$$\vec{grad}\, p = -\mathrm{Re}[grad(v^2/2) - [\vec{\Omega} \times \vec{v}] - \vec{rot}\,\vec{\Omega}]. \tag{33}$$

Вычисляя div от левой и правой части (33), получим

$$\Delta p = f(r,\theta) = -\mathrm{Re}[\partial/\partial r(\partial v_\theta / r^2 \partial\theta + v_\theta / r^2) + \partial^2 v_\theta / r^3 \partial \theta^2]. \tag{34}$$

Далее, умножая (33) на вектор нормали к границам D, получим

$$\partial p/\partial n|_l = \varphi(r,\theta)|_l;\ \varphi(r,\theta) = \mathrm{Re}[-\partial/\partial n(v^2/2) + [\vec{\Omega} \times \vec{v}] + \Delta \bar{v}\bar{n}]. \tag{35}$$

Решая краевую задачу Неймана для уравнения Пуассона (34), (35), находим

$$p(m) = 1/(2\pi)\iint_D f(r_m,\theta)\ln(1/r_{mp})dS_p + 1/\pi \oint_{l_1} \ln(1/r_{mQ})\lambda_1(Q)dl_Q - 1/\pi \oint_{l_2} \ln(1/r_{mQ})\lambda_2(Q)dl_Q. \tag{36}$$

Для плотностей $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$ получаем интегральное уравнение

$$\pi\lambda_1(m) - \oint_{l_1} \partial/\partial n_m \ln(1/r_{mQ})\lambda_1(Q)dl_Q + \oint_{l_2} \partial/\partial n_m \ln(1/r_{mQ})\lambda_2(Q)dl_Q = -\pi\varphi(r,\theta)|_{l_1}; \tag{37}$$

$$\pi\lambda_2(m) - \oint_{l_1} \partial/\partial n_m \ln(1/r_{mQ})\lambda_1(Q)dl_Q + \oint_{l_2} \partial/\partial n_m \ln(1/r_{mQ})\lambda_2(Q)dl_Q = -\pi\varphi(r,\theta)|_{l_2}. \tag{38}$$

Интегральные уравнения (37), (38) отличаются только правыми частями, что объясняется различием знака перед криволинейными интегралами (36). Решение (37), (38) может быть сведено к решению СЛАУ относительно коэффициентов многочленов Фурье для $\lambda_1(m), \lambda_2(m)$ так же, как это было рассмотрено выше.

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе И.В.. Теоретическая гидромеханика. Часть II. ФМ. М.:ГИФМЛ, 1963.

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

Кузнецов В.В., Кузнецова Н.А.

Национальный исследовательский университет ВШЭ vkuznetsov@hse.ru

Данная работа посвящена анализу использования асимптотического метода Вентцеля-Крамерса-Бриллюэна для исследования вырождающегося дифференциального уравнения второго порядка, содержащего большой числовой параметр, получены асимптотические представления решений и их производных первого порядка.

Рассмотрим сильно вырождающееся обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\alpha^2(t)y''(t) - (-1)^j(b(t) + ikf(t)\alpha(t))y'(t) - k^2c(t)y(t) = 0,\ j = 0,1,\quad t \in (0,\delta), \tag{1}$$

содержащее большой числовой параметр $k \in R_1^+$. Предполагается, что коэффициенты уравнения удовлетворяют следующим условиям:

$$\alpha(t) \in C^4(0,\infty),\ b(t), f(t) \in C^3(0,\infty),\quad c(t) \in C^2(0,\infty),\ c(t) - 0.25f^2(t) > 0,\ b(t) = 1, \quad (2), (3)$$

$$\alpha(0) = \alpha'(0) = 0,\quad \alpha(t) > 0 \text{ при } t > 0;\quad \alpha(t) = \alpha_0 \text{ при } t \geq \delta > 0 \tag{4}$$

Предполагается также, что существуют $t_0 \in (0,\delta)$ и $N > 1$ такие, что

$$\alpha(t) \in C^{N+1}(0,t_0),\quad \alpha^{(N)}(0) \neq 0. \tag{5}$$

С целью доказательства возможности применения метода ВКБ к вырождающемуся однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (1) рассмотрим уравнение

$$z''(t) - Q(t)z(t) = 0,\quad t \in (a,b); \tag{6}$$

Будем предполагать, что функция $Q(t)$ удовлетворяет условиям:

$$Q(t) \in C^2((a,b)),\ Q(t) \neq 0 \text{ при } t \in (a,b); \tag{7}$$

$$Q^{\frac{1}{2}}(t) \in C^2((a,b)),\ \mathrm{Re}\,Q(t) \geq 0 \text{ при } t \in (a,b); \tag{8}$$

$$\rho(h_n,t) = \left|\int_{h_n}^{t} |\alpha_1(t)|dt\right| < \infty \text{ при } t \in (a,b), \tag{9}$$

где $\alpha_1(t) = \frac{1}{8} Q''_{tt}(t) Q^{-3/2}(t) - \frac{5}{32}(Q'(t))^2 Q^{-5/2}(t)$, $h_n = \begin{bmatrix} a, & n=1 \\ b, & n=2 \end{bmatrix}$.

