ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2010 Экономика Вып. 2(5)

УДК 517.9: 338.24

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ[1]

В.П. Максимов, д. ф.-м. наук, проф. кафедры информационных систем и математических методов в экономике
Д.А. Поносов, А.Л. Чадов, аспиранты кафедры информационных систем и математических методов в экономике
ГОУВПО «Пермский государственный университет», 614990. Пермь, ул. Букирева, 15
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru

Рассматриваются некоторые задачи экономико-математического моделирования, - задачи управления и задачи корректной разрешимости для динамических моделей в виде систем с запаздыванием, как для непрерывного, так и для дискретного времени. Для систем с непрерывным временем обсуждается влияние последействия в канале управления на общие затраты по целевому управлению системой. Для систем с дискретным временем рассматривается возможность коррекции противоречивых задач динамического планирования на основе подхода, предложенного для статических моделей акад. И.И. Ереминым.

Ключевые слова: экономико-математические модели, системы с последействием, задачи управления

1. Введение

Исследование задач управления конкретными социально-экономическими системами (регион, крупное предприятие, коммерческая структура, отрасль и т.п.) предполагает наличие специального модельного, математического и компьютерного инструментария. Подходы, использующие адекватные экономико-математические модели и современные методы их исследования (см., например, [1,2]), дают возможность найти пути и методы достижения целей, сбалансировать цели и средства их достижения.

Напомним необходимую для дальнейшего постановку классической задачи управления для системы с непрерывным временем. Для дифференциальной системы

$$(\mathcal{L}x)(t) \equiv \dot{x}(t) + A(t)x(t) = F(t)u(t) + f(t), \quad t \in [0,T]$$

требуется найти управление u, переводящее систему из заданного начального состояния $x(0)=\alpha$ в заданное конечное состояние $x(T)=\beta$. Задачам управления для обыкновенных дифференциальных систем и систем с запаздыванием посвящена обширная литература (см., например, [3] и приводимый там библиографический список). В экономической динамике возникает более общая задача управления, в которой цель управления задается системой линейных функционалов, а динамика описывается функционально-дифференциальными уравнениями [4].

Сначала мы приводим необходимые сведения из теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) и формулируем условия разрешимости общей задачи управления. На основе этих результатов предлагаются соотношения для оценки влияния запаздывания в канале

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, РФФИ №10-01-96054, и компании «Прогноз»

управления на величину ресурса управления, необходимого для решения поставленной задачи.

Для систем с дискретным временем рассматривается возможность коррекции противоречивых задач динамического планирования на основе подхода, предложенного для статистических моделей акад. И.И.Ереминым.

2. Предварительные сведения

Пусть D и B - банаховы пространства и D изоморфно прямому произведению $B\times R^n$.

Уравнение

$$\mathcal{L}x = f \qquad (1)$$

с линейным ограниченным оператором $\mathcal{L}: D\to B$ называется линейным абстрактным функционально-дифференциальным уравнением (АФДУ). Теория уравнения (1) систематически изложена в [1,2,5]. Зафиксируем изоморфизм $J=\{\Lambda, Y\}: B\times R^n \to D$ и обозначим через $J^{-1}=[\delta, r]$ обратный оператор. Здесь $\Lambda : B\to D, Y: R^n\to D$ и $\delta: D\to B,\ r: D\to R^n$ - соответствующие компоненты операторов J и J^{-1}:

$$J\{z,\alpha\} = \Lambda z + Y\alpha \in D,\ \ z\in B,\ \ \alpha\in R^n,$$

$$J^{-1}x=\{\delta x, rx\}\in B\times R^n,\quad x\in D.$$

Система

$$\delta x = z, \quad rx=\alpha \qquad (2)$$

называется главной краевой задачей. Таким образом, для любого $\{z,\alpha\}\in B\times R^n$

$$x=\Lambda z + Y\alpha \qquad (3)$$

является решением системы (2). Равенство (3) дает представление оператора $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}(\Lambda z + Y\alpha) = Qz + A\alpha,$$

где так называемая главная часть оператора $\mathcal{L}$, - оператор $Q: B\to B$ и конечномерный оператор $A: R^n\to B$ определены равенствами $Q=\mathcal{L}\Lambda$ и $A=\mathcal{L}Y$. В рамках общей теории уравнения (1) оператор Q предполагается фредгольмовым (представимым в виде суммы компактного и обратимого операторов).

