International Scientific – Practical Conference «INNOVATIVE INFORMATION TECHNOLOGIES»

PART 2
INNOVATIVE INFORMATION TECHNOLOGIES IN SCIENCE

Prague – 2013
April 22-26

К 32.97
УДК 681.3; 681.5
И 64

И 64 Инновационные информационные технологии: Материалы международной научно-практической конференции. Том 2. / Гл. ред. С.У. Увайсов; Отв. ред. И.А. Иванов–М.:МИЭМ НИУ ВШЭ, 2013, 596 с.

I 64 Innovative Information Technologies: Materials of the International scientific – practical conference. Part 2. /Ed. Uvaysov S. U., Ivanov I. A. –M.: MIEM NRU HSE, 2013, 596 p.

ISSN 2303-9728

Представлены материалы второй международной научно-практической конференции, отражающие современное состояние инновационной деятельности в образовании, науке, промышленности и социально-экономической сфере с позиций внедрения новейших информационных технологий.

Представляет интерес для широкого круга научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов и специалистов в области инноватики и современных информационных технологий.

The materials of The Second International Scientific – Practical Conference is presented below. The Conference reflects the modern state of innovation in education, science, industry and social-economic sphere, from the standpoint of introducing new information technologies.

Digest of Conference materials is presented in 4 parts. It is interesting for a wide range of researchers, teachers, graduate students and professionals in the field of innovation and information technologies.

ББК 32.97

ISSN 2303-9728

О РАЗБИЕНИИ ЧИСЛА НА ФИКСИРОВАННОЕ КОЛИЧЕСТВО СЛАГАЕМЫХ ОГРАНИЧЕННОГО РАЗМЕРА

Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р.
МИЭМ НИУ ВШЭ

Предлагается два подхода к решению задачи определения количества делений числа на фиксированное число слагаемых ограниченного размера – это рекуррентный метод точного решения задачи и метод отбраковки при стохастическом моделировании близкой (сопровождающей) схемы для ее приближенного решения.

There are two approaches to solving the problem of determining the number of divisions of a fixed number of terms of limited size - this recursive method of exact solution of the problem and the method of culling the stochastic simulation close (accompanying) scheme for an approximate solution.

Постановка задачи и идеи ее решения.

Решается задача нахождения количества вариантов $N = N(r, n, l)$ делений числа r на n ненулевых слагаемых, каждое $\leq l$. Явная формула для определения числа N не найдена. Однако, для точного численного решения задачи построены рекуррентные соотношения, рекомендуемые при разных соответствиях между параметрами процесса. Идея такого решения состоит в построении рекуррентной процедуры последовательного понижения значения одного из параметров до уровня, когда число N известно, приводящей к соответствующему рекуррентному соотношению, по которому обратным пересчетом определяется искомое значение N.

Метод размещений.

Для наглядности переформулируем задачу в терминах размещений как нахождение числа размещений r неразличимых шаров по n различимым ящикам без пустых и в каждом $\leq$ l шаров при допускающих требуемое размещение параметрах.

В качестве рекуррентных процедур, например, по параметру l (до l = 2) предложены следующие:

а) принудительное размещение по одному шару во все ящики с после дующим докладыванием остальных шаров с учетом ограничений размещения;

б) заполнение ящиков шарами до допустимого максимума возможно большим числом шаров с последующим выбором (удалением) лишних шаров.

При процедуре а) наблюдается закономерность: число размещений r неразличимых шаров по n различимым ящикам, в каждом $\leq$ l шаров, совпадает с числом размещений $(r-n)$ неразличимых шаров по не более, чем n различимым ящикам, в каждом $\leq$ $(l - 1)$ шаров, что приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$N(r, n, l) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i N(r - n, i, l - 1). \quad (1)$$

При процедуре б) наблюдается закономерность: число размещений r неразличимых шаров по n различимым ящикам, в каждом $\leq l$, совпадает

с числом размещений $((l - 1)n - r)$ неразличимых шаров по не более, чем n различимым ящикам, в каждом $\leq$ $(l - 1)$ шаров, что приводит к следующему рекуррентному соотношению:

$$N(r, n, l) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i N((l - 1)n - r, i, l - 1). \quad (2)$$

Замечание. Рекуррентное соотношение (1) для меньших затрат времени на решение задачи рекомендуется использовать при значениях r, принадлежащих к первой половине допустимых значений в порядке их роста, а соотношение (2) – для остальных допустимых значений r.

