

ЛОКАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ СИЛОВОМ И ТЕМПЕРАТУРНОМ НАГРУЖЕНИИ

1. Введение. Устойчивость оболочек с учетом нагрева рассматривается в ряде работ [1 - 4]. В книге [1] приведена общая статическая и динамическая теория для трехмерных задач термоустойчивости. Излагаются термодинамические законы деформаций и выводятся общие дифференциальные уравнения термоупругости для анизотропной среды. Книга [2] посвящена теории расчета предельных нагрузок для оболочек разных форм и материалов при наличии силовых и температурных воздействий. Расчет конструкции при различных режимах нагрева ведется с помощью ее обобщенной характеристики — функциональной зависимости между несущей способностью и распределением температур в материале оболочки, определяемой при нестационарных режимах нагрева (метод замены температурных полей, метод преобразования обобщенных характеристик с помощью критериев теплового подобия) либо при изотермических состояниях (метод определяющей температуры). Впервые попытка применить методы теории обобщенных переменных к решению задач нахождения предельных нагрузок в случае одностороннего нестационарного нагрева тонкостенных цилиндрических оболочек из стеклопластика была сделана Л.Г. Белозеровым и Н.А. Малаховым. С этой целью была проведена серия экспериментов, при которых на моделях оболочек устанавливались зависимости предельных нагрузок от критериев теплового подобия, характеризующих тепловые граничные условия на наружной тепловоспринимающей поверхности ([3]). В статье [4] анализируется задача устойчивости оболочки сферической формы модели Кирхгофа — Лява под действием давления и температуры в линейной и нелинейной постановке. Для исследования нелинейного случая используется метод Ритца.

Цель данной работы — используя локальный подход [5-6], исследовать устойчивость оболочки сферической формы модели Тимошенко с наполнителем при различных типах соотношений трех параметров: сдвига, жесткости наполнителя и температуры.

2. Постановка задачи. Рассматривается тонкостенная сферическая трансверсально изотропная оболочка модели Тимошенко с наполнителем под действием внешнего давления и равномерного нагрева. Взаимодействие между оболочкой и наполнителем описывается моделью Винклера с постоянным коэффициентом постели. Нагрев наполнителя не учитывается. Принимаются допущения локальной теории устойчивости [4], позволяющие ограничиться применением уравнений пологих оболочек. Требуется исследовать зависимость критической нагрузки от параметров сдвига, жесткости наполнителя и температуры, представив ее в аналитической и графической формах.

3. Уравнения пологих оболочек. Введем на срединной поверхности рассматриваемой оболочки систему криволинейных координат α, β , так чтобы их направления совпали с направлениями главных кривизн. Предположим, что оболочка находится под

воздействием внешнего давления и равномерного теплового воздействия. Тогда система уравнений полой оболочки модели Тимошенко с наполнителем будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} &= 0, \quad \{1, 2\} \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + k_1 N_1 + k_2 N_2 + q &= 0, \\ \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + Q_1 &= 0 \quad \{1, 2\}\end{aligned}\quad (1)$$

где A, B — коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности оболочки, R — радиус сферы, $x = \alpha A, y = \beta B, k_i = 1/R$ — главные кривизны, N_1, N_2, S — тангенциальные усилия, Q_1, Q_2 — перерезывающие усилия, M_1, M_2, H — изгибающие и крутящий моменты, q — вариация давления, связанная с поворотом нормали.

$$\begin{aligned}N_1 &= \frac{Eh(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2)}{(1 - \nu^2)}, \quad M_1 = \frac{E_1 h^3 (\varkappa'_1 + \nu \varkappa'_2)}{12(1 - \nu^2)}, \quad Q_1 = G' h (\varphi_1 - \gamma_1) \quad \{1, 2\} \\ S &= \frac{Eh\omega}{2(1 + \nu)}, \quad H = \frac{Eh^3 \tau'}{12(1 + \nu)} \\ \varepsilon_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} - k_1 w, \quad \gamma_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varkappa'_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad \{1, 2\} \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \tau = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \tau' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)\end{aligned}$$

Здесь E — модуль Юнга, h — толщина оболочки, φ_1, φ_2 — углы поворота волокон, u, v, w — проекции перемещения, G' — модуль сдвига в трансверсальном направлении, ν — коэффициент Пуассона, символ $\{1, 2\}$ означает, что имеет место еще одно соотношение, полученное циклической перестановкой $x, y, 1, 2$. Выполнив подстановку

$$N_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad N_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}, \quad \varphi_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \quad \varphi_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Theta}{\partial x}$$

