ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Е. М. Воробьев

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПО АРХИМЕДУ

В статье дано определение вещественных чисел на основе метода исчерпания Евдокса–Архимеда. Новое определение обеспечивает единообразную трактовку таких объектов математического анализа, как вещественные числа, определенный интеграл, а также и численных методов нахождения нулей функций. Обсуждаются преимущества и недостатки метода для преподавания математического анализа. Дано определение непрерывности функции в точке, согласованное с новым определением вещественных чисел.

Ключевые слова: вещественные числа, метод Архимеда, архимедовы пары рациональных последовательностей.

E. M. Vorob'ev

REAL NUMBERS. THE ARCHIMEDES DEFINITION

The author of the article proposes a new definition of real numbers. The definition generalises the Eudoxus-Archimedes method of exhaustion and provides the uniform interpretation of such objects as real numbers, definite integrals and numeric methods for searching the roots of functions. The author discusses the advantages and limitations of the method and also gives a new definition of function continuity at a point, which agrees with the new real numbers definition.

Key words: real numbers, Archimedes method, Archimedes pairs of rational sequences.

Введение. Проблема непрерывности в математическом анализе и его преподавании

Для математического анализа непрерывность является одним из ключевых понятий. Она проявляет себя в форме непрерывности вещественной числовой оси и в свойствах непрерывных функций.

Как отмечал один из создателей современной теории вещественных чисел Р. Дедекинд, необходимость строгого введения иррациональных чисел он почувствовал, когда в качестве профессора Цюрихского политехникума ему пришлось «излагать элементы дифференциального исчисления и при этом чувствовать

© ВОРОБЬЕВ Евгений Михайлович – доктор физико-математический наук, профессор Московского государственного института электроники и математики НИУ ВШЭ. E-mail: emv@miem.edu.ru

живее, чем когда-либо, недостаток в действительно научном обосновании арифметики» [2, с. 9]. Это заставило его разработать первую из современных трактовок действительных чисел как сечений во множестве рациональных чисел. Она является обобщением теории пропорций античного греческого математика Евдокса [4, книга V].

Принятые в настоящее время подходы Дедекинда (сечения), Вейерштрасса (бесконечные десятичные дроби) и Кантора (классы эквивалентности фундаментальных последовательностей) к определению вещественных чисел возникли в результате усилий по решению проблемы непрерывности (полноты) числовой оси. Одновременно получила строгую трактовку теория пределов. Так, Дедекинд, не опираясь на интуитивные геометрические представления, доказал теорему о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. На основе предела вводится определение непрерывности функций и доказываются свойства непрерывных функций, существенно опирающиеся на полноту вещественной оси.

Таким образом, в традиционном преподавании математического анализа из непрерывности вещественной оси – исторически и логически исходного понятия – непрерывность функций вводится не непосредственно, а через промежуточную ступень – предел. Заметим, что ни в одной теории вещественного числа понятие предела не используется!

В преподавании математического анализа наряду с проблемой обоснования понятий предела, непрерывной, дифференцируемой функции, производной, интеграла, ряда и т. д. существенное значение имеет наглядность изложения. На наш взгляд, ни одна из упомянутых выше теорий вещественного числа, не говоря уже об аксиоматическом определении вещественных чисел, не является в достаточной степени наглядной для того, чтобы сделать ее интуитивно понятной.

Так, например, трудно признать простоту и наглядность сечений, определяющих такие иррациональные трансцендентные числа, как e и π. Их определения в математическом анализе вводятся через последовательности, в то время как в теории Дедекинда исходным понятием является множество.

Нам представляется перспективным с точки зрения сочетания строгости и наглядности развиваемый в работе подход к определению вещественного числа на основе обобщения античного метода исчерпания – метода Евдокса–Архимеда.

Метод Архимеда вычисления числа π

Метод Архимеда вычисления числа π хорошо известен [1, с. 266]. Архимед рассматривал последовательности $\{an\}$ и $\{bn\}$ полупериметров вписанных и описанных в единичную окружность правильных n-угольников:

$$an = n \sin(\pi/n); \; bn = n \operatorname{tg}(\pi/n).$$

Архимед начал с $n = 3$. Затем он удваивал число сторон правильных многоугольников до тех пор, пока не достиг $n = 96$.