Метод коэффициентов.

Другой численный метод точного нахождения числа N основан на наблюдении совпадения совокупности исходов требуемых размещений и слагаемых при формировании коэффициента при x^{r-n}в разложении по степеням x функции $\varphi_n(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{l-2})^n$. А с учетом вида основания степени n в $\phi_n(x)$, оказывается, что последовательные коэффициенты при степенях x в $\varphi(x)$ при росте k от 0 до n представляют таблицу значений (j – показатель степени x в $\phi_k(x) = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{l-2})^k$; $j = 0, k(l - 2)$) и связаны, например, при $j \leq l - 1$ рекуррентным соотношением:

$a_{k+1\,j+1} = a_{k\,j} + a_{k+1\,j}$. (3)

Рекурренты при других значениях j будут даны ниже.

Метод отбраковки.

При больших значениях параметров r, n, l вычисления по рекуррентам (1) – (3) достаточно трудоемки, поэтому в этом случае предлагается проводить приближенное вычисление N методом отбраковки по данным ограничениям при стохастическом моделировании наиболее близкой, легко реализуемой схемы с известным общим числом вариантов M.

Тогда из наблюденного отношения $p = N^*/M^*$, где M^* – число разных смоделированных размещений в близкой (сопровождающей) схеме, а N^* – число разных из M^* (с учетом ограничений) требуемых размещений, искомое число $N = N(r, n, l)$ приближенно находится из соотношения: $N \approx p \cdot M$.

В качестве такой близкой схемы предлагается рассматривать схему размещения r неразличимых шаров по n различимым ящикам без пустых ящиков с общим числом вариантов $M = C_{r-1}^{n-1}$

Аналогичным методом стохастического моделирования с отбраковкой может быть решена задача приближенного нахождения общего числа размещений r неразличимых шаров по n неразличимым ящикам и размещений без пустых ящиков (при $r \geq n$), где в качестве близких схем могут быть использованы соответствующие схемы размещения r неразличимых шаров по n различимым ящикам.

Для наглядности приведем детализацию описанных идей точного и приближенного решений задачи на примерах разбора отдельных алгоритмов.

Детализация точного решения задачи методом размещений. В качестве иллюстрации точного решения методом размещений проведем детальное обсуждение реализации рекуррентного метода, например, по описанной в п.1 процедуре б).

Итак, решается задача: сколькими способами $N = N(r, n, l)$ можно разместить r = r0 неразличимых шаров по $n = n_0$ без пустых и с уровнем заполнения каждого ящика менее, чем на l шаров?

Предполагается, что значения параметров r, n, l допускают возможность требуемого размещения, то есть должны удовлетворять условиям:

А) $r \geq n$ для возможности размещения r шаров по n ящикам без пустых ящиков;

Б) $r \leq n(l - 1)$ для возможности непривышения максимально допустимого уровня заполнения по $(l-1)$ шару в каждом ящике $(l>1)$.

Эти условия объединяются в одно:

$$n \leq r \leq n(l-1) \quad (1)$$

при $l>1$.

Идея решения задачи нахождения числа $N = N(r, n, l)$ состоит в построении процедуры размещения шаров по ящикам, описываемого соответствующим рекуррентным соотношением, пошагово и поединично понижающего допустимый уровень заполнения ящиков в исходной схеме размещения (далее числа шаров и ящиков будут меняться) и приводящего к известному или легко вычисляемому числу размещений.

Тогда при $l=2$ с последними вычисленными параметрами $r=r^*$ и $n=n^*$ имеем очевидные равенства:

$$N(r^*, n^*, 2) = 1 \quad (2)$$

при $r^* = n^*$ и

$$N(r^*, n^*, 2) = 0 \quad (2)$$

при $r^* \neq n^*$

Теперь в обратном порядке по рекуррентному соотношению можно вычислить искомое число $N(r_0, n_0, l) = N(r, n, l)$.

Таким образом, вычисления по данному методу сводятся к нахождению промежуточных значений параметров в рекуррентном соотношении и применению формулы (2).