выразим систему уравнений (1) в терминах функции усилий Φ и функций углов сдвига Ψ, Θ :

$$\begin{aligned}(Eh_*)^{-1} \Delta \Delta \Phi + \Delta_k w &= 0, \\ G' h (\Delta w - \Delta \Psi) + \Delta_k \Phi + q &= 0, \\ -D \Delta \Psi &= G' h (w - \Psi), \\ \frac{D(1 - \nu)}{2} \Delta \Theta - G' h \Theta &= 0.\end{aligned}\quad (2)$$

Здесь h_* — безразмерная толщина оболочки,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12R^2(1 - \nu^2)}\quad (3)$$

Согласно [4],

$$q = -\sigma h \Delta w - \alpha_0 w, \quad \sigma = \sigma_C + \sigma_T, \quad \delta = 1 + \frac{\alpha_0 R(1 - \nu)}{2Eh}\quad (4)$$

$$\sigma_C = \frac{q_0 R}{2h\delta}, \quad \sigma_T = \frac{\alpha_0 \beta_0 T R^2}{2h\delta} \quad (5)$$

где σ — полное напряжение, являющееся суммой силовой составляющей σ_C и температурной σ_T , q_0 — внешнее давление, α_0 — коэффициент постели заполнителя, T — температура нагрева, β_0 — коэффициент температурного расширения материала оболочки. Представив функции w , Φ , Ψ в двойку — периодической форме

$$\begin{aligned} w &= w_0 \sin\left(\frac{mx}{R}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \\ \Phi &= \Phi_0 \sin\left(\frac{mx}{R}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right), \\ \Psi &= \Psi_0 \sin\left(\frac{mx}{R}\right) \cos\left(\frac{ny}{R}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

выразим параметр нагружения q_0 как функцию, зависящую от волновых чисел m, n и сделаем замену

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \frac{\sigma}{E\mu^2}, \quad s = \mu r, \quad \omega_0 = \frac{\alpha_0 R^2}{Eh}, \quad t_0 = \frac{\beta_0 T}{2\delta\mu^2}, \\ a &= \frac{\mu^2 E}{G'}, \quad \mu^4 = \frac{h^2}{12R^2(1-\nu^2)}, \quad r^2 = m^2 + n^2 \end{aligned}$$

После преобразований получим выражение функции нагружения Λ_0 , являющейся безразмерным напряжением, состоящим из суммы силовой и температурной составляющих:

$$\Lambda_0 = \Lambda + \Lambda_T = \frac{s^2}{as^2 + 1} + \frac{1 + \omega_0}{s^2}, \quad \Lambda = \frac{\sigma_C}{E\mu^2}, \quad \Lambda_T = \omega_0 t_0, \quad (7)$$

При отсутствии сдвига и температуры данное выражение совпадает с найденным в [5]. Критическое значение параметра нагружения находим после положительной минимизации функции (7) по волновому числу s :

$$\Lambda_{0*}(a, \omega_0, t_0) = \min_s^+ \Lambda_0(s, a, \omega_0, t_0) = \Lambda_0(s_*, a, \omega_0, t_0) \quad (8)$$

Поскольку Λ_T не зависит от волновых чисел, силовая часть параметра критической нагрузки (критическое давление) выражается как

$$\Lambda_* = \Lambda_{0*} - \Lambda_T \quad (9)$$

4. Анализ критического давления. Для критического давления возможны два случая, первый из которых в свою очередь разбивается на 3 части.

Случай 1. При $a < \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0}}$

$$\Lambda_* = 2\sqrt{1 + \omega_0} - a(1 + \omega_0) - \omega_0 t_0, \quad s_* = \left(\frac{\sqrt{1 + \omega_0}}{1 - a\sqrt{1 + \omega_0}} \right)^{1/2} \quad (10)$$

На рисунке 1 приведена зависимость параметра критического давления (9) от параметров сдвига и температуры при четырех значениях параметра жесткости заполнителя:

$\omega_0 = 0.1; 0.5; 1.5; 3$. Как следует из выражения (10) и рис. 1, при $\omega_0 \ll 1$ параметр критического давления Λ_* зависит преимущественно от параметра сдвига a , при $\omega_0 \gg 1$ — от температурного параметра t_0 . Исследуем более подробно зависимость критического давления от жесткости заполнителя при различных значениях параметров сдвига и температуры. Вычислим производную $\Lambda'_*(\omega_0)$ и точку экстремума ω_{0*} (для тех случаев, когда эта точка принадлежит положительной полуоси):

$$\Lambda'_*(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0}} - a - t_0, \quad \omega_{0*} = \frac{1}{(a + t_0)^2} - 1 \quad (11)$$

1.1. При отсутствии температуры и сдвига ($a = t_0 = 0$) увеличение жесткости заполнителя ω_0 всегда приводит к увеличению критического давления Λ_* , поскольку функция $\Lambda_*(\omega_0)$ является монотонно возрастающей (рис.2)

1.2. Если $0 < a + t_0 < 1$, то критическое давление $\Lambda_*(\omega_0)$ возрастает при $0 < \omega_0 < \frac{1}{(a + t_0)^2} - 1$, достигает своего наибольшего значения при $\omega_0 = \frac{1}{(a + t_0)^2} - 1$ и убывает при $\omega_0 > \frac{1}{(a + t_0)^2} - 1$. На рисунках 3,4 приведены примеры зависимостей $\Lambda_*(\omega_0)$ при $a = t_0 = 0.20$ и $a = t_0 = 0.29$.