Непосредственно окружность заключается между вписанными и описанными многоугольниками. Архимед предположил, что длина окружности L удовлетворяет неравенствам

$$2\,an < L < 2\,bn.$$

Заметим, что Архимед не дал никакого определения длины окружности, считая ее очевидной. Затем Архимед, используя рекуррентные соотношения

$$an = 2bnan + bn; \; \mathrm{bn} = 2bnan + bn, \qquad (1)$$

которые легко вывести на основе школьной тригонометрии, и прибегая на каждом шаге вычислений к рационализации радикала, получил, что

$$a96 = 223/71; \; b96 = 22/7.$$

Среднее арифметическое этих чисел равно 3.14185, что дает приближенное значение числа π с относительной погрешностью менее 0.01%.

Вызывает удивление тот факт, что Архимед получил приближенное значение π, не имея при этом никакой ясно высказанной идеи о том, что такое вещественное иррациональное число в общем случае. Во времена Архимеда иррациональные числа были не более чем величины, не представимые в виде дробей p/q, где p и q – натуральные числа. Возможно, что Архимед рассматривал $\{an\}$ и $\{bn\}$ как бесконечные последовательности все более точных приближений для π.

С развиваемой в настоящей статье точки зрения, Архимедова пара $\{\{an\}, \{bn\}\}$ последовательностей является после некоторого уточнения самим по себе числом π.

Развитие этого подхода к определению всех вещественных чисел является целью настоящей работы. Мы предлагаем рассматривать вещественные числа как подходящим образом определенные Архимедовы пары рациональных последовательностей.

Число Пифагора 2

Следующий результат послужил причиной введения иррациональных чисел в математику.

Теорема Пифагора. ***Не существует рационального числа p/q такого, что его квадрат равен 2.***

Теорема Пифагора обычно интерпретируется как утверждение о несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его сторонами. Она также утверждает, что график функции $x2–2$ не пересекает ось абсцисс на рациональной координатной плоскости.

Таким образом, рациональных чисел недостаточно для того, чтобы снабдить длинами все отрезки и снабдить координатами точки пересечения кривых на плоскости.

Дадим определение числа 2 с помощью пары рациональных последовательностей. Идея определения подсказана стандартной теоретической процедурой измерения отрезков с помощью последовательностей измерений с недостатком и с избытком.

Сконструируем две рациональные последовательности $\{an\}$ и $\{bn\}$ так, чтобы последовательности $\{an\ 2\}$ и $\{bn\ 2\}$ сходились к 2. Для этого положим $a1 = 1$, $b1 = 2$. Ясно, что $a1\ 2 < 2 < b1\ 2$.

Рассмотрим табл. 1, первая строка которой заполнена числами от 1 до 2 с интервалом 0.1, а вторая – их квадратами.

Таблица 1

Числа от 1 до 2 с шагом 0.1 и их квадраты

1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
1	1.21	1.44	1.69	1.96	2.25	2.56	2.89	3.24	3.61	4

Найдем два соседних числа в верхней строке такие, что квадрат меньшего меньше 2, а квадрат большего больше 2. В рассматриваемой табл. 1 это числа 1.4 и 1.5. Положим $a2 = 1.4$, $b2= 1.5$. Имеем неравенства: $a1\ 2 < a2\ 2 < 2 < b2\ 2 < b1\ 2$. Элементы $a3 = 1.41$, $b3 = 1.42$ находим из таблицы аналогичной табл. 1, верхняя строка которой содержит числа от 1.4 до 1.5 с шагом 0.01, а нижняя – их квадраты. Продолжая подобным образом, мы получаем две последовательности чисел $\{an\}$ и $\{bn\}$ со следующими свойствами.

1. Последовательность $\{an\}$ монотонно возрастает, а последовательность $\{bn\}$ монотонно убывает.
2. Для всех индексов i, j справедливы неравенства $ai < bj$.
3. Имеет место равенство $bn – an = 0.1n$.
4. Рациональные последовательности $\{an2\}$, $\{bn2\}$ сходятся к 2.
5. Рациональные последовательности $\{an\}$ и $\{bn\}$ не сходятся ни к какому рациональному числу.

Теорема Пифагора и свойства 4 и 5 означают, что иррациональное число 2 можно естественным образом рассматривать как пару рациональных последовательностей $\{\{an\}, \{bn\}\}$. Первая последовательность дает приближенные значения 2 с недостатком, а вторая – с избытком.

Подчеркнем, что мы рассматриваем 2 не как предел, а как общее имя (символ), или обозначение для пары рассмотренных последовательностей.