Предлагается следующая процедура. На 1-ом шаге раскладываем во все ящики по $(l-1)$ шаров. На это потребуется $n_0(l-1)$ шаров, превышающих по количеству данное число $r=r_0$ на излишек $r_1 = n_0(l-1) - r_0$ шаров. (При $r_1 = 0$ это и будет требуемое размещение, и $N = 1$). Эти r_1 шаров нужно вынуть из n_0 ящиков, причем менее, чем по $(l-1)$ из каждого, то есть от 0 до $(l-2)$ шаров.

Таким образом, задача нахождения $N = N(r_0, n_0, l)$ сводится к нахождению числа вариантов размещения r_1 неразличимых шаров по новым n ящикам возможно с пустыми ящиками с менее, чем $(l-1)$ шарами в каждом ящике. Тогда вычитанием этого размещения из первоначального в каждом ящике мы будем получать требуемое размещение шаров по ящикам.

Обозначим через $N^*(r_1, n_0, l-1)$ – число размещений по новым ранее пустым n_0 ящикам, то есть размещений, возможно с пустыми ящиками и с менее, чем (l - 1) шарами в каждом ящике. В силу взаимно однозначного соответствия искомых размещений с описанным размещением по новым n_0 ящикам очевидно равенство: $N(r_0, n_0, l) = N^*(r_1, n_0, l-1)$, а так как число $N^*(r_1, n_0, l-1)$, можно интерпретировать как сумму чисел размещений r_1 шаров по любым n_1 из n_0 ящикам без пустых, где $n_1 = \overline{1, n_0}$, то получаем

$$N(r_0, n_0, l) = \sum_{n_1=1}^{n_0} C_{n_0}^{r_1} N(r_1, n_1, l-1) \quad (3)$$

То есть в результате первого шага удалось понизить уровень заполнения ящиков на единицу.

На втором шаге повторяем для вычисления $N(r_1, n_1, l-1)$ описанную процедуру с заменой r_0 на r_1, r_1 на r_2, l на l - 1, n_0 на n_1, n_1на n_2 и приходим к аналогичному (3) равенству:

$$N(r_1, n_1, l) = \sum_{n_2=1}^{n_1} C_{n_1}^{n_2} N(r_1, n_1, l-2).$$

Аналогично для j-го шага (0 ≤ j ≤ l - 2) имеем соотношение:

$$N(r_j, n_j, l-j) = \sum_{n_{j+1}=1}^{n_j} C_{n_j}^{n_{j+1}} N(r_{j+1}, n_{j+1}, l-j-1) \quad (4)$$

при

$r_{j+1} = n_j\,(l - j) - r_j$, j = $\overline{0, l-2}$ (5)

и назовем (4) и (5) основными формулами нашего рекуррентного метода нахождения числа N = $N(r_0, n_0, l)$

Для (l - 2)-го шага по (4) получаем равенство:

$N(r_{l-3}, n_{j-3}, 3) = \sum_{n_{l-2}=1}^{n_{l-3}} C_{n_{l-3}}^{n_{l-2}} N(r_{l-2}, n_{l-2}, 2)$,

в котором числа $N(r_{l-3}, n_{j-3}, 3)$ вычисляются по (2), откуда получаем:

$N(r_{l-3}, n_{j-3}, 3) = C_{n_{l-3}}^{n_{l-2}}$,

так как по (2) $N(r_{l-2}, n_{l-2}, 2)$ =1 только при $r_{l-2} = n_{l-2}$, а коэффициент при $N(r_{l-2}, n_{l-2}, 2)$ в (4) для $N(r_{l-3}, n_{j-3}, 3)$= есть $C_{n_{l-3}}^{n_{l-2}}$, который при $r_{l-2} = n_{l-2}$ и равен $C_{n_{l-3}}^{n_{l-2}}$.