При выполнении условий (7)-(9) и $t \in (a,b)$ уравнение (6) имеет два линейно независимых решения $z_1(t)$ и $z_2(t)$, для которых справедливы асимптотические представления [1] $z_n(t) = z_n^0(t)(1+\varepsilon_n(t))$, $n = 1,2$, где $z_n^0(t) = Q^{-1/4} \exp\left\{(-1)^{n+1} \int_{t_0}^{t} Q^{1/2}(\xi) d\xi\right\}$, $t_0 \in (a,b)$, $\varepsilon_n(t) \le 2(\exp\{2\rho(h_n,t)\}-1)$.

Замена независимой переменой $t \in (a,b)$ по формуле $\tau = \tau(t) = \int_b \alpha^{-1}(\rho) d\rho$, $\tau \in (-\infty, 0)$ приводит уравнение (1) к виду

$$x''(\tau) + (-1)^j \beta_j(\tau,k) x'(\tau) - k^2 c(\psi(\tau)) x(\tau) = 0, \quad j = 0,1, \tag{10}$$

где $t = \psi(\tau)$ функция обратная к монотонной функции $\tau = \tau(t)$, $x(\tau) = y(\psi(\tau))$

$$\beta_j(\tau,k) = \alpha^{-1}(\psi(\tau))[b(\psi(\tau)) + ikf(\psi(\tau))\alpha(\psi(\tau))] - (-1)^{-j} \alpha'(\psi(\tau)). \tag{11}$$

Замена искомой функции $x(\tau)$ по формуле

$x(\tau) = \exp\left\{(-1)^{j+1} 0.5 \int_0 \beta_j(\xi,k) d\xi\right\} z(\tau)$ приводит уравнение (10) к виду

$$z''(\tau) - Q_j(\tau,k) z(\tau) = 0, \quad \tau \in (-\infty,0), \quad j = 0,1, \qquad (12),$$

$$Q_j(\tau,k) = 0.25\beta_j^2(\tau,k) + k^2 c(\psi(\tau)) + (-1)^j 0.5 \beta'_{j\tau}(\tau). \tag{13}$$

Лемма. При выполнении условий (2)-(5) на коэффициенты уравнения (1) и $k \ge k_0 > 0$, k_0 – достаточно велико, функция $Q_j(\tau,k)$, $j = 0,1$, $\tau \in (-\infty,0)$, удовлетворяет требованиям (7)-(9).

Следствие. При выполнении условий (2)-(5), $\tau \in (-\infty,0)$ и $k \ge k_0 > 0$, k_0 достаточно велико, уравнение (10) имеет два линейно независимых решения $z_{1j}(\tau)$ и $z_{2j}(\tau)$, $j = 0,1$, для которых справедливы асимптотические представления

$$z_{nj}(\tau) = z_{nj}^0(\tau)(1 + \bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k)), \quad z'_{nj}(\tau) = z_{nj}^0(\tau,k)\left[(-1)^{n+1} Q_j^{0.5}(\tau,k) - 0.25 Q'_j(\tau,k) Q_j^{-1}(\tau,k)\right](1 + \varepsilon_{nj}^0(\tau,k)).$$

Для функции $\bar{\varepsilon}_{nj}(\tau,k)$ и $\varepsilon_{nj}^0(\tau,k)$, $n = 1,2$, $j = 0,1$, получены асимптотические представления и оценки.

Теорема. Пусть выполнены условия (2)-(5), тогда при $t \in (a,b)$ и $k \ge k_0 > 0$, k_0 – достаточно велико, уравнение (1) имеет два линейно независимых решения $y_{nj}(\mathrm{t})$, $n = 1,2$, $j = 0,1$, для которых справедливы следующие асимптотические представления

$$y_{nj}(t) = y_{nj}^0(t,k)(1 + \varepsilon_{nj}(t,k)), \quad y'_{nj}(t) = y_{nj}^0(t,k) P_{nj}(t,k)(1 + \varepsilon_{nj}^*(t,k))$$

где $y_{nj}^0(t,k) = Q_j^{-0.25}(\tau,k) \exp\left\{\int_0^\tau \left((-1)^{j+1} 0.5 \beta_j(\tilde{\tau},k) + (-1)^{n+1} \sqrt{Q_j(\tilde{\tau},k)}\right) d\tilde{\tau}\right\}$,

$P_{nj}(t,k) = \alpha^{-1}(t)\left[(-1)^{j+1} 0{,}5 \beta_j(\tau,k) + (-1)^{n+1} Q_j^{0.5}(\tau,k) - 0{,}25 Q_j^{-1}(\tau,k) Q'_j(\tau,k)\right]$, $\tau = \tau_s(t) = \int_b \alpha^{-1}(\rho) d\rho$, $\tau \in (-\infty,0)$.

Функции $\beta_j(\tau,k)$ и $Q_j(\tau,k)$ определены в (11) и (13) соответственно. Для функции $\varepsilon_{nj}(t,k)$ и $\varepsilon_{nj}^*(t,k)$, $n = 1,2$, $j = 0,1$, получены асимптотические представления и оценки.

---

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ДВУМЕРНОГО ТОРА

Габбасов Ф.Г.

Казанский государственный архитектурно-строительный университет gabbasov@ksaba.ru

В работе исследуются статистические свойства динамической системы, порожденной автоморфизмами двумерного тора.