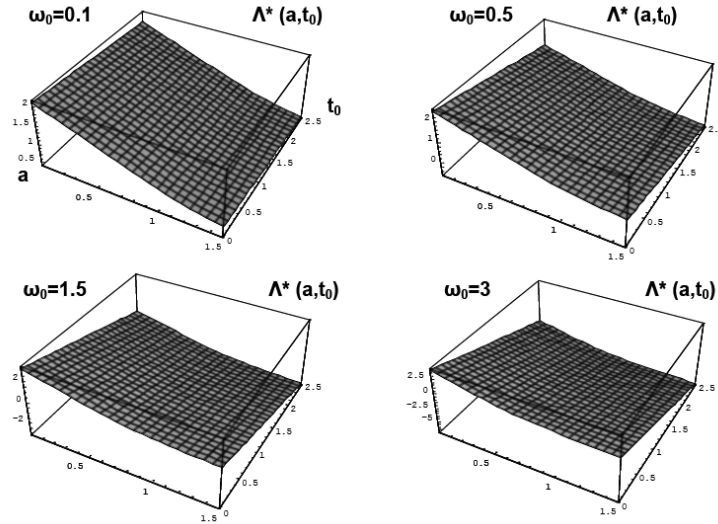


Рис.1

1.3. В случае $a + t_0 \geq 1$ увеличение жесткости заполнителя ω_0 всегда приводит к уменьшению критического давления Λ_* , поскольку функция $\Lambda_*(\omega_0)$ монотонно убывает. На рисунке 5 приведен график зависимости $\Lambda_*(\omega_0)$ при $a = t_0 = 0.5$.

Случай 2. При $a \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_0}}$ значение критического давления, предсказанное теорией, имеет вид: $\Lambda_* = \frac{1}{a} - \omega_0 t_0$, $s_* \rightarrow \infty$. Однако в данном случае результат выходит за пределы теории сплошной среды, поскольку при превышении величины сдвига, установленной в [7], происходит потеря устойчивости самого материала оболочки.

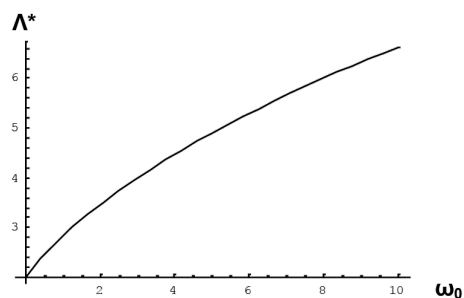


Рис.2

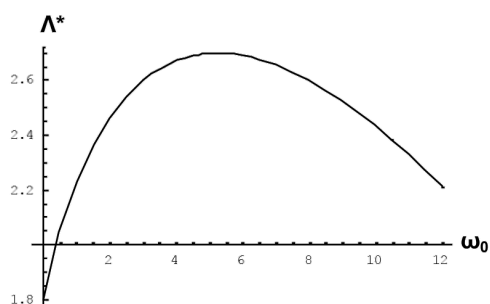


Рис.3

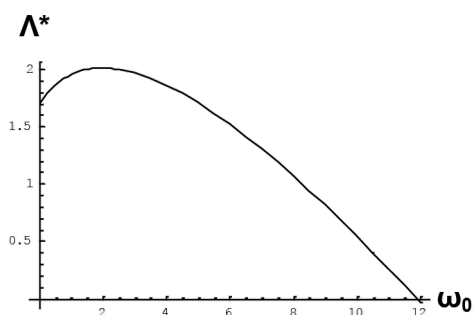


Рис.4

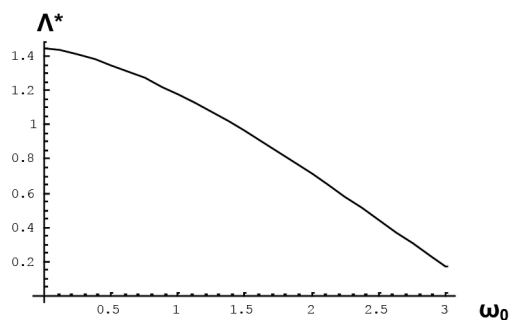


Рис.5

5. Заключение. Проведенный анализ показал, что при однородном сжатии сферической оболочки увеличение как температуры, так и сдвига понижают величину критического давления. При малой жесткости заполнителя существенную роль в этом играет сдвиговый параметр, при больших значениях — температурный. При этом увеличение жесткости заполнителя может привести как к увеличению, так и уменьшению критического давления, в зависимости от соотношения температурного и сдвигового параметров.