Замечание 1. Описанная процедура понижения уровня заполнения ящиков шарами без пустых при указанном ограничении уровней заполнения ящиков с пересчетом параметров схемы (числа шаров и ящиков) до возможности получения численного значения левой части (4) может состоять из меньшего числа шагов, чем (l – 2), при некоторых частных соотношениях между параметрами, а именно:

$$N(r_j, n_j, l-j) \tag{7}$$

при r_{j+1}= 0 или по (5) при r_j= n_j (l – j – 1));

$$N(r_j, n_j, l-j) = C_{r_{j-1}}^{n_{j-1}} \tag{8}$$

при $r_j \le l - j + n_j - 2$;

$N(r_j, n_j, l - j) = C_{n_j + r_{j+1} - 1}^{r_{j+1}}$

при $r_{j+1} < l - j$ (или по (5) при $r_j > (n_j - 1)(l - j)$).

В указанных в (7) случаях при j = 0 имеем по (7) явные формулы для вычисления N.

Замечание 2. Для облегчения вычислений приведем некоторые свойства числа N(r, n, l):

N(r, n, l) = 1 (9)

при n = 1, r < l;

N(r, n, l) = 1 (10)

при r = n(l - 1);

N(r, n, l) = 1 (11)

при r = n;

(r, n, l) = 0 (12)

при r < n;

N(r, n, l) = 0 (13)

при r > n(l - 1), (при n = 1, r > l - 1);

N(r, n, l) = 0 (14)

при l = 1. Рассмотрим для иллюстрации метода числовой пример: r = r_0 = 8, n =n_0 = 3, l = 5. Найдем N = N(8, 3, 5) по (4).

1-ый шаг. Анализируем число N(8, 3, 5). l = 5; r_1 = 3 · 4 - 8 = 4; по (4)

N(8, 3, 5) = C_3^1 N(4, 1, 4) + C_3^3N(4, 2, 4) + C_3^2 N(4, 3, 4). (15)

2-ой шаг. Анализируем числа 1) N(4, 1, 4), 2) N(4, 2, 4), 3) N(4, 3, 4) в (15), l = 4;

1) r_2= 1 · 3 - 4 < 0, по (13)

N(4, 1, 4) = 0; (16)

2) r_2 = 2 · 3 - 4 = 2, по (4)

N(4, 2, 4) = C_2^1 (2, 1, 3) + C_2^2 N(2, 2, 3); (17)

N(4, 3, 4) =

C_3^1 N(5, 1, 3) + C_3^2N(5, 2, 3) + C_3^3 N(5, 3, 3). (18)

3-ий шаг. Анализируем числа 1) N(2, 1, 3), 2)N(2, 2, 3) в (17),

3) N(5, 1, 3), 4)N(5, 2, 3,), 5)N(5, 3, 3) в (18) l = 3;\

1) r_3 = 1 · 2 - 2 = 0, по (10)

N(2, 1, 3) = 0; (19)

2) r_3= 2 · 2 - 2 = 2, по (11)

N(2, 2, 3) = 1; (20)

3) r_3 = 1 · 2 - 5 < 0, по (13)

N(5, 1, 3) = 0; (21)

4) r_3 = 2 · 2 - 5 < 0, по (13)

N(5, 2, 3) = 0; (22)

5) r_3 = 3 · 2 - 5 = 1, по (4)

N(5, 3, 3) =C_3^1N(1, 1, 2) + C_3^2N(1, 2, 2) +C_3^3N(1, 3, 2). (23)

4-ый шаг. По (2) вычисляем числа 1) N(1, 1, 2), 2)N(1, 2, 2), 3)N(1, 3, 2) в (23), l = 3;

1)

N(1, 1, 2) = 1; (24)

2)

N(1, 2, 2) = 0; (25)

3)

N(1, 3, 2) = 0. (26)

Теперь обратным пересчетом находим искомое число N(8, 3, 5), проведя предварительно вычисления по формулам 1) (17), 2) (23) и 3) (18):

1) по (17) с учетом (19) и (20)

N(4, 2, 4) = 3; (27)

2) по (23) с учетом (24), (25), (26)

N(5, 3, 3) = 3; (28)

3) по (18) с учетом (21), (22), (28)

N(4, 3, 4) = 3. (29)

И окончательно по (15) с учетом (16), (27) и (29) вычисляем число N = N(8, 3, 5) = 3 · 0 + 3 · 3 + 1 · 3 = 12 – это искомое число вариантов.

