УДК 539.3

А. В. Михеев

РАСЧЕТ ЛОКАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА (1, k) НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Рассматривается вопрос расчета локальной устойчивости двухслойных оболочек, находящихся на упругом основании. Проанализирована зависимость параметра критической нагрузки от соотношения жесткости слоев и жесткости основания.

Двухслойные оболочки, расчет устойчивости

Введение. Конструкции, имеющие многослойную структуру, находят широкое применение в современной технике и строительстве. Слоистые составляющие этих конструкций обычно обладают различной жесткостью, теплопроводностью и т.д. Как теоретические исследования, так и практический опыт, демонстрируют их существенное преимущество при статических и динамических нагрузках. Значительное распространение получили оболочечные конструкции, состоящие из заполнителя и двух несущих слоев. Подробный обзор публикаций по этой тематике дан в монографии [1]. В книге [2] рассматривается теория оболочек различной формы, состоящих из произвольного числа слоев, как однородных, так и анизотропных. В статьях [3], [4] при рассмотрении теории многослойных оболочек рассматривается простейший подход, использующий гипотезу прямой нормали со сдвигом. В результате изучение многослойной оболочки сводится к рассмотрению эквивалентной ей трансверсально изотропной оболочки, упругие характеристики которой получаются из упругих характеристик слоев при помощи интегральных формул усреднения.

В данной работе рассматривается оболочка из двухслойного материала, жесткость одного из слоев которого в k раз больше жесткости другого, находящаяся на упругом основании жесткости ω. Анализируется зависимость критической нагрузки (т.е. минимальной величины нагружения, для которой снятие нагружения не приводит к возвращению оболочки в исходное состояние) от параметров k, ω.

Определение. Пусть L – оболочка, состоящая из двух изотропных слоев L_1, L_2 с модулями Юнга E_1, E_2 соответственно. Будем говорить, что оболочка L имеет тип $(1, k)$, если выполнено соотношение $E_2 = k \cdot E_1,\ k > 0$.

Постановка задачи. Дана двухслойная оболочка типа $(1, k)$ толщины h с упругими характеристиками слоев (E_1, ν_1) и (E_2, ν_2) и толщиной слоев равной $h/2$, находящаяся на основании с упругими характеристиками (E_0, ν_0). Требуется провести расчет зависимости параметра критической нагрузки Λ_* от соотношения жесткости слоев k и жесткости основания ω при различных видах нагружения, приведя результат в аналитической, графической и табличной формах.

Усреднение упругих характеристик слоев оболочки. Для вычисления упругих характеристик многослойной оболочки рассмотрим модель усреднения, приведенную в

[3]. Пусть h_j, $j=1,...,n$ - толщины слоев оболочки, (E_j, ν_j) - их упругие постоянные, $(E(z), \nu(z))$ кусочно-постоянные функции, задающие зависимость упругих характеристик оболочки от координаты z, ортогональной срединной поверхности, h- общая толщина оболочки. Положим, что:

$$K = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)dz}{1-\nu(z)^2},\ K_\nu = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)\nu(z)}{1-\nu(z)^2}dz,\ D = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E(z)z^2}{1-\upsilon(z)^2}dz \qquad (1)$$

Тогда упругие характеристики (E, ν) и модуль сдвига G' эквивалентной трансверсально изотропной оболочки выражаются следующим образом:

$$\nu = \frac{K_\nu}{K},\ E = \frac{K(1-\nu^2)}{h},\ \frac{h}{G'} = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{G_j},\ G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)} \qquad (2)$$

