PACS 02.50.Fz, 02.50.Tt

© 2010 г. В. Б. Горяинов, канд. физ.-мат. наук
(Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана),
Е. Р. Горяинова, канд. физ.-мат. наук
(Московский авиационный институт (технический университет))

НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МОДЕЛИ АВТОРЕГРЕССИИ В УСЛОВИЯХ АПРИОРНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Для процесса пространственной авторегрессии порядка $(1,1)$ построены локально наиболее мощные знаковые критерии для проверки гипотез о коэффициентах авторегрессионного уравнения в условиях, когда распределение инновационного процесса неизвестно. Статистики критериев являются свободными от распределения, доказана их асимптотическая нормальность. На основе статистик знаковых критериев предложен алгоритм построения точечных оценок коэффициентов уравнения авторегрессии. Предположения об инновационной последовательности авторегрессии достаточно слабые и не требуют конечности дисперсии или четности плотности. Все методы устойчивы к "выбросам" в наблюдениях.

1. Введение

В работе изучаются процессы пространственной авторегрессии — стационарные поля X_{ij} на прямоугольной целочисленной плоской решетке, описываемые рекуррентным соотношением

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \qquad i,j = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \tag{1}$$

где $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — регрессионные коэффициенты, а ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием $\mathsf{E}\varepsilon_{ij} = 0$.

Процессы пространственной авторегрессии используются в теории распознавания изображений, экономике, геологии, географии, биологии, сельском хозяйстве и т. д. [1]. В основе традиционных методов исследования уравнения (1) лежат принципы максимального правдоподобия и наименьших квадратов (см. [2,3] и библиографию к ним). Они позволили получить важные результаты в предположении, что ошибки ε_{ij} распределены по нормальному закону. Однако на практике предположения о нормальности выполняются не всегда, и в этих случаях выводы, основанные на традиционных методах, могут быть ошибочными. В частности, эти методы чуствительны к засорению выборки резко выделяющимися наблюдениями. Возникает необходимость построения непараметрических методов, ориентированных на широкий класс распределений ε_{ij}.

Одним из таких методов является знаковый метод, появившийся еще в 18 веке и хорошо зарекомендовавший себя в последние десятилетия [4]. Знаковый метод использует не сами наблюдения X_{ij}, а только их знаки и основан на предположении о том, что функция распределения $F(x)$ ошибок ε_{ij} должна удовлетворять условию $F(0) = \dfrac{1}{2}$.

В данной работе получены знаковые критерии проверки гипотез о коэффициентах уравнения (1), предложен метод построения точечных оценок этих коэффициентов. Показано, что распределение статистик построенных знаковых критериев не зависит от распределения ошибок ε_{ij} и асимптотически нормально даже при бесконечной дисперсии ε_{ij}. Распределение статистик не изменится и в том случае, если ε_{ij} не будут одинаково распределенными — нужно лишь выполнение условия $F_{ij}(0) = \dfrac{1}{2}$ для функции распределения $F_{ij}(x)$ величин ε_{ij}.

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс (1), где ε_{ij} — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $F(x)$, $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров. Достаточные условия стационарности поля (1) приведены в [2, 5].

Пусть $a^0 = (a^0_{10}, a^0_{01}, a^0_{11})$ — некоторый известный вектор. Рассмотрим задачу проверки гипотезы

$$H^0 : a = a^0 \tag{2}$$

против односторонних альтернатив

$$H^+_{pq} \text{ и } H^-_{pq}, \qquad (p, q) \in \mathcal{I} = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\},$$

вида

$$H^+_{pq} \quad : \quad a_{pq} > a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q), \tag{3}$$

$$H^-_{pq} \quad : \quad a_{pq} < a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q), \tag{4}$$

и двустороних альтернатив

$$H_{pq} \quad : \quad a_{pq} \neq a^0_{pq},\ a_{kl} = a^0_{kl} \text{ для любых } (k, l) \neq (p, q). \tag{5}$$

Пусть $X_{ij}, i = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, n$ — наблюдаемая реализация поля (1).

Обозначим

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Перейдем от наблюдений X_{ij} к их знакам, точнее, к величинам

$$S_{ij}(a) = \operatorname{sign}(X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}), \quad i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

На основе информации только об $S_{ij}(a)$ требуется построить оптимальные критерии проверки гипотез о параметре a, а затем на основе предложенных критериев — точечные оценки для параметра a. Оптимальность критериев будем понимать в следующем смысле.