Число *e* – основание натуральных логарифмов

Определим вещественное число, называемое основанием натуральных логарифмов и обозначаемое через e, следующим образом. Рассмотрим пару рациональных последовательностей:

$$an = (1 + 1/n)n,\ bn = (1 + 1/n)n + 1. \qquad (2)$$

Теорема. ***Последовательности (2) обладают следующими свойствами:***

1. Последовательность {an} монотонно возрастает, а последовательность {bn} монотонно убывает.

2. Для всех индексов i, j справедливы неравенства ai < bj.

3. Разность {bn – an} последовательностей бесконечно малая.

4. Справедливо неравенство bn- an < 3/n.

Мы определяем число e как пару $\{\{an\}, \{bn\}\}$ последовательностей, описанных в последней теореме. Основанием для этого определения служит то обстоятельство, что рассматриваемые последовательности позволяют сколь угодно точно вычислять приближенные значения числа e.

Например, на основании неравенства пункта 4 теоремы элементы *bn*, *an* для $n = 3*105$ дают приближенные значения 2.71828 и 2.71829 с абсолютной погрешностью, не превосходящей 10^{-5}.

Интегрированные системы математических вычислений, такие как Математика, Мэйпл, Маткад и др. позволяют наглядно изобразить свойства рассматриваемых последовательностей с помощью их графиков. На рис. 1 квадратиками представлены элементы *bn*, кружочками – элементы *an* для *n* от 1 до 40.

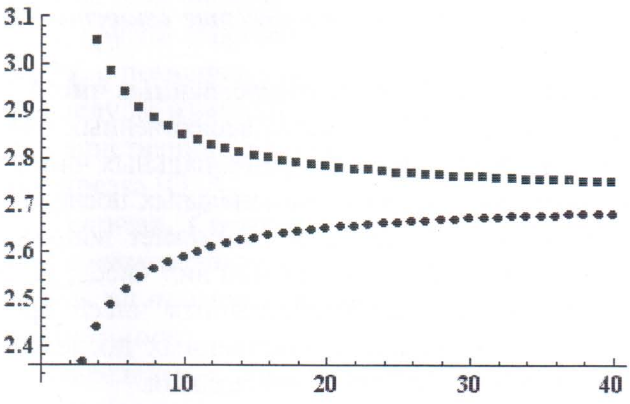

Рис. 1. Графики последовательностей, определяющих число *e*

Определение вещественных чисел по Евдоксу–Архимеду

На основе рассмотренных выше примеров конкретных вещественных чисел мы даем здесь общее определение вещественного числа. Для этого заметим, что наши прежние определения содержали конкретные пары рациональных последовательностей. Однако более внимательное рассмотрение принципов построения этих последовательностей обнаруживает определенный произвол, допущенный при их построении.

Например, определяя число 2, мы могли бы промежуток между числами 1 и 2 делить не на 10, а на 5 частей или на сто частей и т. д. Для числа *e* мы могли бы рассмотреть последовательности:

$$un = (1 + 1/n2)n2; \quad vn = (1 + 1/n2)n2 + 1.$$

Поэтому мы даем следующие определения.

Определение. ***Две рациональные последовательности называются эквивалентными, если их разность – бесконечно малая последовательность.***

Определение. ***Вещественное число α есть класс эквивалентности пар {{an}, {bn}} рациональных последовательностей таких, что:***

1. Последовательность {an} неубывающая, а последовательность {bn} невозрастающая.

2. Каждый элемент ak меньше или равен любому элементу bm.

3. Разность {bn – an} есть бесконечно малая последовательность.

Каждая пара {{*an*}, {*bn*}} называется представителем вещественного числа α. Пары рациональных последовательностей, удовлетворяющих последнему определению, назовем Архимедовыми парами.

Заметим, что если мы рассмотрим стационарную последовательность {*xn*}, т. е. последовательность, все элементы которой равны одному и тому же рациональному числу *r*, тогда пара {{*xn*},{*xn*}} – архимедова. Вещественное число α, среди представителей которого имеется рассматриваемая пара, естественно рассматривать как рациональное число *r*.

В частности, число 0 отождествляется с классом эквивалентности, одним из представителей которого является пара {{0},{0}} нулевых последовательностей.

Метод бисекций нахождения корней многочленов с рациональными коэффициентами порождает архимедовы пары рациональных последовательностей, представляющих алгебраические иррациональные числа, при условии, что начальный отрезок имеет рациональные концы.

Сравнение вещественных чисел

Пусть архимедова пара {{*an*}, {*bn*}} представляет вещественное число α, а пара {{*un*}, {*vn*}} – отличное от него число β.