Проверим полученный по рекуррентному методу размещений результат: N = 12 визуально представленным ручным перебором всех требуемых размещений – это варианты составов (4,3,1); (4,2,2) и (3,3,2), что с учетом различимости ящиков дает для состава (4,3,1) – 3! = 6 вариантов, для состава (4,2,2) – 3 варианта, для состава (3,3,2) – 3 варианта – всего 6+3+3=12 вариантов: (4,3,1), (4,1,3), (3,1,4), (3,4,1), (1,3,4), (1,4,3), (4,2,2), (2,4,2), (2,2,4), (3,3,2), (3,2,3), (2,3,3) (снова получаем 12 вариантов). N(r_0, n_0, l)

Для иллюстрации применения формулы (6) (на шаг раньше, не переходя к уровню < 2 на (l - 2)-м шаге) вычислим, например, число N(5, 3, 3), где r_{l-2} = 3 · 2 - 5 = 1. Тогда по (6) N($r_{l-3} = 5, n_{l-3} = 3$,3) =

$C_{n_{l-3}}^{r_{l-2}}$ = C_3^1 3, что совпадает с полученным выше результатом с

помощью формулы (2) на (l - 2)-м шаге.

Как видно из примера, вычисление числа N = N(r, n, l) при больших r, n, l технически трудоемко, поэтому рекомендуется программное применение предложенного алгоритма решения задачи с подстановкой данных значений параметров r, n, l в стандартную программу и с проверкой условий замечаний 1 и 2 для анализа числа необходимых шагов описанной процедуры, когда впервые имеем явные формулы для вычисления искомого числа N по (4) – основной формуле нашего рекуррентного метода размещений или по формуле (7) замечания 1.

3. Детализация точного решения задачи методом коэффициентов.

Как оказалось (см. [2]) задача нахождения числа N = N(r, n, l) сводится к определению коэффициента при x^{r-n} в многочлене φ_n(x) = (1 + x + x^2+ . . . + $x^{l-2})^n$. Для этого будем строить рекуррентную процедуру вычисления коэффициентов при всех степенях x в многочлене φ_n (x) = (1 + x + x^2 + . . . + $x^{l-2})^n$ (общей длиной L = k(l - 2) + 1) по мере роста показателя степени k от 1 до n, когда на каждом шаге будем умножать результат предыдущего шага на многочлен (1 + x + x^2 + . . . + x^{l-2}) с единичными коэффициентами при степенях x от 0 до l - 2. При этом проявляются закономерности, приводящие к ряду рекуррентных соот-ношений в разных диапазонах изменения j – показателя степени x в многочлене φ_k(x).

Пусть a_{kj} – коэффициент при x^j в многочлене k(x), k = 1, n; j = 0, (l - 2). Тогда имеем следующие рекуррентные соотношения для разных значений j:

а) j ≤ l - 1,

или

$$a_{kj} = a_{k-1\,j} + a_{k\,j-1};$$

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^{j} a_{kj};$$

б) l - 1 < j ≤l^*, где l^*= L/2, если L четно, или l^*= [L/2] + 1, если L нечетно, и [Z] – целая часть числа Z:

$a_{kj} = \sum_{i=j-(i-1)}^{j} a_{k-1}$

в) j > l^*

$a_{kj} = a_{k(i-1)j}$

то есть коэффициенты в φ_k(x), равноотстоящие от концов множества (a_{k0} , a_{k1}1, . . . , $a_{k(l-2)+1}$() совпадают.

Пример. n = 4; l - 2 = 3; φ_n(x) = $(1 + x + x^2 + x^3)^n$; φ_n(x) = $(1 + x + x^2 + x3)k$; k = 1, n = $1, 4$.

Вычисляем многочлены φ_1 (x), φ_2 (x), φ_1 (x), φ_k (x)по (1) – (3) и не-посредственно умножением:

k = 1) φ_1 (x) =1 + x + x^2 + x^3;

k = 2) φ_2 (x) =1 +2 x + $3x^2 + 4x^3 + 3x^4 + 2\,x^5 + x^6$;

k= 3) φ_3 (x) =1 + 3x + $6x^2$ +$10x^3 + 12x^4 + 12\,x^5 + 10x^6 + 6x^7 + 3\,x^8 + x^9$;

k = 4) φ_3(x) = 1 + 4x + $10x^2$ +

$$20x^3 + 31x^4 + 40\,x^5 + 44x^6 + 40x^7 + 31x^8 + 20x^9 + 10\,x^{10} + 4x^{11} + x^{12}$$

Детализация приближенного решения задачи.