Обозначим через Q критическую область знакового критерия, т.е. такое подмножество матриц s размера $m \times n$ с элементами из -1 и 1, что если матрица $S(a^0)$ принадлежит Q, то гипотеза H^0 отклоняется. Через $P_{mn}(Q, a)$ обозначим функцию мощности знакового критерия, определяемую как вероятность отклонения гипотезы H^0, когда H^0 не верна:

$$P_{mn}(Q, a) = \mathsf{P}\{S(a^0) \in Q | \text{ верна альтернатива } a\}.$$

Пусть $P_{mn}(Q, a)$ дифференцируема в точке a^0. Определим локально наиболее мощный (ЛНМ) знаковый критерий для проверки гипотезы H^0 против односторонней альтернативы H^+_{pq}, $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий функцию мощности $P_{mn}(Q, a)$, наиболее круто возрастающую по переменной a_{pq} в правосторонней окрестности точки a^0_{pq}. Это означает, что критическая область Q ЛНМ знакового критерия должна быть выбрана так, чтобы величина $\dfrac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$ была максимальна. Совершенно аналогично определим ЛНМ знаковый критерий для проверки гипотезы H^0 против односторонней альтернативы H^-_{pq}, $(p, q) \in \mathcal{I}$, как критерий, имеющий минимальное значение $\dfrac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}$ при $a = a^0$.

3. Локально наиболее мощные критерии

Начнем с построения ЛНМ знакового критерия для проверки гипотезы H^0 против альтернативы H^+_{pq}, $(p, q) \in \mathcal{I}$. Так как

$$P_{mn}(Q, a) = \sum_{s \in Q} P_{mn}(s, a), \tag{6}$$

где $P_{mn}(s, a) = P\{S(a^0) = s | \text{ верна альтернатива } a\}$, то $\left.\dfrac{\partial P_{mn}(Q, a)}{\partial a_{pq}}\right|_{a=a^0}$ будет наибольшей, если в критическую область Q будут последовательно, вплоть до достижения заданного уровня значимости, включаться матрицы s, имеющие наибольшие значения $\dfrac{\partial P_{mn}(s, a)}{\partial a_{pq}}$ в точке $a = a^0$. Поэтому искомая критическая область Q будет равна

$$Q = \left\{ s : \left.\frac{\partial P_{mn}(s, a)}{\partial a_{pq}}\right|_{a=a^0} > C \right\},$$

где постоянная C определяется уровнем значимости α критерия, т.е. находится из условия $\mathsf{P}\{S(a^0) \in Q\} = \alpha$ при гипотезе H^0.

Определим множество $\{\delta_{ij}(a)\}$ рекуррентным соотношением

$$\delta_{ij}(a) = a_{10}\delta_{i-1,j}(a) + a_{01}\delta_{i,j-1}(a) + a_{11}\delta_{i-1,j-1}(a), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

с граничными условиями

$$\delta_{00}(a) = 1, \quad \delta_{k0}(a) = (a_{10})^k, \quad k > 0, \quad \delta_{0l}(a) = (a_{01})^l, \quad l > 0. \tag{8}$$

Для построения ЛНМ знакового критерия нужно знать поведение функции мощности, а значит, и $P_{mn}(s,a)$ в окрестности a^0.

Теорема 1. Пусть

$$1 - a^0_{10}z_1 - a^0_{01}z_2 - a^0_{11}z_1z_2 \neq 0, \quad |z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1, \tag{9}$$

а функция распределения $F(x)$ случайных величин ε_{ij} удовлетворяет условиям

$$F(0) = \frac{1}{2}, \quad F'(0) > 0; \tag{10}$$

$$\mathsf{E}(\varepsilon_{11}) = 0; \tag{11}$$

$$\mathsf{E}[|F'(\theta u X_{11}) - F'(0)||X_{11}|] \to 0 \text{ при } u \to 0 \text{ для любого } \theta \in (0,1). \tag{12}$$

Тогда для любых $(p,q) \in \mathcal{I}$ при альтернативах H^+_{pq}, H^-_{pq}

$$P_{mn}(s,a) = \frac{1}{2^{mn}}\Big(1 + Kw_{pq}(a_{pq} - a^0_{pq})\Big) + o(|a_{pq} - a^0_{pq}|), \quad a_{pq} \to a^0_{pq}, \tag{13}$$

где

$$w_{pq} = \sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\delta_{ij}(a^0)\sum_{k=i+p+1}^{m}\sum_{l=j+q+1}^{n} s_{kl}s_{k-i-p,l-j-q},$$

$$K = -4F'(0)\int_{-\infty}^{0} tF'(t)\,dt.$$

Доказательство теоремы 1 приведено в Приложении.

Заметим, что условиям (11)–(12) на распределение ошибок ε_{ij} удовлетворяют все основные симметричные распределения.

