеваемая волатильность, котировки опционов.

I. ВВЕДЕНИЕ

Опцион – это договор, по которому потенциальный покупатель или потенциальный продавец актива получает право совершить покупку или продажу базового актива по заранее оговоренной цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени. Опцион покупателя или *опцион call* дает право купить базовый актив в определённый день по определённой цене. Опцион продавца или *опцион put* дает право продать базовый актив в определённый день по определённой цене. Цена актива, зафиксированная в контракте, называется ценой исполнения (ценой страйк). Дата, оговоренная в контракте, называется датой истечения контракта или сроком платежа. Опционы бывают двух видов. *Американский* опцион можно исполнить в любой момент до истечения срока его действия. *Европейский* опцион может быть исполнен только в момент его истечения. Одним из центральных вопросов при работе с опционами является вопрос о справедливой цене опциона. Для ответа на него существует несколько

моделей. Наиболее широкое распространение получила модель ценообразования опционов Блека–Шоулза, согласно которой, цена базового актива подчиняется логнормальному распределению. Важным параметром модели является *волатильность* базового актива, которую обычно обозначают σ . При известных ценах опционов можно определить уровень ожидаемой (*подразумеваемой*) рынком волатильности. График подразумеваемой волатильности стоимости опциона, называется «*улыбкой*» волатильности.

Из определения опциона следует, что справедливая цена европейского опциона на покупку актива с ценой исполнения K и сроком действия T равна

$$c = e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} (S_T - K) g(S_T) dS_T$$

где r — безрисковая процентная ставка (считаемая постоянной), S_T — цена актива в момент T , а g — риск-нейтральная плотность вероятности цены актива S_T . Дифференцируя это выражение по переменной K , получаем

$$\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-rT} \int_{S_T=K}^{\infty} g(S_T) dS_T$$

Повторно дифференцируя его по переменной K , приходим к выводу, что

$$\frac{\partial^2 c}{\partial K^2} = e^{-rT} g(K)$$

Отсюда следует, что плотность вероятности $g(K)$ вычисляется так:

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

Этот результат, полученный Бреденом и Литценбергом [10], позволяет оценить риск-нейтральные распределения вероятностей. Допустим, что c_1 , c_2 и c_3 — цены европейских опционов call со сроком действия T и ценами исполнения $K - \delta$, K и $K + \delta$ соответственно. Предполагая, что величина δ мала, получаем следующую оценку плотности вероятности g .

$$e^{rT} \frac{c_1 + c_3 - 2c_2}{\delta^2}$$

При попытке построить риск-нейтральную плотность непосредственно по данной формуле получается кривая, изображенная на рис. 1, которая не удовлетворяет формальному определению плотности и является непригодной для использования.

Статья получена 5 июня 2013 и представляет собой результат одноименной магистерской диссертации.

Громницкий Тарас Валерьевич – магистрант 2 года обучения кафедры системного анализа, факультет ВМК, МГУ им. М.В. Ломоносова. (e-mail: t4r7s_gr@gmail.com)

Лапшин Виктор Александрович – доцент департамента финансов, факультет экономики, НИУ ВШЭ, доцент кафедры системного анализа, факультет ВМК, МГУ им. М.В. Ломоносова. (e-mail: victor.lapshin@gmail.com)

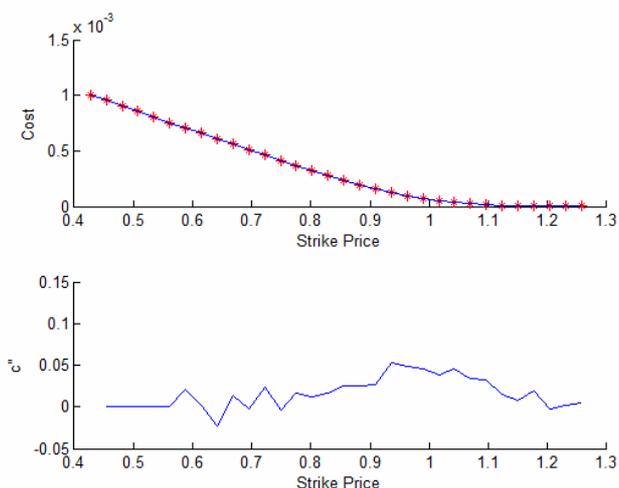


Рис. 1. На верхнем рисунке – котировки опционов. На нижнем - результат численного дифференцирования цен опционов.