Обсудим алгоритмизацию деталей приближенного вычисления искомого числа решений N = N(r, n, l) с использований стохастического моделирования.

Предлагается моделировать сопровождающую схему размещений r неразличимых шаров по n различимым ящикам без пустых ящиков с от-браковкой вариантов с превышением заданного уровня заполнения ящиков.

Этапы моделирования:

1) смоделировать схему сочетаний $C_{r-1}^{n-1}\,L$ раз;

2) перевести результаты 1) в размещение шаров по ящикам в сопровождающей схеме;

3) отбраковать повторяющиеся размещения в 2) (останется L_1 вариантов);

4) среди результатов 3) отбраковать результаты с превышением заданного

уровня заполнения хотя бы в одном ящике (останется L_2 вариантов);

5) приближенно вычислить искомое число N по формуле:

$N \approx \left(\frac{L_2}{L_1}\right) C_{r-1}^{n-1}$.

Алгоритмы выполнения этапов 1) и 2).

Алгоритм 1. Этап 1). (Моделирование схемы сочетаний.)

Шаги моделирования схемы сочетаний C_{r-1}^{n-1}:

а) генерируем (r - 1) случайных чисел: $\bar{R} = (R_1, \dots, R_{r-1})$;

б) строим из R вариационный ряд $\overline{R_{(\cdot)}} = (R_1, \dots, R_{(r-1)})$;

в) выписываем номера элементов $(R_1, \dots, R_{n-1})$ из $\bar{R}$ в векторе $\overline{R_{(\cdot)}}$ в порядке его просмотра – получаем возрастающую последовательность

Пример.r = 6; n = 4; r -1 = 5; n - 1 = 3; $\bar{R}$ = (0, 37; 0, 11; 0, 84; 0, 42; 0, 56); $\bar{R}_{(\cdot)}$= (0, 11; 0, 37; 0, 42; 0, 56; 0, 84). Тогда элементы (0,37;0,11;0,84) из R в порядке просмотра вектора R) занимают места $\bar{m}$ = (1, 2, 6) –это результат моделирования.

Алгоритм 2. Этап 2. (Перевод результата этапа 1 mв размещение шаров по ящикам в сопровождающей схеме.)

Заполнение n ящиков r шарами в указанной схеме без пустых ящиков в порядке их просмотра получается как разность между выбранными из множества (0, 1, . . . , r) элементами, если они не крайние, а для крайних: первого – это заполнение m1, последнего – это заполнение r - m_{n-1}

Пример 2. Пусть в Примере 1 результат первого этапа m = (1, 2, 6). Тогда заполнение ящиков есть (1,2-1,6-2,7-6)=(1,1,4,1).

Детализация приближенного нахождения чисел а) M0, M1 размещений r неразличимых шаров по n неразличимым ящикам а) без ограничений; б) без пустых ящиков при r ≥ n.

Этапы моделирования:

смоделировать схемы сочетаний для сопровождающих схем

а) C_{n+r-1}^{r}б)

C_{r-1}^{n-1}при r ≥ n L раз;

2) перевести результаты 1) в размещение r шаров по n ящикам в сопровождающих схемах;

3) провести маркировку результатов 2), то есть получить результаты заполнений ящиков в виде а) (s0, s1, . . . , sr) и б) (s1, s2, . . . , sr+n-1), где si – число ящиков, содержащих ровно i шаров i = $\overline{0, r}$;

4) отбраковать повторяющиеся результаты в 3) – останется L_1 вариантов;

5) приближенно вычислить искомые числа M_1и M_0 и по формулам:

$$M_0 \approx (L_1/L) C_{n+r-1}^{r};\ M_0 \approx (L_1/L) C_{r-1}^{n-1}$$

Алгоритмы выполнения этапа 2.

а) Алгоритм 3.