Отметим также, что условие (12) выполнено, если существуют такие $r \in (0,1]$ и $L > 0$, что

$$\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} < \infty, \quad |F'(t) - F'(0)| \leqslant L|t|^r \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Действительно, в этом случае для некоторой постоянной $\tilde{L} > 0$

$$\mathsf{E}[|F'(\theta u X_{11}) - F'(0)||X_{11}|] \leqslant \mathsf{E}L|\theta u X_{11}|^r|X_{11}| \leqslant \tilde{L}|u|\mathsf{E}|\varepsilon_{11}|^{1+r} \to 0 \text{ при } u \to 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что теорема 1 может быть справедлива для поля X_{ij} с бесконечной дисперсией.

Обозначим

$$Z_{ij}(a) = \sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} S_{kl}(a)S_{k-i,l-j}(a), \qquad i = 0,1,\dots,m, \quad j = 0,1,\dots,n,$$

$$W_{pq}(a) = \sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\delta_{ij}(a)Z_{i+p,j+q}(a), \qquad (p,q) \in \mathcal{I}.$$

Для краткости обозначим $S_{kl} = S_{kl}(a^0)$, $Z_{ij} = Z_{ij}(a^0)$, $W_{pq} = W_{pq}(a^0)$.

Из теоремы 1 с учетом того, что $K > 0$, вытекают следующие теоремы, определяющие вид ЛНМ критериев.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (9)–(12). Тогда ЛНМ знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H_{pq}^+, если

$$W_{pq} > C_{pq}^+, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{14}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C_{pq}^+ определяется уровнем значимости α критерия.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (9)–(12). Тогда ЛНМ знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H_{pq}^-, если

$$W_{pq} < C_{pq}^-, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{15}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C_{pq}^- определяется уровнем значимости α критерия.

Теоремы 2 и 3 позволяют естественным образом определить знаковый критерий для проверки H^0 против двусторонней альтернативы H_{pq}, $(p,q) \in \mathcal{I}$, на уровне значимости α как объединение двух односторонних критериев, проверяющих на уровне значимости $\alpha/2$ альтернативы $H_{pq}^+ : a_{pq} > a_{pq}^0$ и $H_{pq}^- : a_{pq} < a_{pq}^0$, $(p,q) \in \mathcal{I}$. Тогда при выполнении условий (9)–(12) гипотеза H^0 отклоняется в пользу H_{pq}^-, если

$$|W_{pq}| > C_{pq}, \quad (p,q) \in \mathcal{I}, \tag{16}$$

и принимается в противном случае. Постоянная C_{pq} определяется уровнем значимости α критерия.

Таким образом, для практического применения критериев (14)–(16) нужно знать распределение статистик W_{pq} при гипотезе H^0.

4. Распределение статистик ЛНМ критериев при конечном объеме выборки

Непосредственной проверкой устанавливается, что при гипотезе H_0 случайные величины

$$S_{kl}S_{k-i,l-j}, \qquad k = i+1, i+2, \ldots, m, \quad l = j+1, j+2, \ldots, n$$

при условии $F(0) = \dfrac{1}{2}$ независимы и

$$\mathsf{P}\{S_{kl}S_{k-i,l-j} = 1\} = \mathsf{P}\{S_{kl}S_{k-i,l-j} = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}S_{kl}S_{k-i,l-j} = 0, \qquad \mathsf{D}S_{kl}S_{k-i,l-j} = 1$$

и, следовательно,

$$\mathsf{E}Z_{ij} = 0, \qquad \mathsf{D}Z_{ij} = (m-i)(n-j).$$

Таким образом, случайная величина $\dfrac{1}{2}(1 + S_{kl}S_{k-i,l-j})$ при H^0 имеет распределение Бернулли с параметром $\dfrac{1}{2}$, а случайная величина

$$\frac{1}{2}Z_{ij} + \frac{(m-i)(n-j)}{2} \quad —$$

биномиальное распределение с параметрами $\dfrac{(m-i)(n-j)}{2}$ и $\dfrac{1}{2}$. Распределение случайной величины W_{pq} зависит от a^0, но его квантили можно оценить методом статистических испытаний. В частном случае, когда $a^0=0$, т.е. гипотеза H^0 означает независимость наблюдений X_{ij}, статистика W_{pq} совпадает с Z_{pq}. Поэтому вычисление квантилей W_{pq} сводится к нахождению квантилей биномиального распределения и может быть произведено точно. Это обстоятельство позволяет использовать критерий при небольшом объеме наблюдений X_{ij}.

Другим важным свойством построенных знаковых критериев является то, что они не зависят от вида функции распределения $F(x)$ с нулевой медианой. В этом смысле критерии являются непараметрическими.

5. Асимптотическая нормальность статистик ЛНМ критериев

Если наблюдений достаточно много, то для проверки H^0 можно воспользоваться асимптотической нормальностью W_{pq}.