С другой стороны, восстановленная по котировкам опционов, риск-нейтральная плотность $g(K)$ по сути является совокупным мнением всех участников рынка о распределении базового актива, что представляет несомненный интерес для практических приложений. Вследствие чего, возникла задача построения риск-нейтральной плотности по котировкам опционов.

II. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть известны Ask_i и Bid_i , $i = 1, \dots, N$ – цены опционов со сроком действия T и ценой исполнения K , r – безрисковая процентная ставка, N – количество торгуемых опционов с разными страйками. Пусть $c(K_i)$ – средние цены:

$$y_i = c(K_i) = \frac{Ask_i + Bid_i}{2}$$

Риск-нейтральная плотность выражается формулой:

$$g(K) = e^{rT} \frac{\partial^2 c}{\partial K^2}$$

Необходимо построить риск-нейтральную плотность $g(K)$ по ценам y_i .

III. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДОВ

Параметрические методы.

Параметрические методы могут быть разделены на три группы. Первая группа - это *методы расширения*, которые вносят в базовое распределение добавочные члены, делая его более гибким. Вторую группу составляют *методы обобщенных распределений*, которые используют более гибкие распределения с дополнительными параметрами, помимо двух параметров нормального или логнормального распределений. В третью группу образуют *методы смеси*, которые создают новые распределения из смеси простых распределений.

Методы расширения концептуально связаны с разложением функции в ряд Тейлора в окрестности точки. Они обычно к простому (зачастую нормальному или логнормальному) распределению, вносят добавочные члены, а затем происходит калибровка по

наблюдаемым котировкам опционов. Основная проблема в методах этого класса состоит в том, что полученная плотность может принимать и отрицательные значения. Таким образом, результаты должны проверяться на неотрицательность.

Абкен, Мадан и Рамамурти [3] использовали эрмитовы полиномы 4 порядка. Эти полиномы связаны с последовательным производным функции нормальной плотности, и добавляют пять дополнительных параметров к нормальному распределению.

Используя те же самые полиномы с ограничениями на некоторых коэффициентах, Джондеу и Рокингер [22], Коррадо и Су [15] расширили функцию плотности нормального распределения, добавив в нее ряды Грэм-Чарли. Из расширенной функции плотности они получили формулу оценки опционов, которая сочетает в себе цену модели Блека-Шоулза и корректировочные члены для коэффициентов асимметрии и эксцесса. Джондеу и Рокингер [2] предоставили алгоритм, который базируется на моментах риск-нейтрального распределения и заставляет коэффициенты лежать в пределах области, гарантирующей положительные вероятности.

Бреннер и Иом [10] использовали полиномы Лагуерре, которые являются производными от гамма распределения. Основное преимущество, которое отметили авторы, состоит в том, что приближенное риск-нейтральное распределение имеет несмещенные моменты.

Джерроу и Руд [20], Коррадо и Су [15], Лонгстафф [23], Рубинштейн [35] использовали разложение Эджворта. Базовое распределение (логнормальное, логнормальное, нормальное, биномиальное, соответственно) усиленно добавочными членами, которые соответствуют первым четырем полуинвариантам подразумеваемого распределения. Авторы искали множество полуинвариантов, которое дает лучшее соответствие между наблюдаемыми ценами и ценами, полученных из найденного распределения. Например, у Джерроу и Руд [20], первый полуинвариант это среднее, второй – дисперсия, третий – коэффициент асимметрии, четвертый – коэффициент эксцесса.

Поттерс, Конт и Баучауд [1998] добавили единственный поправочный член к нормальному распределению, который настраивает эксцесс риск-нейтрального распределения.

Обобщенные методы используют более гибкие распределения, которые, как правило, имеют один или два дополнительных параметра, помимо двух параметров нормального и логнормального распределений. Обобщенные распределения часто включают различные распространенные распределения, как частные случаи для конкретного параметра.