Требуется по результату этапа 1) m = (m1, . . . , mr) выписать заполнение n ящиков r шарами без ограничений с общим числом вариантов

C_{n+r-1}^{r} по алгоритму: в порядке просмотра последовательности m

1) подряд идущие невыбранные элементы с краю (от 1 до (n + r - 1)) заменить тем же числом нулей (пустых ящиков), а не с краю заменить тем же числом нулей, уменьшенным на единицу (пустых ящиков);

2) подряд идущие выбранные элементы (от 1 до (n + r - 1)) заменить их числом (заполнением ящика).

Пример 3. Пусть n = 4, r = 3 и получено m:

1. m = (2, 3, 5). Тогда n - r + 1 = 6, и получаем заполнение ящиков: (0,2,1,0);

2. m = (1, 3, 6). Тогда n + r - 1 = 6, и получаем заполнение ящиков: (1,1,0,1).

в) В случае б) см. Алгоритм 2 с общим числом вариантов C_{r-1}^{n-1}

Явная формула для $\boldsymbol{N(r,n,k)}$

$N(r,n,k)$ – число размещений r неразличимых частиц по n различимым ящикам без пустых.

Обозначим L_j – число непустых ящиков, когда в каждом ящике меньше j шаров. Положим

$$L_{j_*} \le L_j \le L_j^*$$

$$\sum_{i=j_1}^{j_2} a_i = 0 \text{ при } j_1 > j_2 \quad (*)$$

$$l=2)\ N(r,n,2) = \begin{cases} 1, r=n \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

$l=3)$ По всем ящикам размещаем по одному шару, а остальные r–n шаров размещаем по всем n ящикам (возможно с пустыми), в каждом <2 шаров, тогда:

$$N(r,n,3) = \begin{cases} C_n^{r-n}, n \le r \le 2n \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases}$$

$l=4)$ По всем ящикам размещаем по одному шару, а остальные r–n шаров размещаем по всем n ящикам (возможно с пустыми), в каждом <3 шаров, тогда:

$$N(r,n,4) = \begin{cases} \sum\limits_{L_2} C_n^{L_2} N(r-n, L_2, 3) = \sum\limits_{L_2} C_n^{L_2} C_{L_2}^{r-n-L_2}, n \le r \le 3n \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} L_{2_*} = \left[\dfrac{r-n}{2}\right] + \begin{cases} 0, r-n \vdots 2 \\ 1, \quad \text{в пр. случае} \end{cases} \\ L_2^* = \min(n, r-n) \end{cases}$$

$l=5)$ По всем ящикам размещаем по одному шару, а остальные r–n шаров размещаем по всем n ящикам (возможно с пустыми), в каждом <4 шаров, тогда:

$$N(r,n,5) = \begin{cases} \sum\limits_{L_3} C_n^{L_3} N(r-n, L_3, 4) = \sum\limits_{L_3}\sum\limits_{L_2} C_n^{L_3} C_{L_3}^{L_2} C_{L_2}^{r-n-L_2-L_3}, n \le r \le 4n \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} L_{3_*} = \left[\frac{r-n}{3}\right] + \begin{cases} 0, r-n \vdots 3 \\ 1, \quad \text{в пр. случае}; \end{cases} \\ L_3^* = \min(n, r-n) \end{cases} \quad \begin{cases} L_{2_*} = \left[\frac{r-n-L_3}{2}\right] + \begin{cases} 0, r-n-L_2 \vdots 2 \\ 1, \quad \text{в пр. случае} \end{cases} \\ L_2^* = \min(n, r-n-L_3) \end{cases}$$

$l=6)$ По всем ящикам размещаем по одному шару, а остальные r–n шаров размещаем по всем n ящикам (возможно с пустыми), в каждом <5 шаров, тогда:

$$N(r,n,6) = \begin{cases} \sum\limits_{L_4} C_n^{L_4} N(r-n, L_4, 5) = \sum\limits_{L_4}\sum\limits_{L_3}\sum\limits_{L_2} C_n^{L_4} C_{L_4}^{L_3} C_{L_3}^{L_2} C_{L_2}^{r-n-L_2-L_3-L_4}, n \le r \le 5n \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} L_4 = \left[\frac{r-n}{4}\right] + \begin{cases} 0, r-n \vdots 4 \\ 1, \quad \text{в пр. случае}; \end{cases} \\ L_4^* = \min(n, r-n) \end{cases} \quad \begin{cases} L_{3_*} = \left[\frac{r-n-L_4}{3}\right] + \begin{cases} 0, r-n-L_4 \vdots 3 \\ 1, \quad \text{в пр. случае} \end{cases} \\ L_3^* = \min(n, r-n-L_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_{2_*} = \left[\dfrac{r-n-L_3-L_4}{2}\right] + \begin{cases} 0, r-n-L_3-L_4 \vdots 2 \\ 1, \quad \text{в пр. случае} \end{cases} \\ L_2^* = \min(n, r-n-L_3-L_4) \end{cases}$$