Обозначим $W=(W_{10},W_{01},W_{11})$,

$$K(p,q,\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{ij}(a^0)\delta_{i+|p-\alpha|,j+|q-\beta|}(a^0),\qquad (p,q)\in\mathcal{I},\quad (\alpha,\beta)\in\mathcal{I}.$$

Т е о р е м а 4. *Пусть выполнены условия (10)–(12). Тогда при гипотезе H^0 случайный вектор*

$$(mn)^{-1/2}W$$

асимптотически нормален с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей

$$K=\begin{pmatrix} K(1,0,1,0) & K(1,0,0,1) & K(1,0,1,1)\\ K(1,0,0,1) & K(0,1,0,1) & K(0,1,1,1)\\ K(1,0,1,1) & K(0,1,1,1) & K(1,1,1,1)\end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Таким образом, точные критерии (14)–(16) можно заменить асимптотически эквивалентными критериями. А именно, обозначим

$$\eta_{pq}=(mnK(1,0,1,0))^{-1/2}W_{pq},\qquad (p,q)\in\mathcal{I}.$$

Тогда гипотезу H^0 нужно отклонить на уровне значимости α в пользу:

1) H^+_{pq}, если $\eta>u_{1-\alpha}$,

2) H^-_{pq}, если $\eta<u_{\alpha}$,

3) H_{pq}, если $|\eta|>u_{1-\alpha/2}$,

где $u_{1-\alpha}$, u_α и $u_{1-\alpha/2}$ — квантили стандартного нормального распределения уровня $1-\alpha$, α и $1-\alpha/2$ соответственно.

Если же соответствующее неравенство не выполнено, то гипотезу H^0 нужно принять.

Теорема 4 позволяет строить критерии проверки гипотезы H^0 против многомерной альтернативы

$$H_A: a\neq a^0.$$

Действительно, так как $\mathsf{E}Z_{ij}=0$, то $\mathsf{E}W_{pq}=0$. Далее, из независимости $S_{ij}S_{kl}$ следует независимость Z_{ij}. Поэтому с учетом $\mathsf{D}Z_{ij}=(m-i)(n-j)$ элементы ковариационной матрицы K_{mn} вектора $(mn)^{-1/2}W$ имеют вид

$$(17)\quad K_{mn}(p,q,\alpha,\beta)=\mathsf{E}\left[(mn)^{-1/2}W_{pq}W_{\alpha\beta}\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{m-1-\max(p,\alpha)}\sum_{j=0}^{n-1-\max(q,\beta)}\delta_{ij}(a^0)\delta_{i+|p-\alpha|,j+|q-\beta|}(a^0)\frac{m-i-\max(p,\alpha)}{m}\frac{n-j-\max(q,\beta)}{m}.$$

Отсюда следует, что статистика

$$T=W^TK_{mn}^{-1}W$$

имеет χ^2-распределение с тремя степенями свободы. Таким образом, гипотезу H^0 следует отклонить в пользу альтернативы H_A на уровне значимости α, если

$$T>\chi^2_{1-\alpha}(3),$$

где $\chi^2_{1-\alpha}(3)$ — квантиль χ^2-распределения уровня $1-\alpha$ с тремя степенями свободы. В противном случае гипотезу H^0 следует принять.

6. Знаковые оценки параметров a_{pq}

Из теорем 2 и 3 следует, что небольшие значения $|W_{pq}|$ свидетельствуют в пользу H^0, а большие — в пользу альтернатив. Поэтому в качестве оценки параметра a, следуя идее Ходжеса и Лемана (см. [6]), надо выбрать решение $\hat{a}$ системы уравнений

$$(18)\qquad W_{pq}(a)=0,\qquad (p,q)\in\mathcal{I}.$$

К сожалению, функции $W_{pq}(a)$ разрывны и равенства (18) могут выполняться лишь приближенно. Поэтому в качестве оценки предлагаем брать минимум функции

$$G(a)=\frac{1}{\sqrt{mn}}\Big(W_{10}^2(a)+W_{01}^2(a)+W_{11}^2(a)\Big).$$

Функция $G(a)$ кусочно-полиномиальная. Она имеет разрывы в точках, удовлетворяющих соотношениям

$$(19)\qquad X_{ij}-a_{10}X_{i-1,j}-a_{01}X_{i,j-1}-a_{11}X_{i-1,j-1}=0,\qquad i=1,\dots,m,\quad j=1,\dots,n.$$

В точках разрыва изменение функции $G(a)$ не превышает по абсолютному значению $\dfrac{2}{\sqrt{mn}}$.

