3. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины два // Вестн. Моск. ун-та. Серия 1. Математика. Механика. — 2008. — № 1. — С. 31–37.
4. Дудакова О. С. О конечной порожденности замкнутых классов монотонных функций в P_k // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 65–71.
5. Дудакова О. С. О конечной порожденности предполных классов монотонных функций девятизначной логики // Мат-лы XVIII Междунар. школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Пенза, 28 сентября – 3 октября 2009 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2009. — С. 38–41.
6. Дудакова О. С. О классах функций k-значной логики, монотонных относительно множеств ширины три // Мат-лы X Междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). — М.: Изд-во мех.-матем. ф-та МГУ. — 2010. — С. 178-180.
7. Мартынюк В. В. Исследование некоторых классов в многозначных логиках // Проблемы кибернетики. — М.: Наука. — 1960. — Т. 3. — С. 49–60.
8. Дудакова О. С. О порождающих системах специального вида для предполных классов монотонных функций k-значной логики // Мат-лы XVI Междунар. конф. "Проблемы теоретической кибернетики" (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та. — 2011. — С. 145–147.

ОЦЕНКА ЧИСЛА ГРАФОВ В НЕКОТОРЫХ ПОДКЛАССАХ ДВУДОЛЬНЫХ ГРАФОВ

В. А. Замараев (Нижний Новгород)

Введение

В работе рассматриваются обыкновенные, помеченные графы с множеством вершин $\{1, \ldots, n\}$. Множество $\mathcal{X}$ называется *наследственным классом графов*, если любой граф, изоморфный порожденному подграфу графа из $\mathcal{X}$, также принадлежит $\mathcal{X}$. В [2] В. Е. Алексеев доказал, что для любого бесконечного наследственного класса графов $\mathcal{X}$, отличного от класса всех графов, справедливо следующее соотношение:

$$\log_2 |\mathcal{X}_n| = \left(1 - \frac{1}{c(\mathcal{X})}\right) \frac{n^2}{2} + o(n^2), \qquad (1)$$

где $c(\mathcal{X})$ — натуральное число, называемое индексом класса $\mathcal{X}$, а $\mathcal{X}_n$ — множество всех n-вершинных графов из класса $\mathcal{X}$. Из (1) видно, что семейство наследственных классов графов разбивается на счетное множество *слоев*, каждый из которых состоит из классов с определенным значением индекса. Множество классов с индексом, равным 1, образует *унитарный* слой. Для классов из этого слоя соотношение (1) не дает асимптотической оценки величины $\log_2|\mathcal{X}_n|$, знание которой важно, например, при экономном кодировании графов из класса $\mathcal{X}$ [1]. Для исследования асимптотического поведения функции $\log_2|\mathcal{X}_n|$ для классов из унитарного слоя В. Е. Алексеев ввел понятие равновеликости [3]. Два класса графов $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ называются *равновеликими*, если существуют положительные числа c_1, c_2 и n_0 такие, что $|\mathcal{Y}_n|^{c_1} \leq |\mathcal{X}_n| \leq |\mathcal{Y}_n|^{c_2}$ для любого $n > n_0$. Равновеликость является отношением эквивалентности, а классы эквивалентности на множестве наследственных классов графов называются *ярусами*.

В [6] были выделены первые четыре яруса унитарного слоя, для которых $\log_2|\mathcal{X}_n|$ по порядку совпадает с 1, $\log n$, n, $n\log n$, и показано, что никаких промежуточных типов поведения не существует. Эти ярусы называются константным, полиномиальным, экспоненциальным и факториальным соответственно. Независимо такой же результат был получен В. Е. Алексеевым [3]. Более того, для первых трех ярусов В. Е. Алексеев получил структурные описания и в каждом из четырех нашел все минимальные элементы. Факториальный ярус является наименьшим, для которого такой характеризации неизвестно. В то же время этому ярусу принадлежат многие классы, представляющие большой интерес с теоретической и практической точек зрения. Например, он содержит: реберные графы, интервальные графы, леса, планарные графы, кографы и др.

Классы графов, для которых функция $\log_2|\mathcal{X}_n|$ растет быстрее чем $n\log n$, называются сверхфакториальными. Формально класс называется *сверхфакториальным*, если для любых положительных c и n_0 существует $n > n_0$, такое, что $|\mathcal{X}_n| > n^{cn}$.

Обозначим через $\mathcal{B}, \overline{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{S}$ класс двудольных, кодвудольных и расщепляемых графов соответственно. Количество n-вершинных графов в каждом из этих классов равно $2^{\frac{n^2}{4}+o(n^2)}$ [2], и поэтому каждый них является сферхфакториальным. В настоящей работе рассматриваются два семейства наследственных подклассов класса двудольных графов и доказывается, что каждый из этих классов является не более чем факториальным. Интерес к подклассам двудольных графов вызван следующей гипотезой, предложенной в [5]:

Гипотеза. Наследственный класс $\mathcal{X}$ является факториальным тогда и только тогда, когда по крайней мере один из классов: $\mathcal{X}\cap\mathcal{B}$, $\mathcal{X}\cap\overline{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{X}\cap\mathcal{S}$ является факториальным и каждый из этих классов не более чем факториальный.