Формулы усреднения для двухслойной оболочки типа (1, k). В данном случае имеем:

$$h_1 = h_2 = \frac{h}{2},\ E_2 = kE_1 \qquad (3)$$

Из формул (1), (2), (3) получаем следующие значения упругих постоянных эквивалентной трансверсально изотропной оболочки:

$$K = \frac{E_1 h}{2}\left(\frac{1}{1-\nu_1^2} + \frac{k}{1-\nu_2^2}\right),\ K_\nu = \frac{E_1 h}{2}\left(\frac{\nu_1}{1-\nu_1^2} + \frac{k\nu_2}{1-\nu_2^2}\right), \qquad (4)$$

$$\nu = \frac{\nu_1(1-\nu_2^2) + k\nu_2(1-\nu_1^2)}{1-\nu_2^2 + k(1-\nu_1^2)},\ E = \frac{E_1(1-\nu^2)}{2}\left(\frac{1}{1-\nu_1^2} + \frac{k}{1-\nu_2^2}\right),\ G' = \frac{E_1}{1+\nu_1 + \frac{1+\nu_2}{k}}$$

Нахождение критической нагрузки для двухслойной оболочки типа (1, k). Следуя рассуждениям, аналогичным приведенным в [5], найдем явное выражение для функции нагружения:

$$\Lambda(k,\omega,s,\varphi) = \frac{U(k)}{f_T(\varphi)}\left(\frac{f_R(\varphi)}{s^2} + \frac{s^2}{A(k)s^2+1} + \frac{\omega}{s}\right) \qquad (5)$$

где ω - параметр жесткости основания, s, φ - волновые числа,

$$U(k) = \frac{1-\nu(k)^2}{2}\left(\frac{1}{1-\nu_1^2} + \frac{k}{1-\nu_2^2}\right),\ A(k) = \frac{h_*}{24}\left(\frac{1}{1-\nu_1^2} + \frac{k}{1-\nu_2^2}\right)\cdot\left(1+\nu_1+\frac{1+\nu_2}{k}\right)$$

(6)

$$f_R(\varphi) = (\rho_2 \cos^2\varphi + \rho_1 \sin^2\varphi)^2,\ f_T(\varphi) = t_1\cos^2\varphi + 2t_3\cos\varphi\sin\varphi + t_2\sin^2\varphi$$

h_* - безразмерная толщина оболочки, ρ_1, ρ_2 - безразмерные главные кривизны срединной поверхности, t_i, $i = 1..3$ - компоненты вектора безразмерных начальных усилий (см. [5]) . Параметр критической нагрузки Λ_* находится положительной минимизацией функции нагружения по волновым числам s, φ:

$$\Lambda_*(k,\omega) = \min_{s,\varphi>0} \Lambda(k,\omega,s,\varphi) \qquad (7)$$

Расчет зависимости критической нагрузки от соотношения жесткости слоев и жесткости основания. В качестве тестового образца рассмотрим сферическую двухслойную оболочку типа $(1, k)$ на упругом основании жесткости ω со следующими фиксированными характеристиками: $h_* = 0.01$, $\nu_1 = 0.30$, $\nu_2 = 0.45$. Тип нагружения – однородное сжатие: $(t_1, t_2, t_3) = (1, 1, 0)$. Согласно (6), в этом случае $f_R(\varphi) = f_T(\varphi) = 1$ и выражение (5) зависит только от волнового числа s. Проводя положительную минимизацию в (7), мы получаем значение параметра критической нагрузки Λ_* для различных значений k, ω. На рисунках 1 – 3 представлены графики зависимостей $\Lambda_*(k, \omega)$ при $\omega = 0...1$ и $k = 0.1...1$ (рис. 1), $k = 1...10$ (рис. 2) и $k = 10...100$ (рис. 3). Для выполнения численной минимизации и построения графиков использовался программный пакет Mathematica 5.0. Дополнительная информация о значениях $\Lambda_*(k, \omega)$ также дана в таблицах 1 – 3.