Апарисио и Ходжес [6] использовали обобщенные бета функции второго рода. Это семейство распределений с четырьмя параметрами было впервые исследовано Букстейбером и Макдональдом [8] и включает в себя логнормальное, гамма и экспоненциальное распределения, некоторые Бур-распределения и другие. Познер и Милевский [28] использовали плотности семейства Джонсон. Джонсон [21] предложил получать нормальные распределения через

логарифмические и гиперболические синус преобразования, добавляя два дополнительных параметра.

Шерик, Гарсия и Тирупатур [36] использовали Бур 3 распределение по данным опционов на сою. Шерик, Ирвин и Фостер [37, 38] использовали Бур 12 распределение на опционах S&P.

Методы смеси достигают большей гибкости за счет объединения нескольких простых плотностей, каждое с различной параметризацией. Проблема при смешивании - это то, что число параметров быстро увеличивается. Например, смешивание трех логнормальных распределений (Мелик и Томас [27]) дает девять параметров. Два параметра используются для каждого логнормального и три параметра добавляются. Учитывая то, что часто есть только десять или двадцать наблюдаемых цен опционов через разные страйк опционы, смешанные методы могут легко переобучиться на данных. Тем не менее, смешивания более гибкие и способны генерировать более разнообразные формы риск-нейтральной плотности, чем обобщенные распределения. Ритчи [31] приводит пример, где риск-нейтральное распределение есть смесь нормальных распределений.

Непараметрические методы

Непараметрические методы также пытаются сделать риск-нейтральное распределение более гибким. Но вместо параметрической формы распределения, используются более общие функции. Методы можно разделить на три группы.

Во-первых, *ядерные методы* концептуально относятся к регрессии тем, что пытаются вписать функцию к наблюдаемым данным. Основным отличием является то, что ядерная регрессия не определяет параметрическую форму функции.

Во-вторых, *методы максимальной энтропии* находят непараметрическое распределение, которое так близко, насколько возможно с точки зрения информационного содержания априорного распределения, удовлетворяя определенным ограничениям, таким как, соответствие с ценами наблюдаемых опционов.

В-третьих, *методы подгонки* являются слабо связанной группой методов, которые берут за подразумеваемую волатильность или риск-нейтральное распределение, некоторую гибкую функцию, которую подгоняют к данным. Обычно используется мера соответствия - сумма квадратов разности между наблюдаемыми и восстановленными ценами.

Ядерные методы требуют больших объемов данных, что ограничивает их использование. Кроме того, они имеют тенденцию восполнять недостающие данные не интуитивным способом.

Айт-Сахалия и Ло [4] сторили ядерные оценки используя 5 величин: котировки акций, цены исполнений, время до срока истечения, процентную ставку и дивидендную доходность.

Рукли [32] предлагает двумерные оценки ядра с величинами: временем до истечения и денежностью. Также, он предлагает модель стохастического процесса внутрисдневной подразумеваемой волатильности.

Методы максимальной энтропии эффективно пытаются максимизировать количество недостающей информации, учитывая ограничения, то есть они пытаются быть наименее предвзятыми по отношению к неизвестной или недостающей информации. Для того, чтобы реализовать эти идеи, априорное распределение выбирается и апостериорное риск-нейтральное распределение находится через максимизацию энтропии. При этом выполняются условия соблюдения ограничений, такие как, положительность, сумма вероятностей равна единице, правильное ценообразование опционов. Бухен и Келли [12] используют равномерное и логнормальное, как априорные распределения и показывают некоторые результаты моделирования. Стутцер [40] выводит риск-нейтральное распределение, используя историческое распределение цен на активы в качестве априорного. Он ограничивает риск-нейтральное распределение только ценами базового актива. Затем он оценивает опционы и находит доказательства неустойчивости отклонения (которое зависит от длины исторической выборки для определения исторического распределения).