Минимум функции $G(a)$ всегда существует, поскольку совпадает со значением $G(a)$ в одной из точек пересечения плоскостей (19). Минимум $G(a)$ можно найти любым методом, не требующим дифференцируемости целевой функции, например методом покоординатного спуска.

7. Пример

Исследуем при помощи компьютерного моделирования относительную эффективность знаковой оценки по отношению к оценке наименьших квадратов (МНК-оценке). МНК-оценку параметров (a_{10}, a_{01}, a_{11}) определим как точку, в которой достигается минимум функции

$$SS(a_{10}, a_{01}, a_{11}) = \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=2}^{n} (X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1})^2.$$

Нахождение точки минимума этой функции сводится к решению линейной системы из трех уравнений.

Рассмотрим ошибки ε_{ij} вида

$$\varepsilon_{ij} = \nu\eta_{ij} + (1-\nu)\zeta_{ij}, \tag{20}$$

где ν — бернуллиевская случайная величина, принимающая значение 1 с вероятностью $1-\alpha$ и 0 с вероятностью α, а η_{ij} и ζ_{ij} — нормальные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 соответственно. Все случайные величины в (20) независимы.

Модель ошибок (20) была введена Тьюки [8] и широко использовалась Хьюбером [9] и Хампелем [10] для изучения робастных (устойчивых к выбросам) свойств статистических критериев и оценок. Эта модель описывает засорение выборки резко выделяющимися наблюдениями: $100(1-\alpha)\%$ ошибок имеют дисперсию σ_1^2 и $100\alpha\%$ — дисперсию σ_2^2 ($\sigma_2^2 \gg \sigma_1^2$).

Было проведено три эксперимента. В первом полагалось $\alpha = 0$ и $\sigma_1 = 1$, во втором — $\alpha = 0{,}01$, $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 10$, в третьем — $\alpha = 0{,}05$, $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 10$. В каждом эксперименте моделировались 500 реализаций $X_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ поля (1) размера $m \times n$ ($m = n = 50$). Точность каждого метода оценивалась выборочным средним и выборочной дисперсией оценок по 500 реализациям. Истинные значения параметров a_{10}, a_{01}, a_{11} были $-0{,}6$, $0{,}4$ и $0{,}8$ соответственно. Результаты экспериментов приведены в таблице.

В каждой ячейке таблицы верхнее число означает выборочное среднее (по 500 реализациям) соответствующей оценки соответствующего параметра, а нижнее число (в скобках) — соответствующее выборочное среднеквадратическое отклонение.

Из таблицы видно, что при отсутствии выбросов ($\alpha = 0$, $\sigma_1 = 1$) предпочтительнее использовать МНК-оценки. Но уже при одном проценте выбросов ($\alpha = 0{,}01$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$) качество оценок практически одинаково, а при обработке более засоренных выборок ($\alpha = 0{,}05$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$) преимущество имеют знаковые оценки.

Распределение ошибок	Знаковые оценки			МНК-оценки		
	a_{10}	a_{01}	a_{11}	a_{10}	a_{01}	a_{11}
$\alpha = 0$ $\sigma_1 = 1$	-0,6056 (0,0124)	0,4013 (0,0087)	0,8041 (0,0131)	-0,5997 (0,0066)	0,3992 (0,0118)	0,7990 (0,0128)
$\alpha = 0{,}01$ $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$	-0,6052 (0,0101)	0,4015 (0,0072)	0,8033 (0,0098)	-0,5989 (0,0069)	0,4037 (0,0105)	0,8039 (0,0111)
$\alpha = 0{,}05$ $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$	-0,6022 (0,0060)	0,4009 (0,0055)	0,8020 (0,0073)	-0,5906 (0,0073)	0,4273 (0,0099)	0,8328 (0,0103)

Доказательство теоремы 1.

Докажем теорему 1 для альтернативы

$$H_{10}^{+}: \quad a = (a_{10}, a_{01}^{0}, a_{11}^{0}), \quad a_{10} > a_{10}^{0},$$

доказательство для остальных альтернатив аналогично.

Установим на множестве пар индексов (i, j) порядок, полагая

$$(\alpha, \beta) < (i, j), \text{ если: 1) либо } \beta < j, \text{ 2) либо } \beta = j \text{ и } \alpha < i.$$

Обозначим

$$I_{ij} = I(S_{ij} = s_{ij}), \quad i = 1, \ldots, m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $I(\cdot)$ — индикатор случайного события, и определим случайные величины

$$g_{pq} = \prod_{(i,j) \leqslant (p,q)} I_{ij}, \quad p = 1, \ldots, m, \quad q = 1, \ldots, n.$$

Заметим, что $\mathsf{P}\{S = s\} = \mathsf{E} g_{mn}$.