Определение. ***Неравенство α > β выполняется тогда и только тогда, когда существует такое k, что ak > vk.***

Справедливость неравенства $\alpha > \beta$ не зависит от выбора представителей чисел α и β. Кроме того, ясно, что для любых двух различных чисел α и β либо $\alpha > \beta$, либо $\alpha < \beta$.

Из определения следует, что для любого k выполняются неравенства

$$ak < \alpha < bk. \qquad (3)$$

Десятичное представление вещественных чисел

Архимедова пара $\{\{an\}, \{bn\}\}$, представляющая число 2, удовлетворяет условию $bn - an = 0.1n$. Архимедова пара числа e такому условию не удовлетворяет. Мы утверждаем, что для любого числа α существует такой представитель, что разность элементов последовательностей архимедовой пары удовлетворяет только что рассмотренному условию. Последовательность $\{an\}$ этого представителя называется десятичным представлением числа α.

Заметим, что для любого рационального числа r существуют его *пол* $F(r)$ и *потолок* $C(r)$. Пол есть наибольшее целое число меньшее r, а потолок есть наименьшее целое число большее r.

Существование пола и потолка для иррациональных чисел следует из неравенств (3). Действительно, из (3) следуют неравенства

$$F(ak) < \alpha < C(bk).$$

Поэтому для вычисления наибольшего целого числа меньшего α мы должны сравнить с α конечное число целых чисел между $F(ak)$ и $C(bk)$.

Теорема. ***Пусть α иррациональное число. Тогда существует архимедова пара {{un}, {vn}}, представляющая α, такая что {un} и {vn} последовательности конечных десятичных дробей со следующими свойствами:***

1. Выполняются равенства vn- un = 0.1n.

2. Последовательность { un } неубывающая, а последовательность { vn} невозрастающая.

3. Для любого k выполняются неравенства uk < α < vk.

Более того,

$$un = F(10n - 1\alpha)10n - 1;$$
$$vn = C(10n - 1\alpha)10n - 1.$$

Арифметические операции с вещественными числами

Пусть архимедова пара $\{\{an\}, \{bn\}\}$ представляет вещественное число α, а пара $\{\{un\}, \{vn\}\}$ – число β.

Сложение. Архимедова пара $\{\{an + un\}, \{bn + vn\}\}$ представляет, по определению, сумму α + β.

Рассмотрим архимедову пару $\{\{-vn\}, \{-un\}\}$. Она, очевидно, представляет число –β, противоположное β.

Вычитание. Разность α + β есть сумма α + (–β).

Умножение. Архимедова пара $\{\{an\times un\}, \{bn\times vn\}\}$ представляет произведение α × β.

Рассмотрим архимедову пару $\{\{1/vn\}, \{1/un\}\}$, представляющую, очевидно, число 1/β обратное числу β.

Деление. Произведение α ×(1/β) есть частное чисел α и β.

Существование разности и наличие десятичного представления вещественных чисел влечет справедливость следующего утверждения.

Теорема. ***Множество рациональных чисел всюду плотно во множестве вещественных чисел.***

Полнота множества вещественных чисел

Мы получили множество вещественных чисел, пополняя множество рациональных чисел архимедовыми парами рациональных последовательностей. Естественно, возникает вопрос: можем ли мы получить новый вид чисел, пополняя множество вещественных чисел архимедовыми парами вещественных последовательностей? Ответ отрицательный.

В самом деле, рассмотрим класс ℵ архимедовых пар $\{\{\alpha n\}, \{\beta n\}\}$ вещественных последовательностей. С формальной точки зрения, класс ℵ есть новый математический объект, не совпадающий с вещественным числом. Однако в силу того, что классы эквивалентности новых объектов содержат архимедовы пары рациональных последовательностей, множество новых классов находится во взаимно однозначном соответствии с множеством R вещественных чисел.

Вещественная числовая ось

Рассмотрим направленную прямую L. Фиксируем произвольно точку O и отрезок $[a, b]$ на прямой L. Точка O называется началом, а отрезок $[a, b]$ масштабным отрезком. С помощью отрезка и стандартной процедуры евклидовой геометрии деления отрезка на любое число равных частей мы можем отметить за конечное число шагов на прямой L произвольное рациональное число p/q.

Однако аксиом Евклида недостаточно для того, чтобы отметить на L произвольное вещественное число. Необходимо пополнить систему аксиом Евклида новой аксиомой.