Литература

1. Новацкий В.К. Теория упругости. М.: Мир, 1975.
2. Белозеров Л.Г., Киреев В.А. Композитные оболочки при тепловых и силовых воздействиях. М.: Физматлит, 2003.
3. Белозеров Л.Г. Метод исследования несущей способности стеклопластиковых оболочек // Труды ЦАГИ. 1971. вып. 1353.
4. Корбут Б.А. Устойчивость сферической оболочки с упругим заполнителем при действии нагрузок и температуры // Известия вузов. Авиационная техника. 1965. №4. С. 97–102.
5. Товстик П.Е. Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы. М.: Наука, 1995.
6. Товстик П.Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Известия РАН. 2005. Вып.1. С. 147–160.

7. Tovstik P.E., Tovstik T.P. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM. 2007. v. 87. №2. P. 160–171.

References

1. Novatskiy V.K. Theory of elasticity. Moscow. Mir. 1975. (in Russian)
2. Belozerov L.G., Kireev V.A. Composite shells with thermal and power influences. Moscow. Fizmatlit. 2003. (in Russian)
3. Belozerov L.G. The method of investigation of bearing capacity of fiberglass shells // Proceedings of CAGI. 1971. vol. 1353. (in Russian)
4. Korbut B.A. Stability of spherical shell on elastic base under the influence of stress and temperature // Proceedings of the higher education institutions. Plane technology. 1965. №4. S. 97–102. (in Russian)
5. Tovstik P.E. Stability of thin shells. Asymptotic methods. Moscow. Nauka. 1995. (in Russian)
6. Tovstik P.E. Local stability of plates and shallow shells on elastic base // Proceedings of the Russian Academy of Sciences. 2005. Vol.1. P. 147–160. (in Russian)
7. Tovstik P.E., Tovstik T.P. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear // ZAMM. 2007. v. 87. №2. P. 160–171.

Summary

A. V. Miheev. Local stability of filled spherical shell under force and heating load

In this work we consider the task of stability of filled thin-walled transversally isotropic spherical shell of Timoshenko model with under external pressure and homogeneous heating. The interaction between shell and filler is described by Winkler's model with a constant coefficient. Heating of the filler is not considered. The assumptions of the theory of local stability are accepted. The dependence of the critical load parameter on the parameters of shear, heating and rigidity of the filler is obtained. Various cases of this dependence are investigated. The results are presented in analytical and graphical form. It is found, that during uniform compression of spherical shell the increase of temperature and shift decreases the value of critical load. With low rigidity of the filler the shift exerts main influence, with big rigidity — heating of the shell. Wherein the increase of rigidity of the filler may increase or decrease the value of critical load. The latter depends on interrelations of the parameters of shift and temperature.

A. B. Михеев. Локальная устойчивость сферической оболочки с наполнителем при силовом и температурном нагружении.

В данной работе рассматривается задача устойчивости тонкостенной сферической трансверсально изотропной оболочки модели Тимошенко с упругим наполнителем под действием внешнего давления и равномерного нагрева. Взаимодействие между оболочкой и наполнителем описывается моделью Винклера с постоянным коэффициентом постели. Нагрев наполнителя не учитывается. Принимаются допущения локальной теории устойчивости, позволяющие ограничиться применением уравнений пологих оболочек. Получена зависимость параметра критической нагрузки от параметров сдвига, нагрева и жесткости основания. Исследуются различные предельные случаи этой зависимости. Результаты представлены в аналитической и графической формах. Установлено, что при однородном сжатии сферической оболочки увеличение как температуры, так и сдвига понижают величину критического давления. При малой жесткости наполнителя существенную роль в этом играет сдвиг, при больших значениях — нагрев оболочки. При этом увеличение жесткости наполнителя может привести как к увеличению, так и уменьшению критического давления, в зависимости от соотношения температурного и сдвигового параметров

УДК 539.3

Михеев А. В. Локальная устойчивость сферической оболочки с наполнителем при силовом и температурном нагружении // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1. 200 Вып.() С. 00–00.

Рассматривается задача устойчивости тонкостенной сферической оболочки модели Тимошенко с наполнителем под действием внешнего давления и равномерного нагрева. Исследуется зависимость параметра критической нагрузки от параметров сдвига, нагрева и жесткости основания. Библиогр. 7 назв. Ил. 5.