Вычислим $\mathsf{E} g_{pq}$ при альтернативе H_{10}^{+} с точностью до $o(a_{10} - a_{10}^{0})$ (здесь и всюду далее в доказательстве $o(a_{10} - a_{10}^{0})$ и $o(1)$ будет пониматься при $a_{10} \to a_{10}^{0}$).

Так как при альтернативе H_{10}^{+} $a_{kl} = a_{kl}^{0}$ для любых $(k, l) \neq (1, 0)$, то

$$I_{ij} = \frac{1 + s_{ij}}{2} - s_{ij} I(\varepsilon_{ij} < (a_{10} - a_{10}^{0}) X_{i-1,j}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{П.1}$$

Обозначив через $\mathfrak{A}_{pq}$ σ-алгебру, порожденную $\{\varepsilon_{ij}, (i, j) < (p, q)\}$, и используя измеримость $g_{p-1,q}$ относительно $\mathfrak{A}_{pq}$ и независимость ε_{pq} от $\mathfrak{A}_{pq}$, получим для всех $(p, q) > (1, 1)$

(П.2)

$$\mathsf{E} g_{pq} = \mathsf{E}[g_{p-1,q} I_{pq}] = \mathsf{E}\left[g_{p-1,q} \mathsf{E}\left[\left(\frac{1 + s_{pq}}{2} - s_{pq} I(\varepsilon_{pq} < (a_{10}^{0} - a_{10}) X_{p-1,q})\right) \middle| \mathfrak{A}_{pq}\right]\right] =$$
$$= \mathsf{E}\left[g_{p-1,q}\left(\frac{1 + s_{pq}}{2} - s_{pq} F((a_{10}^{0} - a_{10}) X_{p-1,q})\right)\right].$$

Из (10)–(12) следует, что для любой ограниченной случайной величины η и любых $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$

$$\mathsf{E}[\eta F(u X_{pq})] = 2^{-1} \mathsf{E}\eta + u F'(0) \mathsf{E}[\eta X_{pq}] + o(u), \quad u \to 0. \tag{П.3}$$

Действительно, из формулы Тейлора следует, что

$$F(t) - F(0) - F'(0) t = (F'(\theta t) - F'(0)) t, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

Поэтому из (12) вытекает, что

$$\mathsf{E}|\eta F(u X_{11}) - \eta F(0) - \eta F'(0)(u X_{11})| \leqslant \mathsf{E}[|F'(u X_{11} \theta) - F'(0)||u X_{11}|] = o(u) \qquad \text{при } u \to 0,$$

откуда с учетом (10) следует (П.3).

Полагая $\eta = g_{p-1,q}$, $u = a_{10}^0 - a_{10}$, получим

$$\text{(П.4)}\quad \mathsf{E}[g_{p-1,q}s_{pq}F((a_{10}^0 - a_{10})X_{p-1,q})] = \\ = \frac{1}{2}\mathsf{E}g_{p-1,q}s_{pq} + (a_{10}^0 - a_{10})s_{pq}F'(0)\mathsf{E}[g_{p-1,q}(a_{10}^0 - a_{10})X_{p-1,q}] + o(a_{10}^0 - a_{10}).$$

Подставляя (П.4) в (П.2), будем иметь

$$\text{(П.5)}\quad \mathsf{E}g_{pq} = \frac{1}{2}\mathsf{E}g_{p-1,q} + s_{pq}(a_{10} - a_{10}^0)F'(0)\mathsf{E}(g_{p-1,q}X_{p-1,q}) + o(a_{10} - a_{10}^0), \quad (p,q) > (1,1).$$

Аналогично для $p = 1$, $q = 1$

$$\text{(П.6)}\qquad \mathsf{E}g_{11} = \frac{1}{2} + o(a_{10} - a_{10}^0).$$

Из (П.5) следует рекуррентная (с учетом установленного на индексах (p,q) порядка) формула

$$\mathsf{E}g_{pq} = \frac{1}{2}\mathsf{E}g_{p-1,q} + o(1), \quad (p,q) > (1,1),$$

применяя которую $m(q-1)+p$ раз с начальным условием (П.6), получим

$$\mathsf{E}g_{pq} = 2^{-(m(q-1)+p)} + o(1), \quad (p,q) \geqslant (1,1).$$

Вычислим $\mathsf{E}(g_{p-1,q}X_{p-1,q})$ в (П.5). Известно [2], что при выполнении (7) решение X_{ij} уравнения (1) представимо в виде

$$X_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a)\varepsilon_{i-k,j-l},$$