Методы подгонки - это широкий класс методов, в которых риск-нейтральное распределение аппроксимировано некоторой общей функцией. Функции обычно выбираются гибкими и гладкими, например, полиномы. Для дополнительной гибкости полиномы могут быть соединены в сплайны. Главное преимущество сплайнов в том, что узлы служат для локализации полиномов и тем самым позволяют избежать колебательных эффектов и экстремальных значений в областях с недостаточным количеством данных. Наконец, гладкость может быть поставлена как четкая задача, путем нахождения функции, которая наилучшим образом соответствует данным, например, в квадратичном смысле, и также минимизирует интеграл от квадрата вторых производных, на долю которого приходится совокупность кривизны функции. Сначала рассмотрим методы аппроксимации улыбки, а затем методы аппроксимации риск-нейтральной плотности. Шимко [39] представил первый метод аппроксимации «улыбки», взяв в качестве кривой квадратный трехчлен. «Улыбку» он переводит в цены опционов, и дважды дифференцируя, получает риск-нейтральную плотность. К получившейся части плотности он добавляет хвосты от логнормального распределения. Браун и Тофт [11] расширили данный подход до сплайнов седьмого порядка. Кампа, Чанг, и Рейдер [13] использовали кубические сплайны. Апарисио и Ходжес [6] использовали кубические B-сплайны. Розенберг и Энгл [34] используют полиномы для аппроксимации логарифма «улыбки», что автоматически дает положительность. Розенберг [34] расширяет этот метод, чтобы для двумерного случая. Джекверф [18, 19] максимизирует гладкость улыбки и управляет соотношением гладкости гривой и качеством приближения цен опционов. Вторая группа методов подгонки пытается приблизить риск-нейтральные плотности напрямую. Рубинштейн [35] минимизирует расстояние дискретизованных вероятностей и

априорного логнормального распределения, с учетом правильно аппроксимированных цен. Джекверф и Рубинштейн [19] показывают, что различные способы измерения отклонения, например, взятие квадратов отклонений или абсолютных отклонений или кросс-энтропии, не влияет на итоговую риск-нейтральную плотность. Джекверф и Рубинштейн [19] также предложили новый метод, который не требует априорного распределения. Они максимизируют гладкость риск-нейтральной плотности, при условии правильного ценообразования опционов. Мэйхью [26] использует ту же идею максимизации гладкости распределения и аппроксимирует плотности кубическими сплайнами. Хотя существует множество методов восстановления риск-нейтральных распределений, результаты, как правило, весьма схожи, пока мы имеем лишь с небольшим количеством опционов. Причина в том, что если мы наблюдаем всего лишь десять-пятнадцать опционов, то из-за отсутствия арбитража границы настолько плотны, что цена на другие опционы, которые не были еще оценены, часто определяется с точностью Bid-Ask спреда. С практической точки зрения, приближать улыбку, как правило, легче, чем непосредственно аппроксимировать риск-нейтральную плотность. Вычисления кривой «улыбки» не требуют итераций и могут быть выполнены за один проход. Однако они не гарантируют положительность, которую нужно проверять отдельно.

IV. ПРЕДЛАГАЕМЫЙ МЕТОД

Мы предлагаем искать риск-нейтральную плотность, как результат решения задачи вариационного исчисления:

$$J = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} c''(K) \ln \frac{c'(K)}{f(K)} dK + \sum_{i=1}^N w_i (y_i - c(K_i))^2 \rightarrow \min_{c(K)}$$

Первое слагаемое есть расстояние Кульбака-Лейблера (несимметричная мера удаленности друг от друга двух вероятностных распределений $f(x)$ и $g(x)$):

$$D_{KL}(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \ln \frac{g(x)}{f(x)} dx.$$

В качестве функции $f(x)$ возьмем плотность логнормального распределения, обеспечив, таким образом, связь с моделью Блека-Шоулза.

Второе слагаемое минимизирует отклонение цен опционов, восстановленных по полученной плотности, от рыночных котировок y_i .

Коэффициент $w_i = \frac{1}{Ask_i - Bid_i}$ учитывает

значимость Bid-Ask спреда при каждом страйке, чем больше Bid-Ask спред, тем выше неопределенность, тем меньше значимость данного компонента.

В результате решения поставленной нами задачи вариационного исчисления получается сплайн, каждый кусок которого представляется в виде:

$$c_i''(K) = d_i^2 e^{-\frac{1}{\sigma^2} K^2 + d_i K}$$

Коэффициенты d_i^1 и d_i^2 для всех $i = 1, \dots, N$ находятся численной минимизацией функционала J при фиксированных котировках y_i .