$l=k)$ (Общий случай) По всем ящикам размещаем по одному шару, а остальные r–n размещаем шаров по всем n ящикам (возможно с пустыми), в каждом <(k-1) шаров, тогда

$$N(r,n,k) = \begin{cases} \sum\limits_{L_{k-2}}\sum\limits_{L_{k-3}} \cdots \sum\limits_{L_2} C_n^{L_{k-2}} C_{L_{k-2}}^{L_{k-3}} \cdots C_{L_2}^{L_3} C_{L_2}^{r-n-\sum_{i=2}^{k-2} L_i}, n \le r \le (k-1)n \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где, с учетом (*): $\begin{cases} L_{j.} = \left[\frac{r-n-\sum_{i=j+1}^{k-2} L_i}{j}\right] + \begin{cases} 0, r-n-\sum_{i=j+1}^{k-2} L_i \vdots j \\ 1, \text{в противном случае} \end{cases} \\ L_j^* = \min\left(n, r-n-\sum_{i=j+1}^{k-2} L_i\right. \end{cases}$

Литература

1. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Стохастическое моделирование, М., МИЭМ, 2009.

2. Виленкин Н.Я. Комбинаторика, М., Наука, 1969.

COMPLETE PULSE FEATURE EXTRACTION FOR RADAR SIGNALS BASED ON EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION AND HILBERT TRANSFORM

Sergei Shulga, Konstantin Biloshenko, Guo Qiang, Nan Pulong, Wan Jian

V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkov, Ukraine; College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, China

Abstract: A novel method for extracting complete pulse features of radar signals is presented. For the radar pulse sequences received by radar interception receiver, the Radio Frequency (CF) and Time of Arrival (TOA) of all pulses form a 2-dimensional information sequence. In complex and intensive electromagnetic environment, TOA of pulses distributes unevenly, randomly and nonstationary, for which to directly analyze such a time series is difficult. This work applies Gaussian noise insertion and structure function to the received complete pulse sequences respectively such that the equalization of time intervals and correlation processing are accomplished. The components with different frequency in the derived structure function series are separated using Empirical Mode Decomposition (EMD). And Hilbert transform and bandwidth detection are introduced to determine the signal to be measured and extract the changing feature of RF. Experimental results indicate that the proposed methodology is able to extract the slippage frequency of slippage signal effectively in the case that multiple radar pulse sequences overlap.

Keywords: Gaussian noise insertion; structure function; Empirical Mode Decomposition; feature extraction

1 Introduction

In complex and dense signal environment, radar signal sorting is the core technology of radar signal detection system. Traditional sorting technologies usually depend on feature parameters such as Time of Arrival (TOA), Radio Frequency (RF), Pulse Width (PW), Angle of Arrival (AOA), Pulse Amplitude (PA)[1][2]. However, with the rapid development of radar technology, the number of emitters increases dramatically. That results in the consequences that signals overlaps more severely, the modulation forms of signals become more complicated. Many new radar systems are simultaneously provided with slippage, transition and random agility of different parameters including RF, PW, Pulse Repetition Interval (PRI) and so on. And the between-class boundary of signals described by conventional feature parameters overlaps severely as well. Therefore, the radar signal sorting based on 5 traditional parameters is no more applicable in modern electronic battlefield.

Recent methods for extracting feature parameters of radar signals include atom decomposition[3][4], ambiguity function[5], phase difference[6] and non-ambiguity phase restoral[7]. Directing at the changing characteristics of instantaneous radar pulse parameters, this work exploits 2-dimensional feature information comprised of RF and TOA and presents an approach for extracting complete pulse feature of radar signals based on EMD and Hilbert