причем [3] существуют постоянные $\alpha \in (0,1)$ и C, что

$$\text{(П.7)}\qquad |\delta_{kl}(a)| \leqslant C\alpha^{k+l}.$$

Выведем для $\delta_{kl}(a)$ рекуррентную формулу (7), для чего определим операторы сдвига L_1 и L_2 по формулам

$$L_1X_{ij} = X_{i-1,j}, \quad L_2X_{ij} = X_{i,j-1}.$$

Тогда

$$X_{ij} = a_{10}L_1X_{ij} + a_{01}L_2X_{ij} + a_{11}L_1L_2X_{ij} + \varepsilon_{ij}.$$

Обозначив через E единичный оператор, будем иметь

$$X_{ij} = (E - a_{10}L_1 - a_{01}L_2 - a_{11}L_1L_2)^{-1}\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a)L_1^kL_2^l\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a)\varepsilon_{i-k,j-l}.$$

Поэтому $\delta_{kl}(a)$ должны для любых комплексных чисел z_1 и z_2 удовлетворять условию

$$(1 - a_{10}z_1 - a_{01}z_2 - a_{11}z_1z_2)^{-1} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a)z_1^kz_2^l,$$

или

$$(1 - a_{10}z_1 - a_{01}z_2 - a_{11}z_1z_2)\sum_{k,l=0}^{\infty} \delta_{kl}(a)z_1^kz_2^l = 1.$$

Приравнивая в этом равенстве коэффициенты при $z_1^kz_2^l$, получим (7)–(8).

Лемма 1. Пусть $i \geqslant 1$, $j \geqslant 1$, $(i,j) \leqslant (p,q)$. Тогда

$$\mathsf{E}(g_{pq}\varepsilon_{ij}) = -s_{ij}E2^{-(m(q-1)+p-1)} + o(1).$$

Доказательство леммы 1. Если $(i,j) < (p,q)$, то

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(g_{pq}\varepsilon_{ij}) = \mathsf{E}(g_{p-1,q}I_{pq}\varepsilon_{ij}) = \\ = \mathsf{E}\left[g_{p-1,q}\varepsilon_{ij}\mathsf{E}\left[\left(\frac{1+s_{pq}}{2} - s_{pq}I(\varepsilon_{pq} < (a_{10}^0 - a_{10})X_{p-1,q})\right)\middle|\mathfrak{A}_{pq}\right]\right] = \\ = \mathsf{E}\left[g_{p-1,q}\varepsilon_{ij}\left(\frac{1+s_{pq}}{2} - s_{pq}F((a_{10}^0 - a_{10})X_{p-1,q})\right)\right] = \frac{1}{2}\mathsf{E}[g_{p-1,q}\varepsilon_{ij}] + o(1).\end{aligned}$$

Повторяя эти рассуждения $p + (q-1-j)m + m - i$ раз, получим

$$\mathsf{E}(g_{pq}\varepsilon_{ij}) = 2^{-(p+(q-1-j)m+(m-i)}\mathsf{E}g_{ij}\varepsilon_{ij} + o(1).$$

Далее, обозначив для краткости $\mu = \int_{-\infty}^0 tF'(t)\,dt$ найдем, что

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(g_{ij}\varepsilon_{ij}) = \mathsf{E}(g_{i-1,j}I_{ij}\varepsilon_{ij}) = \mathsf{E}\left[g_{i-1,j}\mathsf{E}\left[\left(\frac{1+s_{ij}}{2} - s_{ij}I(\varepsilon_{ij} < (a_{10}^0 - a_{10})X_{i-1,j})\right)\varepsilon_{ij}\middle|\mathfrak{A}_{ij}\right]\right] = \\ = \mathsf{E}\left[g_{i-1,j}\left[\frac{1+s_{ij}}{2}\mathsf{E}[\varepsilon_{ij}|\mathfrak{A}_{\mathrm{ij}}] - s_{ij}\int_{-\infty}^{(a_{10}^0-a_{10})X_{i-1,j}} tF'(t)\,dt\right]\right] = \\ = -s_{ij}\int_{-\infty}^0 tF'(t)\,dt\mathsf{E}[g_{i-1,j}] + 0(1) = -s_{ij}\mu 2^{-(m(l-1)+k-1)} + o(1).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mathsf{E}(g_{pq}\varepsilon_{ij}) = -s_{ij}\mu 2^{-(p+(q-1-l)m+(m-k))-(m(l-1)+k-1)} + o(1) = -s_{ij}\mu 2^{-(m(q-1)+p-1)} + o(1).$$

Лемма 1 доказана.