Коэффициент α в первом слагаемом позволяет регулировать вес слагаемых в сумме: первое слагаемое отвечает за близость искомой и логнормальной плотности, а второе – за близость кривой цены, восстановленной из искомой плотности, с реальными котировками. Ниже приведены рисунки плотностей для разных значений α .

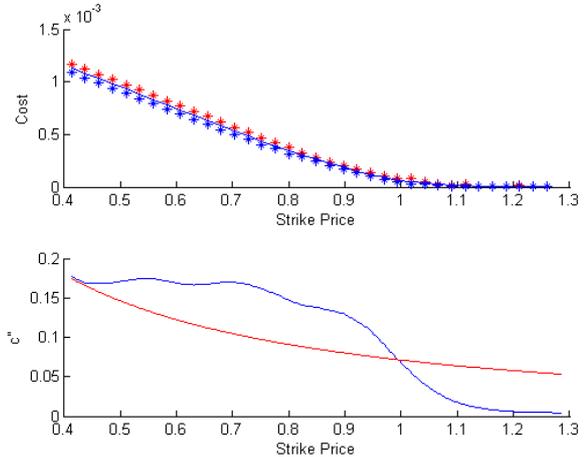


Рис. 2. α - маленькое, восстановленные цены практически совпадают с котировками

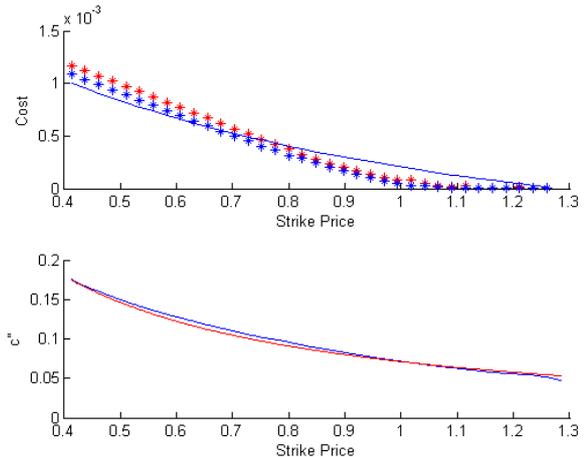


Рис. 3. α - большое, плотность близка к логнормальной

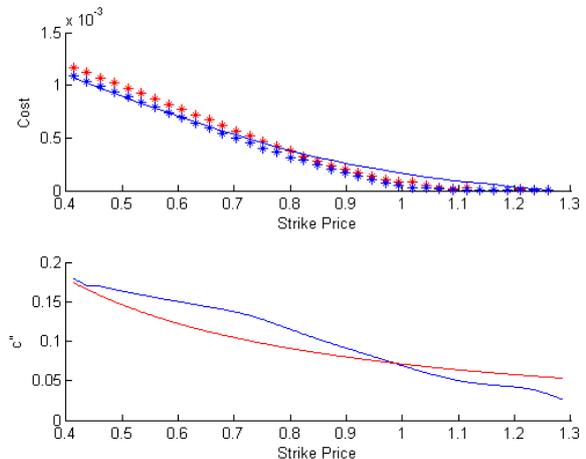


Рис. 4. α - среднее, компромисс между близостью плотностей и близостью цен.

V. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РИСК-НЕЙТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Неопределенность, которую дает Bid-Ask спред, вообще говоря, не позволяет взять за «истинные» цены какую-либо одну кривую цен, например, средние цены. Поэтому вместе с результирующей кривой плотности нужна оценка точности, которая могла бы быть использована в приложениях. Для построения такой оценки мы предлагаем использовать метод Монте Карло. Так как способ генерации кривых цен сильно влияет на получаемые риск-нейтральные плотности, ключевой вопрос заключается в том, каким образом следует генерировать кривые цен, какова должна быть их кривизна и т. д. Мы предлагаем использовать естественные, свойственные рынку кривые, и следующий алгоритм оценки точности:

1. Берутся срезы цены опционов (со всеми доступными страйками) через фиксированные интервалы времени. Для каждого момента времени по модели Блека-Шоулза строится улыбка волатильности. Таким образом, получается семейство кривых волатильностей (рис. 5)
2. По полученным улыбкам волатильности вычисляются приращения по времени и записываются в матрицу приращений. Матрица приращений раскладывается на факторы, из которых выделяются наиболее значимые. Таким образом, мы выделяем вектор естественных, свойственных рынку приращений.
3. Фиксируется момент времени, в который нужно построить риск-нейтральную плотность, в который вычисляется «улыбка» волатильности. По выделенным в п.2 естественным приращениям относительно текущей «улыбки» волатильности, случайным образом генерируются множество кривых волатильностей.
4. Кривые волатильностей переводятся в цены, а цены в плотности. Полученное семейство плотностей и есть оценка точности (рис. 6).

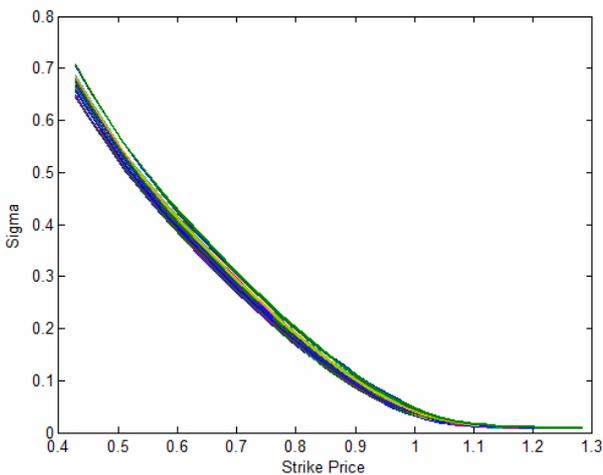


Рис. 5. Семейство кривых улыбок волатильностей.

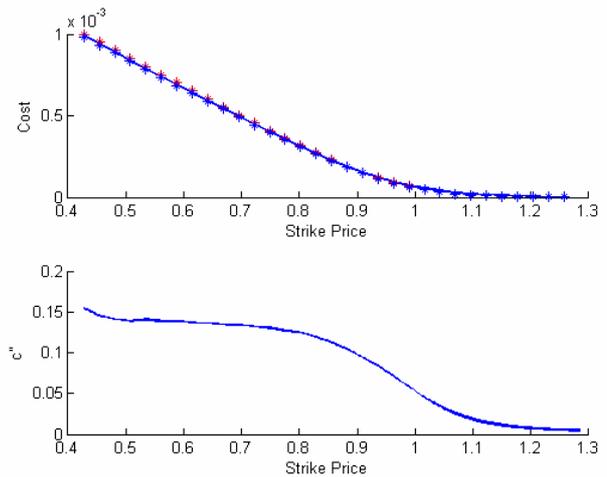


Рис. 6. Верхний рисунок – цены опционов и восстановленные цены; нижний рисунок – семейство полученных риск-нейтральных плотностей.

VI. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДАННЫЕ

При моделировании были использованы данные о транзакциях по опционам на индекс SP500 за 06-10 ноября 2006 года. Были взяты опционы типа call со сроком истечения 15 декабря 2006 и ценами страйк от 1280 до 1440. Цена базового актива колебалась в районе 1380.

VII. ПРИМЕР: ОЦЕНКА ГИПОТЕТИЧЕСКОГО ОПЦИОНА

В качестве примера использования построенной оценки риск-нейтральной плотности приведем оценку гипотетического опциона. На рис. 7 видно, что получилось не только оценить стоимость, но и точность оценки, которая, кстати, сравнима с Bid-Ask спредами, правда чуть больше их, что логично, т.к. в рамках «бидасков» могут колебаться цены всех соседних опционов.