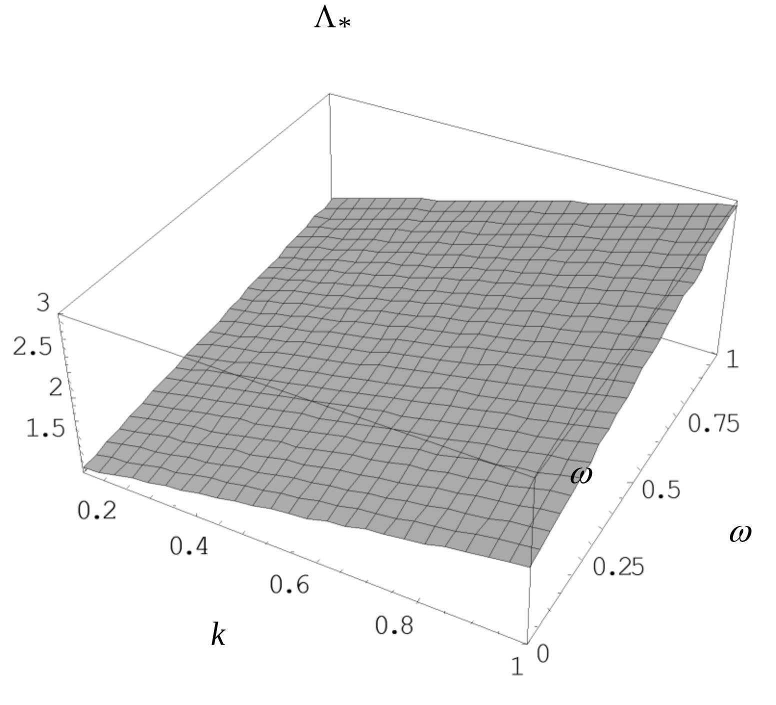

Рис.1

Таблица 1

k\ω	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.1	1.09	1.21	1.31	1.42	1.52	1.62
0.5	1.51	1.66	1.80	1.94	2.08	2.20
0.9	1.91	2.10	2.28	2.46	2.64	2.81

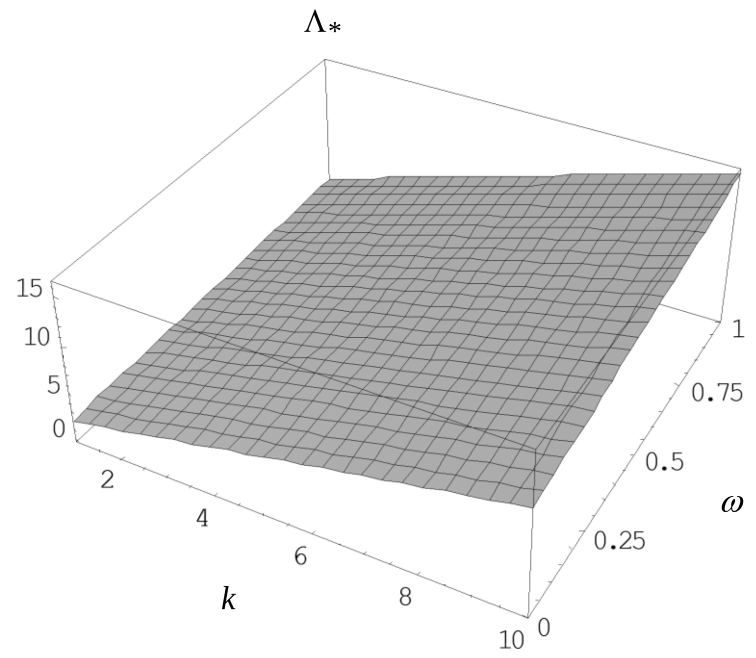

Рис.2

Таблица 2

k\ω	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1.0	2.01	2.21	2.40	2.59	2.78	2.96
5.0	6.00	6.60	7.18	7.74	8.30	8.84
9.0	9.98	10.97	11.93	12.87	13.79	14.70