Из леммы следует, что

$$\mathsf{E}(g_{p-1,q}X_{p-1,q}) = \sum_{i,j=0}^{\infty}\delta_{ij}(a)\mathsf{E}[g_{p-1,q}\varepsilon_{p-1-i,q-j}] = -\mu 2^{-(m(q-1)+p-2)}\sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=0}^{q-1}\delta_{ij}(a)s_{p-1-i,q-j}+o(1).$$

Подставим это выражение в (П.5). Тогда

$$\mathsf{E}g_{pq} = 2^{-1}\mathsf{E}g_{p-1,q} + K2^{-(m(q-1)+p)}(a_{10} - a_{10}^0)\sum_{i=0}^{p-2}\sum_{j=0}^{q-1}\delta_{ij}(a)s_{pq}s_{p-1-i,q-j} + o(a_{10} - a_{10}^0).$$

Применяя эту рекуррентную формулу pq раз с начальным условием (П.6), будем иметь

$$\mathsf{E}g_{pq} = 2^{-(m(q-1)+p)}\left(1 + K(a_{10} - a_{10}^0)\sum_{k=0}^{p-2}\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{p-2-k}\sum_{j=0}^{q-1-l}\delta_{ij}(a)s_{p-k,q-l}s_{p-1-i-k,q-j-l}\right)+o(a_{10}-a_{10}^0).$$

Полагая $p = m$, $q = n$, меняя порядок суммирования и учитывая непрерывность $\delta_{ij}(a)$ от a в точке a^0, получим

$$\mathsf{E}g_{mn} = 2^{-mn}\left(1 + K(a_{10} - a_{10}^0)\sum_{i=0}^{m-2}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{ij}(a^0)\sum_{k=i+2}^{m}\sum_{l=j+1}^{n} s_{kl}s_{k-1-i,l-j}\right) + o(a_{10} - a_{10}^0).$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 4.

Из (П.7) следует, что при $m \to \infty$, $n \to \infty$

$$K_{mn}(p, q, \alpha, \beta) \to K(p, q, \alpha, \beta).$$

Так как слагаемые в W_{pq} — независимые и ограниченные случайные величины и

$$\mathsf{D}W_{pq} \to \infty, \qquad m \to \infty, \quad n \to \infty,$$

то на основании центральной предельной теоремы для ограниченных случайных величин [7, с. 354] случайные величины W_{pq} асимптотически нормальны.

Асимптотическая нормальность вектора (W_{10}, W_{01}, W_{11}) равносильна асимптотической нормальности случайной величины

$$\lambda_{10}W_{10} + \lambda_{01}W_{01} + \lambda_{11}W_{11}$$

для любых $\lambda_{pq} \in \mathbb{R}$, которя доказывается так же, как и асимптотическая нормальность W_{pq}. Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ripley B.D.* Spatial Statistics (Wiley Series in Probability and Statistics). Wiley, 1981.

2. *Tjostheim D.* Statistical Spatial Series Modelling //Adv. Appl. Probab. 1978. V. 10. № 1. P. 130–154.

3. *Yao Q., Brockwell P.J.* Gaussian Maximum Likelihood Estimation for ARMA Models II Spatial Processes //Bernoulli. 2006. V. 12. № 3. P. 403–429.

4. *Болдин М.В., Симонова Г.И., Тюрин Ю.А.* Знаковый статистический анализ линейных моделей. М.: Наука. Физматлит, 1997.

5. *Basu S., Reinsel G.C.* Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Adv. Appl. Probab. 1993. V. 25. № 3. P. 631–648.

6. *Hodges J.L.Jr., Lehmann E.L.* Estimates of location based on rank tests //Ann. Math. Stat. 1963. V. 34. № 2. P. 598–611.

7. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

8. *Тьюки Д.* Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. М.: Мир, 1981.

9. *Хьюбер Дж.П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984.

10. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния: Пер. с англ./Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. М.: Мир, 1989.

Ключевые слова: пространственная авторегрессия, знаковые методы, локально наиболее мощные критерии; spatial autoregression, sign methods, locally most powerful tests

Сравнение точности знаковых и МНК-оценок

Распределение ошибок	Знаковые оценки			МНК-оценки		
	a_{10}	a_{01}	a_{11}	a_{10}	a_{01}	a_{11}
$\alpha = 0$ $\sigma_1 = 1$	-0,6056 (0,0124)	0,4013 (0,0087)	0,8041 (0,0131)	-0,5997 (0,0066)	0,3992 (0,0118)	0,7990 (0,0128)
$\alpha = 0{,}01$ $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 10$	-0,6052 (0,0101)	0,4015 (0,0072)	0,8033 (0,0098)	-0,5989 (0,0069)	0,4037 (0,0105)	0,8039 (0,0111)
$\alpha = 0{,}05$ $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 10$	-0,6022 (0,0060)	0,4009 (0,0055)	0,8020 (0,0073)	-0,5906 (0,0073)	0,4273 (0,0099)	0,8328 (0,0103)