Аксиома Кантора. ***Любая вложенная система отрезков прямой, длины которых***

стремятся к нулю, имеет единственную общую точку.

С помощью аксиомы Кантора [3, с. 81] довольно просто сделать отметку на прямой L любого иррационального числа α. Для этого мы рассматриваем произвольный представитель $\{\{an\}, \{bn\}\}$ числа α и отметки рациональных точек an и bn. Эти отметки определяют отрезки, концами которых точки an и bn являются. Система построенных отрезков удовлетворяет аксиоме Кантора, и та единственная точка, о которой говорится в аксиоме, является отметкой числа α.

С другой стороны, любой точке А на прямой L с помощью стандартной теоретической процедуры измерения отрезков сопоставляется единственное вещественное число α – длина отрезка [О, А].

Теорема. ***Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек на прямой L и множеством вещественных чисел.***

Определение. ***Вещественной числовой осью называется множество всех точек на направленной прямой L.***

Так как множество R всех вещественных чисел полное, то и вещественная числовая ось также полна. Аксиому Кантора можно рассматривать как утверждение о полноте вещественной числовой оси.

Эта же аксиома одновременно постулирует бесконечную, т. е. непрерывающуюся, делимость отрезков прямой. Поэтому аксиому Кантора называют аксиомой полноты и непрерывности числовой оси.

Непрерывные функции

Традиционно определение функции непрерывной в данной точке α использует понятия левого и правого пределов функции в точке. А именно, если у функции существуют левый и правый пределы последовательностей значений функции и они совпадают между собой и со значением функции в точке α, то функция называется непрерывной в точке α.

Определение непрерывности функции в точке трудно назвать интуитивно очевидным. Ибо интуиция непрерывности понимает ее как отсутствие разрывов, дыр и т. п. Пример: сплошная среда, вода, вар, мед и т. д.

Известно, что существуют функции, непрерывные только в одной точке своей области определения, а в остальных точках разрывные. Но это не сопрягается с интуитивным пониманием непрерывности в только что приведенном смысле.

Другим источником интуитивного понимания непрерывности являются непрерывные во времени процессы, такие как ход часов или счет. Здесь слово непрерывность синонимично слову бесконечность, т. е. часы идут или счет производится без конца.

Определение непрерывности с помощью пределов ближе ко второму виду интуиции, так как последовательность значений функции бесконечно стремится к пределу, но может не достичь его.

Между тем можно дать прозрачное определение непрерывности функции в точке на основе архимедова подхода к определению вещественных чисел. Для этого вещественное число α следует понимать как класс эквивалентности архимедовых пар не только рациональных, но и всех вещественных последовательностей. Основанием к этому служит установленный ранее изоморфизм между классами архимедовых пар α рациональных последовательностей и классами архимедовых пар ℵ вещественных последовательностей.

Определение. Пусть $f(x)$ монотонная в некоторой окрестности точки ℵ функция. Функция $f(x)$ непрерывна в точке ℵ, если любая архимедова пара $\{\{\alpha n\}, \{\beta n\}\}$ из класса эквивалентности ℵ отображается в архимедову же пару $\{\{f(\alpha n)\}, \{f(\beta n)\}\}$ для монотонно возрастающих функций или в пару

$\{\{f(\beta n)\}, \{f(\alpha n)\}\}$ для монотонно убывающих функций, причем все такие пары входят в один и тот же класс эквивалентности ℷ, который представляет f(ℵ).

Требование монотонности возникло потому, что последовательности $\{\alpha n\}$ и $\{\beta n\}$ монотонные, и функция f(x) должна сохранять свойства монотонности последовательностей. Разумеется, требование монотонности функции является чересчур ограничительным, не позволяя воспользоваться данными нами определением в точках локального экстремума функций.

Список литературы

1. *Архимед*. Сочинения. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Дедекинд Р.* Непрерывность и иррациональные числа. 5-е изд. М.: Книжный дом «Либроком», 2009.
3. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. I. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2002.
4. Начала Евклида. М.; Л.: ГТТИ, 1949–1951.

References

1. *Arkhimed.* Sochineniya. M.: Fizmatgiz, 1962.
2. *Dedekind R.* Nepreryvnost' i irratsional'nye chisla. 5-e izd. M.: Knizhny dom «Librokom», 2009.
3. *Zorich V. A.* Matematicheskiy analiz. Ch. I. 4-e izd. M.: MTsNMO, 2002.
4. Nachala Evklida. M.; L.: GTTI, 1949–1951.