Рассмотрим общую краевую задачу

$$\mathcal{L}x = f,\ \ \ell x = \beta \qquad (4)$$

с линейным ограниченным вектор-функционалом $\ell = [\ell_1,\ldots,\ell_N]: D\to R^N$. Краевая задача (4) как объект исследования находится в центре внимания общей теории АФДУ. В случае, когда $N=n$ и задача (4) однозначно разрешима для любого $\{f,\beta\}\in B\times R^n$, справедливо представление ее решения в виде

$$x = Gf + X\beta. \qquad (5)$$

Оператор $G: B\to D$ называется оператором Грина, оператор $X: R^n\to D$, – фундаментальным вектором. Пусть главная краевая задача

$$\mathcal{L}x = f,\ \ rx=\alpha \qquad (6)$$

однозначно разрешима. В таком случае, обозначая через G_r оператор Грина этой задачи, имеем представление

$$x = G_r f + X\alpha \qquad (7)$$

общего решения уравнения $\mathcal{L}x = f$, считая, что α – произвольный элемент пространства R^n. Из представления (7) следует, что однозначная разрешимость задачи (4) эквивалентна однозначной разрешимости алгебраической системы $\ell X\alpha = \beta - \ell G_r f$. Таким образом, краевая задача однозначно разрешима тогда и только тогда, когда обратима матрица ℓX.

Рассмотрим абстрактную задачу управления

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f,\ rx=\alpha,\ \ell x=\beta, \qquad (8)$$

где управление u принадлежит гильбертову пространству H, $\mathcal{F}: H\to B$ - линейный ограниченный оператор, $\ell=[\ell_1,\ldots,\ell_N]$ – целевой вектор-функционал, определяющий цель управления: $\ell x = \beta$. Приведем здесь теорему о разрешимости задачи (8).

Определим линейный ограниченный функционал $\lambda_i : H\to R,\ i=1,\ldots,N,$ равенством $\lambda_i u = \ell_i G_r \mathcal{F}u$. Очевидно, что можно представить этот функционал в виде скалярного произведения: $\lambda_i u = \langle \mu_i, u\rangle$, где $\mu_i\in H$ - элемент, порождающий $\lambda_i : H\to R$.

ТЕОРЕМА 1 ([6]). *Задача управления (8) разрешима для любых $f\in B,\ \alpha\in R^n, \beta\in R^N$ тогда и только тогда, когда обратима матрица*

$$M=\left\{\left\langle \mu_i, \mu_j\right\rangle\right\}_{i,j=1,\ldots,N}.$$

Управление $u_0 = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\mu_i$, *где*

$$col(\gamma_1,\ldots,\gamma_N) = M^{-1}[\beta - \ell G_r f - \ell X\alpha],$$

решает задачу (8).

В качестве основной реализации пространства D мы будем рассматривать пространство $D = AC$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$. В этом случае имеем: $x(t)=\int_0^t \dot{x}(s)ds + x(0), B = L$ –пространство суммируемых по Лебегу функций

$$z:[0,T]\to R^n, \| z \|_L = \int_0^T \| z(s) \|_{R^n} ds,$$

$$(\Lambda z)(t) = \int_0^t z(s)ds, Y = E, \delta x = \dot{x}, rx = x(0).$$

Здесь и всюду ниже E – единичная матрица. Изоморфизм между пространством AC и прямым произведением $L \times R^n$ играет основополагающую роль в теории функционально-дифференциальных уравнений и дает возможность сводить задачи в пространстве AC к задачам в пространстве L. Систематическое изложение теории краевых задач и задач управления в пространстве AC дано в [1].

Рассмотрим функционально-дифференциальную систему

$$(\mathcal{L}x)(t) = f(t), \quad t\in[0,T], \tag{9}$$

где $\mathcal{L}: AC \to L$ – линейный ограниченный оператор с главной частью вида

$$(Qz)(t) = z(t) - \int_0^t K(t,s)z(s)ds.$$

Здесь элементы $k^{ij}(t,s)$ ядра $K(t,s)$ измеримы на множестве $\{(t,s): 0\le s\le t\le T\}$ и таковы, что на этом множестве

$$|k^{ij}(t,s)| \le \kappa(t), i,j = 1,...,n,$$

где функция $\kappa(\cdot)$ суммируема на $[0,T]$. Заметим, что системы вида (9) охватывают многие классы динамических моделей, включая дифференциальные системы с сосредоточенным и/или распределенным запаздыванием и интегро-дифференциальные системы.