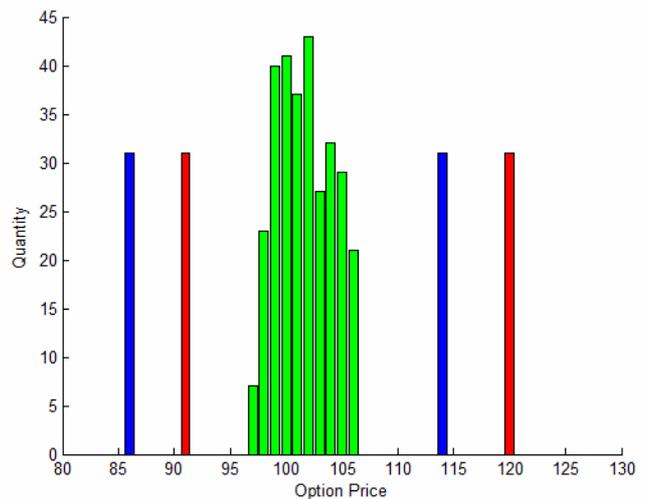


Рис. 7. Синий – цена Bid, красный – цена Ask; два столбца слева (синий, красный) – цены опциона со страйком 1380; два столбца справа (синий, красный) – цены опциона со страйком 1385; зеленый – полученное распределение цен гипотетического опциона со страйком 1382.5; цена базового актива – 1374.

VIII. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы получен, реализован и опробован метод построения риск-нейтральной плотности вероятности по котировкам опционов, позволяющий дать оценку точности искомой плотности. Риск-нейтральная плотность представлена сплайном, который является решением поставленной задачи вариационного исчисления.