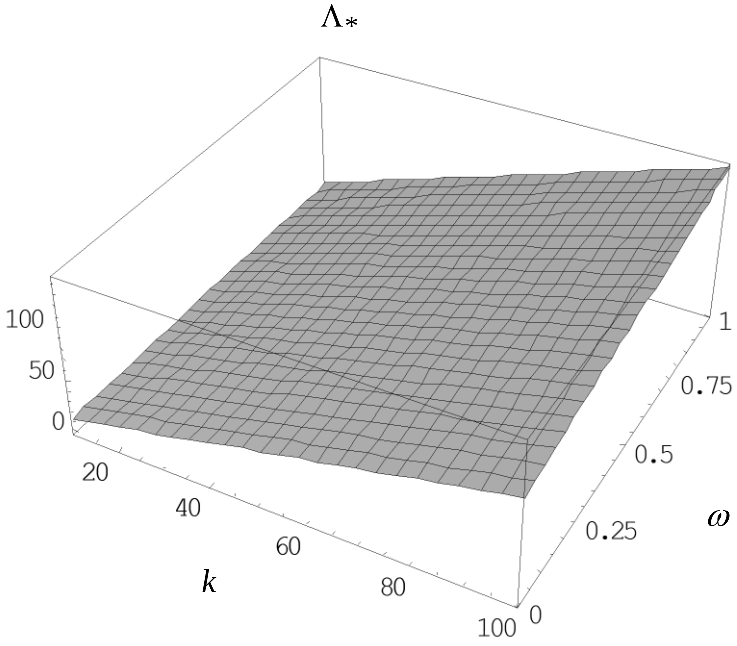

Рис.3

Таблица 3

k\ω	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
10.0	10.98	12.06	13.12	14.15	15.17	16.16
50.0	50.12	55.07	59.90	64.60	69.21	73.71
90.0	88.18	96.88	105.34	113.60	121.66	129.54

Случай отсутствия сдвига.. Рассмотрим случай потери устойчивости двухслойной сферической оболочки. в модели Кирхгофа-Лява, где поперечный сдвиг нормали не учитывается. Тогда $A(k)=0$ и мы получаем следующее аналитическое выражение для параметра критической нагрузки Λ_* и критического значения волнового числа s_* (см. [6]):

$$\Lambda_* = U(k)\left(2+\omega-\frac{\omega^2}{16}+o\left(\omega^2\right)\right) \tag{8}$$

$$s_* = 1+\frac{\omega}{8}-\frac{\omega^2}{128}+o(\omega^2)$$

Заключение. Как видно из приведенных выше результатов, зависимость параметра критической нагрузки Λ_* от соотношения жесткости слоев k и жесткости основания ω в рассматриваемых диапазонах носит характер, близкий к линейному. Однако при больших значениях k значительно усиливается влияние сдвига, что может привести к нарушению условий, при которых имет место линейная зависимость и выходит за пределы ситуации, описываемой данной моделью. Проведенные здесь расчеты могут быть полезны специалистам, изучающим упругие свойства материалов, физику твердого тела, а также математические модели физических процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.
3. Викторов И.В., Товстик П.Е. Влияние сдвига на устойчивость ортотропных цилиндрических оболочек при осевом сжатии// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2004. №4. с. 58–67.
4. Tovstik P.E., Tovstik T.P. On the 2D models of plates and shells including the transversal shear// ZAMM. 2007. Bd. 87. № 2. p. 160-171.
5. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих ортотропных оболочек на упругом основании// Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2007. №3. с. 137–143.
6. Михеев А.В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих оболочек на упругом основании// Асимптотические методы в механике деформируемого твердого тела. Сборник трудов, посвященных 70-летию проф. П.Е.Товстика. с. 87–97.

A. V. Mikheev

CALCULATION OF LOCAL STABILITY OF A TWO-LAYERED SHELL OF TYPE (1, K) ON AN ELASTIC BASE

The question of calculation of local stability of two-layered shells of type (1,k) on an elastic bases is considered. The dependence of critical load parameter on of the ratio of the stiffness and rigidity of the base layers is obtained.

Two-layered shells, calculation of stability