Пространство всех решений однородной системы $(\mathcal{L}x)(t) = 0, \quad t\in[0,T]$, имеет размерность n. Пусть $\{x_1,...,x_n\}$ – базис в этом пространстве. Матрица $X = \{x_1,...,x_n\}$ называется фундаментальной матрицей (будем для определенности считать, что $rX = E$). Главная краевая задача $\mathcal{L}x = f$, $rx \equiv x(0) = \alpha$ однозначно разрешима при любых $f\in L, \alpha\in R^n$, ее решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)\alpha + \int_0^t C(t,s)f(s)ds, \tag{10}$$

где $C(t,s)$ – матрица Коши.

Пусть $\ell: AC\to R^N$ – линейный ограниченный вектор-функционал. Имеет место представление $\ell x = \int_0^T \Phi(s)\dot{x}(s)ds + \Psi x(0)$, где элементы измеримой $N\times n$- матрицы Φ ограничены в существенном, а Ψ – $N\times n$ – матрица с вещественными элементами.

Рассмотрим задачу управления

$$\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f, \ x(0) = \alpha, \ \ell x = \beta. \tag{11}$$

Здесь $\mathcal{F}: L_2 \to L$ – линейный ограниченный оператор, L_2 – пространство суммируемых с квадратом функций $u:[0,T]\to R^r$, в котором скалярное произведение определено равенством $\langle u,v\rangle = \int_0^T u^{\perp}(t)v(t)\,dt$, где $\cdot^{\perp}$- символ транспонирования. В задаче (11) цель управления задается вектор-функционалом $\ell: AC\to R^N$, который на траектории системы $\mathcal{L}x = \mathcal{F}u + f$ под действием управления должен принимать заданное значение β. Критерий разрешимости такой задачи управления дает приводимая ниже теорема. Для ее формулировки введем обозначения:

$$\Theta(s) = \Phi(s) + \int_s^T \Phi(\xi)C'_{\xi}(\xi,s)d\xi,$$

$$W = \int_0^T [\mathcal{F}^*\Theta](s)[\mathcal{F}^*\Theta]^{\perp}(s)ds,$$

$\mathcal{F}^*: L^* \to L_2^*$ - оператор, сопряженный к $\mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 2 ([6]). *Задача управления* (11) *разрешима тогда и только тогда, когда линейная алгебраическая система*

$$W\cdot\gamma = \beta - \int_0^T \Theta(s)f(s)ds - \Psi\cdot\alpha \tag{12}$$

разрешима относительно N*-вектора* γ. *Каждое решение* γ_0 *системы (12) определяет управление, решающее задачу (11):*

$$u(t) = [\mathcal{F}^*\Theta]^{\perp}(t)\cdot\gamma_0. \tag{13}$$

3. Зависимость управляющей программы от запаздывания

Опишем зависимость управления и расходов на него (по норме пространства L_2) от запаздывания для случая классической задачи управления (перевод из начального состояния $x(0)=0$ в конечное состояние $x(T)=\beta$), считая запаздывание τ в цепи управления постоянным:

$$\mathcal{L}x=\mathcal{F}u;\ \ x(0)=0;\ x(T)=\beta, \qquad (14)$$

где $(\mathcal{F}u)(t)=F(t)(\mathcal{T}u)(t)$,

$$(\mathcal{T}u)(t)=\begin{cases} u(t-\tau),\ t\in[\tau,T], \\ 0,\ t\in[0,\tau]. \end{cases}$$

Для задачи (14) матрица $\Theta(s)=C(T,s)$, и для построения управления (13) остается найти сопряженный оператор $\mathcal{F}^*: L^* \to L_2^*$. Используя равенство

$$\int_\tau^T z^\perp(t)F(t)u(t-\tau)dt=\int_0^T \chi_{[0,T-\tau]}(s)[z^\perp(s+\tau)F(s+\tau)]u(s)ds,$$