Оценка точности кривой плотности, обусловленная неопределенностью, возникающей из за Bid-Ask спреда, построена методом Монте Карло. При построении оценки используется факторный анализ приращений «улыбок» волатильности, меняющихся с течением времени. Результаты факторного анализа позволяют генерировать свойственные рынку кривые, которые и составляют оценку точности. Метод реализован в пакете MATLAB. Приведен пример использования метода для оценки гипотетического опциона.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] Hull John C. 2008, Options, futures, and other derivatives, Prentice-Hall inc.
- [2] Abadir, K., and M. Rockinger. "Density-Embedding Functions." Working paper, HEC, 1997.
- [3] Abken, P., D. Madan, and S. Ramamurtie. "Pricing S&P 500 Index Options Using a Hilbert Space Basis." Working paper, Federal Reserve Bank of Atlanta, 1996b.
- [4] Ait-Sahalia, Y., and A. Lo. "Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices." *Journal of Finance*, 53, No. 2 (1998a), pp. 499-547.
- [5] Ait-Sahalia, Y., and A. Lo. "Nonparametric Risk Management and Implied Risk Aversion." Working paper, University of Chicago, 1998b.
- [6] Aparicio, S., and S. Hodges. "Implied Risk-Neutral Distribution: A Comparison of Estimation Methods." Working paper, Warwick University, 1998.
- [7] Bahra, B. "Implied Risk-Neutral Probability Density Functions from Option Prices: Theory and Application." Working paper, Bank of England, 1997.
- [8] Bookstaber, R., and J. McDonald. "A General Distribution for Describing Security Price Returns." *Journal of Business*, 60, No. 3 (1987), pp. 401-424.
- [9] Breeden, D., and R. Litzenberger. "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Options Prices." *Journal of Business*, 51 (1978), pp. 621-651.
- [10] Brenner, M., and Y. Eom. "No-Arbitrage Option Pricing: New Evidence on the Validity of the Martingale Property." Working paper, New York University, 1997.
- [11] Brown, G., and K.B. Toft. "Constructing Binomial Trees from Multiple Implied Probability Distributions." *Journal of Derivatives*, 7, No. 2 (1999).
- [12] Buchen, P., and M. Kelly. "The Maximum Entropy Distribution of an Asset Inferred from Option Prices." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31, No. 1 (1996), pp. 143-159.
- [13] Campa, J., K. Chang, and R. Reider. "Implied Exchange Rate Distributions: Evidence from OTC Option Markets." *Journal of International Money and Finance*, 17, No. 1 (1998), pp. 117-160.
- [14] Cont, R. "Beyond Implied Volatility." In J. Kertesz and I. Kondor, eds., *Econophysics*. Dordrecht: Kluwer, 1997.
- [15] Corrado, C., and T. Su. "Implied Volatility Skews and Stock Index Skewness and Kurtosis Implied by S&P 500 Index Option Prices." *Journal of Derivatives*, 4, No. 4 (1997), pp. 8-19.
- [16] Coutant, S., E. Jondeau, and M. Rockinger. "Reading Interest Rate and Bond Futures Options' Smiles: How PIBOR and Notional Operators Appreciated the 1997 French Snap Election." Working paper, HEC, 1998.
- [17] Hartvig, N., J. Jensen, and J. Pedersen. "Risk Neutral Densities of the 'Christmas Tree' Type." Working paper, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, Aarhus University, 1999.
- [18] Jackwerth, J. "Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns." *Review of Financial Studies*, forthcoming, 1999.
- [19] Jackwerth, J., and M. Rubinstein. "Recovering Probability Distributions from Option Prices." *Journal of Finance*, 51 (1996), pp. 1611-1631.
- [20] Jarrow, R., and A. Rudd. "Approximate Valuation for Arbitrary Stochastic Processes." *Journal of Financial Economics*, 10, No. 3 (1982), pp. 347-369.
- [21] Johnson, N. "Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation." *Biometrika*, 36 (1949), pp. 149-176.
- [22] Jondeau, E., and M. Rockinger. "Estimating Gram-Charlier Expansions under Positivity Constraints." Working paper, HEC, 1998a.
- [23] Longstaff, F. "Option Pricing and the Martingale Restriction." *Review of Financial Studies*, 8, No. 4 (1995), pp. 1091-1124.
- [24] Malz, A. "Estimating the Probability Distribution of the Future Exchange Rate from Option Prices." *Journal of Derivatives*, 5, No. 2 (1997), pp. 18-36.
- [25] Malz, A. "Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System: The Case of Sterling-Mark." *Journal of International Money and Finance*, 15, No. 5 (1996), pp. 717-748.
- [26] Mayhew, S. "On Estimating the Risk-Neutral Probability Distribution Implied by Option Prices." Working paper, Purdue University, 1995.
- [27] Melick, W., and C. Thomas. "Recovering an Asset's Implied PDF from Option Prices: An Application to Crude Oil During the Gulf Crisis." *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32 (1997), pp. 91-115.
- [28] Posner, S., and M. Milevsky. "Valuing Exotic Options by Approximating the SPD with Higher Moments." *Journal of Financial Engineering*, 7, No. 2 (1998), pp. 109-125.
- [29] Potters, M., R. Cont, and J. Bouchaud. "Financial Markets as Adaptive Systems." *Europhysics Letters*, 41, No. 3 (1998), pp. 239-244.
- [30] Pritsker, M. "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous Time Interest Rate Models." Working paper, Federal Reserve Board, Washington, DC, 1997.
- [31] Ritchey, R. "Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures." *Journal of Financial Research*, 13, No. 4 (1990), pp. 285-295.
- [32] Rookley, C. "Fully Exploiting the Information Content of Intra Day Option Quotes: Applications in Option Pricing and Risk Management." Working paper, University of Arizona, 1997.
- [33] Rosenberg, J. "Pricing Multivariate Contingent Claims Using Estimated Risk-Neutral Density Functions." Working paper, University of California, San Diego, 1996.
- [34] Rosenberg, J., and R. Engle. "Option Hedging Using Empirical Pricing Kernels." Working paper, New York University, 1997.
- [35] Rubinstein, M. "Edgeworth Binomial Trees." *Journal of Derivatives*, 5, No. 3 (1998), pp. 20-27.
- [36] Sherrick, B., P. Garcia, and V. Tirupattur. "Recovering Probabilistic Information from Option Markets: Tests of Distributional Assumptions." Working paper, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1995.
- [37] Sherrick, B., S. Irwin, and D. Forster. "An Examination of Option-Implied S&P 500 Futures Price Distributions." *Financial Review*, 31, No. 3 (1996), pp. 667-694.
- [38] Sherrick, B., S. Irwin, and D. Forster. "Option-Based Evidence of the Nonstationarity of Expected S&P 500 Futures Price Distributions." *Journal of Futures Markets*, 12, No. 3 (1992), pp. 275-290.
- [39] Shimko, D. "Bounds on Probability." *Risk*, 6 (1993), pp. 33-37.
- [40] Stutzer, M. "A Simple Nonparametric Approach to Derivative Security Valuation." *Journal of Finance*, 51 (1996), pp. 1633-1652.