получаем

$$(\mathcal{F}^*z)(s)=\chi_{[0,T-\tau]}(s)F^\perp(s+\tau)z(s+\tau).$$

Отсюда для «матрицы управления» $W=W(\tau)$ имеем представление

$$W=\int_0^T \chi^2_{[0,T-\tau]}(s)C(T,s+\tau)F(s+\tau)F^\perp(s+\tau)C^\perp(T,s+\tau)ds=$$
$$=\int_0^{T-\tau} C(T,s+\tau)F(s+\tau)F^\perp(s+\tau)C^\perp(T,s+\tau)ds.$$

Таким образом, задача (14) разрешима для всех таких $\tau\in[0,T]$, что $\det W(\tau)\neq 0$. Управляющая программа определяется равенством (13):

$$u_\tau(t)=\begin{cases} F^\perp(t+\tau)C^\perp(T,t+\tau)W^{-1}(\tau)\beta,\ \ t\in[0,T-\tau]; \\ 0,\ \ t\in(T-\tau,T]. \end{cases}$$

«Расходы на управление» $S(\tau)$, как функцию параметра τ, оцениваемые по норме пространства L_2, можно вычислить:

$$S(\tau)=\|u_\tau\|=\left\{\int_0^T u_\tau^\perp(t)u_\tau(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Очевидно, характер этой зависимости определяется конкретными особенностями системы управления, – матрицей Коши $C(t,s)$, матрицей $F(t)$ и целевыми значениями компонент требуемого финального состояния β.

4. Иллюстрирующий пример

Рассмотрим систему управления с запаздыванием по состоянию и по управлению

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t-1);$$
$$\dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t-\tau),\quad t\in[0,3];$$
$$x_1(0)=0;\ x_2(0)=0;\ x_1(3)=\beta_1;\ x_2(3)=\beta_2;$$
$$x_2(\xi)=0,\ u(\xi)=0,\ \textit{если}\ \xi<0.$$

Для этого случая имеем $F(t)=col(0,1)$, $r=1$, матрица Коши определяется равенством [7]

$$C(t,s)=\begin{pmatrix} 1 & \int_s^t \chi_{[1,3]}(\xi)\chi_{[0,\xi-1]}(s)\exp(1-\xi+s)d\xi \\ 0 & \exp(s-t) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя интеграл, определяющий элемент $c_{12}(t,s)$, для $J(s)=c_{12}(3,s)$ получаем

$$J(s)=\begin{cases} 1-e^{s-2},\ s\in[0,2], \\ 0,\ s\in(2,3]. \end{cases}$$

Отсюда $C(3,s)=\begin{pmatrix} 1 & J(s) \\ 0 & e^{s-3} \end{pmatrix}$,

$$W(\tau)=\int_0^{2-\tau}\begin{pmatrix} J^2(s+\tau) & J(s+\tau)e^{s+\tau-3} \\ J(s+\tau)e^{s+\tau-3} & e^{2(s+\tau-3)} \end{pmatrix}ds+$$
$$+\int_{2-\tau}^{3-\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{2(s+\tau-3)} \end{pmatrix}ds=$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\tau+2e^{\tau-2}-\frac{1}{2}e^{2(\tau-2)} & \frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{2\tau-5} \\ \frac{1}{2}e^{-1}+\frac{1}{2}e^{2\tau-5} & \frac{1}{2}[1-e^{2(\tau-3)}] \end{pmatrix},$$

$$u_\tau(t)=(0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ J(t+\tau) & e^{t+\tau-3} \end{pmatrix}W^{-1}(\tau)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Приведем точное описание $S^2(\tau)$ для $\beta_1=\beta_2=4$:

$$S^2(\tau)=18(-10+14\tau-20\tau e^{2\tau-6}+6e^{-2}-4e^{4\tau-10}-3e^{4\tau-12}-$$
$$-28e^{\tau-2}-9e^{2\tau-4}+2e^{-1}+16e^{2\tau-5}+6e^{2\tau-6}+4e^{\tau-5}-4e^{-1}\tau-$$
$$-22e^{4\tau-11}-2e^{-3}-2e^{4\tau-9}+8\tau e^{\tau-4}-e^{2\tau-8}-4e^{2\tau-4}\tau+4e^{3\tau-10}+$$
$$+8\tau e^{3\tau-9}-e^{4\tau-8}+16e^{\tau-2}\tau+4e^{3\tau-7}-4\tau^2+20e^{\tau-3}+8e^{3\tau-6}-$$
$$-8e^{\tau-3}\tau-12e^{\tau-4}+2e^{4\tau-12}\tau+2e^{4\tau-10}\tau+4e^{2\tau-7}\tau+4e^{4\tau-11}\tau-$$
$$-4e^{2\tau-5}\tau-12e^{3\tau-9}-8e^{2\tau-7}+28e^{3\tau-8}+4\tau^2e^{2\tau-6}-2e^{-2}\tau-$$
$$-8\tau e^{3\tau-8})/(-9+12\tau-32\tau e^{2\tau-6}+6e^{-2}+22e^{4\tau-10}-25e^{4\tau-12}-$$
$$-24e^{\tau-2}-10e^{2\tau-4}+28e^{2\tau-6}-e^{-4}-10e^{2\tau-8}-4\tau^2e^{4\tau-12}-$$
$$-4e^{2\tau-4}\tau-8e^{3\tau-10}-16e^{6\tau-16}-e^{4\tau-8}-40e^{5\tau-14}+16e^{\tau-2}\tau-$$
$$-4\tau^2+8e^{3\tau-6}+8e^{\tau-4}+20e^{4\tau-12}\tau+4e^{4\tau-10}\tau+4\tau e^{2\tau-8}+$$
$$+64e^{3\tau-8}+16\tau e^{5\tau-14}+8\tau^2e^{2\tau-6}-4e^{-2}\tau-8e^{5\tau-12}-32\tau e^{3\tau-8})$$

Вид зависимости $S(\tau)$ представлен на рис. 1.

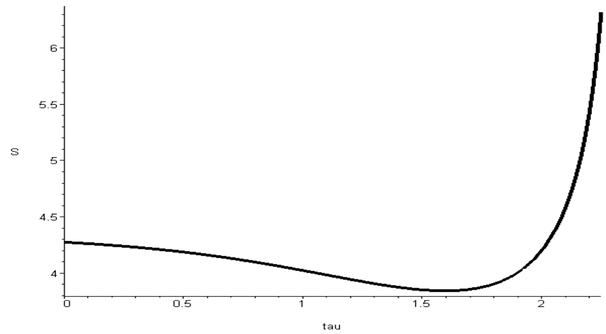

Рис. 1.

Заметим, что в точке $\tau_0 \in [2{,}390; 2{,}391]$ $\det W(\tau_0) = 0$ и задача управления решения не имеет.

5. Система с дискретным временем

При экономико-математическом моделировании динамические модели с дискретным временем часто возникают как результат эконометрического моделирования на базе реальной статистической информации.

Рассмотрим неавтономную систему

$$x(t+1) = \sum_{i=0}^{t} A(t,i)x(i) + f(t+1), \quad t = 0,\dots,T-1, \tag{15}$$

где $x(t) \in R^n, t = 0,\dots,T,\ \ A(t,i)$ - $n \times n-$матрицы.

Данная система, дополненная начальными условиями $x(0) = \alpha$, имеет единственное решение. В частном случае $A(t,i) = \mathcal{A}(i)\ \forall t$ коэффициенты системы (15) могут быть результатом стандартных процедур эконометрического моделирования.

В составе экономико-математической модели система (15) учитывает лишь динамические связи переменных, не включая в себя статические ограничения, такие, например, как балансовые ограничения.

Добавление в модель даже линейных статических ограничений вида:

$$Bx \le d, \tag{16}$$

где B - матрица размерности $m \times nT$, d - вектор-столбец размерности m, а $x = col\left(x^T(0), x^T(1), \dots, x^T(T)\right)$, может привести к тому, что система (15)-(16) окажется несовместной.

В этом случае возникает задача коррекции построенной модели. Систематическая теория таких задач изложена в [8,9]. Одной из причин корректировки может служить тот факт, что коэффициентами системы (15), построенной в результате эконометрического моделирования, являются не точные фактические коэффициенты, а их оценки, полученные по статистической информации. Поэтому задачу коррекции можно поставить в форме отыскания таких поправок h к данным коэффициентам, которые приведут к совместности системы (15)-(16) в целом. При этом имеет смысл следить за тем, чтобы измененные коэффициенты попали в доверительные интервалы, построенные для фактических значений коэффициентов модели по исходным оценкам.

Коррекцию ограничений (16) можно проводить также в виде введения штрафа за их нарушение.

Приведем систему (15) к виду, удобному для коррекции, - запишем ее в виде:

$$x = Px + F, \tag{17}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A(1,0) & A(1,1) & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A(T-1,0) & A(T-1,1) & \dots & A(T-1,T-1) & 0 \end{pmatrix},$$

$$F = col\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{n}, f^T(1),\dots,f^T(T)\Big).$$

Введя обозначение

$$K = \left(E_{n(T+1)} - P\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_n - E_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A(0,0) & E_n & 0 & 0 & 0 \\ -A(1,0) & -A(1,1) & E_n & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -A(T-1,0) & -A(T-1,1) & \dots & -A(T-1,T-1) & E_n \end{pmatrix},$$

запишем (17) в виде

$$Kx = F. \tag{18}$$

В результате приходим к системе (18),(16), для которой в качестве коррекции может быть применен метод параметризации, разработанный И.И. Ереминым и А.А. Ватолиным [8,9]. Параметризованная система, соответствующая системе (18),(16), запишется в следующем виде:

$$\begin{cases} (K + H_1)x = F - p_1 \\ (B + H_2)x \le d - p_2 \end{cases}, \tag{19}$$

где $H_1 = \left\{h_{ji}\right\}_{nT,nT}$,

$p_1 = col\left(h_{1,nT+1},\dots,h_{nT,nT+1}\right)$,

$H_2 = \{h_{ji}\}, j = nT+1,\dots,nT+m, i = 1,\dots,nT,$

$p_2 = col\left(h_{nT+1,nT+1},\dots,h_{nT+m,nT+1}\right).$

Количество параметров системы (19) составит $(nT+m)(nT+1)$. Так как для системы (16) коэффициенты матрицы B строго определены, коррекцию, как уже говорилось выше, можно проводить лишь в форме штрафов за отклонения от выполнения ограничений, т.е. корректируя параметры p_2, при этом матрица H_2 будет нулевой. В силу специфического вида матрицы K число параметров будет совпадать с общим числом элементов матриц $A(t,i)$. Таким образом, вектор параметров h рассматриваемой модели будет иметь размерность $m + \frac{(T+1)T}{2}n^2$.

Для системы (19) ставится следующая задача аппроксимации:

$\inf\{\Phi(h) \mid h \in M \cap S\}$, где S - допустимое множество параметров, M - множество параметров, для которых параметризованная система (19) имеет решение, $\Phi(h)$ - функция качества аппроксимации. Решение этой задачи дает оптимальный с точки зрения критерия $\Phi(h)$ вектор коррекции h.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Азбелев Н.В.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н.В. Азбелев, В.П. Максимов, Л.Ф. Рахматуллина. М.: Наука, 1991.
2. *Azbelev N.V.* Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications / Azbelev N.V.; Maksimov V.P.; Rakhmatullina L.F. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2007.
3. *Андреева Е.А.* Управление системами с последействием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет. М.: Наука, 1992.
4. *Максимов В.П.* Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование / В.П. Максимов, А.Н. Румянцев // Известия вузов. Математика. 1993. № 5. С. 56-71.
5. *Azbelev N.V.* Theory of linear abstract functional differential equations and applications / Azbelev N.V. ; Rakhmatullina L.F. // Memoirs on Diff. Equations and Math. Phys. 1996.v. 8. P. 1-102.
6. *Maksimov V.P.* Theory of functional differential equations and some problems in economic dynamics // Proceedings of the Conference on Differential and Difference Equations and Applications. New York: Hindawi Publishing Corporation. 2006. P. 74-82.
7. *Maksimov V.P.* On the property of controllability with respect to a family of linear functionals // Functional Differential Equations. 2009. v. 16 (dedicated to the memory of Michael Drakhlin), № 3. P. 517-527.
8. *Еремин И.И.* Противоречивые модели оптимального планирования. М.: Наука, 1988.
9. *Ватолин А.А.* О симметрической аппроксимации несобственных задач линейного программирования // Несобственные задачи оптимизации. Свердловск, 1982. С. 67-74.