В работе используется описание наследственных классов через множество запрещенных порожденных подграфов. Пусть M — множество графов, тогда через $Free(M)$ принято обозначать множество всех графов, не содержащих порожденных подграфов, изоморфных графам из M. Множество графов $\mathcal{X}$ является наследственным классом тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = Free(M)$ для некоторого M.

Используя общепринятую символику, через C_n и $K_{p,q}$ мы будем обозначать простой n-вершинный цикл и полный двудольный граф с p и q вершинами в каждой из долей соответственно. Через $T_{h,d}$ будем обозначать корневое дерево высоты h, в котором каждая вершина, находящаяся на расстоянии не более чем $h-1$ от корня, имеет ровно d потомков. Например, граф $T_{1,d}$ есть звезда с d листьями — $K_{1,d}$. Подграф графа G, порождаемый множеством вершин A, будем обозначать через $G[A]$.

1. Двудольные графы без порожденного C_4

Известно, что класс двудольных графов, не содержащих C_4 в качестве порожденного подграфа, является сверхфакториальным (см., например, [4]). Один из результатов данной работы говорит о том, что если кроме C_4 запретить еще и некоторый фиксированный лес, то такой подкласс двудольных графов становится не более чем факториальным. Для доказательства этого утверждения нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 1. *Для любых $h \geq 1,\ d \geq 2$, всякий граф из класса $Free(C_4, T_{h,d}) \cap \mathcal{B}$ содержит вершину, степень которой не превосходит $c(h,d) = \frac{d^h-1}{d-1} + d - 2$.*

Доказательство. Докажем лемму по индукции по h. Для $h = 1$ лемма верна в силу того, что всякая вершина двудольного графа, не содержащего $K_{1,d}$, имеет степень не более $d-1$.

Предположим, что лемма верна для всех значений, меньших h, и для любого фиксированного $d \geq 2$. Рассмотрим произвольный граф G из класса $Free(C_4, T_{h,d}) \cap \mathcal{B}$. Мы можем считать, что G содержит порожденный $T_{h-1,d}$, иначе по предположению индукции в G была бы вершина, степень которой не превосходит $c(h-1,d) < c(h,d)$. Обозначим через $M \subseteq V(G)$ множество вершин, порождающих $T_{h-1,d}$ в G. Пусть $v \in M$ — корень этого дерева, а $D_k \in M$ — множество вершин, отстоящих от v на расстоянии k в $G[M]$. В частности, $D_0 = \{v\}$, а $D_k = \emptyset$, при $k \geq h$. Для $0 \leq k \leq h-1$, $|D_k| = d^k$, поэтому

$$|M| = \sum_{k=0}^{h-1} d^k = \frac{d^h-1}{d-1}. \tag{2}$$

Предположим от противного, что каждая вершина графа G имеет степень не менее $c(h,d)+1 = \frac{d^h-1}{d-1} + d - 1$. Тогда любая вершина $u \in D_{h-1}$ имеет по крайней мере d соседних вершин, ни одна из которых не смежна ни с какой другой вершиной из M. Действительно, M содержит $\frac{d^h-1}{d-1} - 1$ вершин, отличных от u. Каждая из этих вершин может иметь не более одного общего соседа с u, иначе в графе найдется порожденный C_4. Обозначим через S_u множество вершин, смежных с u, но не смежных с другими вершинами из M. Объединение $S = \bigcup_{u \in D_{h-1}} S_u$ — подмножество одной из долей графа G, и поэтому является независимым множеством в G. Из этих рассуждений следует, что $M \cup S$ порождает запрещенное дерево $T_{h,d}$. Данное противоречие приводит нас к заключению, что в G есть вершина, степень которой не превосходит $c(h, d)$.

Теорема 1. *Для любого леса F, класс $Free(C_4, F) \cap \mathcal{B}$ является не более чем факториальным.*

Доказательство. Заметим, что произвольный лес F является порожденным подграфом дерева $T_{h,d}$, для некоторых $h \geq 1$ и $d \geq 2$. Очевидно, что для таких h и d класс $Free(C_4, F) \cap \mathcal{B}$ является подклассом $Free(C_4, T_{h,d}) \cap \mathcal{B}$. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно получить верхнюю факториальную оценку числа n-вершинных графов в классе $Free(C_4, T_{h,d}) \cap \mathcal{B}$.

Из леммы 1 следует, что в любом n-вершинном графе из наследственного класса $Free(C_4, T_{h,d}) \cap \mathcal{B}$ число ребер не превосходит cn, где $c = c(h, d)$. Поэтому число n-вершинных графов в этом классе не превосходит

$$\sum_{i=0}^{cn} \binom{\binom{n}{2}}{i} \leq \sum_{i=0}^{cn} n^{2i} \leq cn^{2cn+1} + 1 \leq n^{dn},$$

где d — некоторая константа, не зависящая от n. Теорема доказана.

2. Хордальные двудольные графы

В предыдущем разделе мы рассмотрели класс двудольных графов, у которых запрещен цикл C_4, но допускаются любые другие порожденные циклы четной длины: $C_6, C_8, C_{10}, \ldots$. Рассмотрим теперь класс двудольных графов, у которых C_4 разрешен, а все остальные циклы запрещены, то есть класс $\mathcal{CB} = Free(C_6, C_8, C_{10}, \ldots) \cap \mathcal{B}$. Это класс так называемых хордальных двудольных графов. Известно [7], что он является сферхфакториальным. Заметим, что если в классе хордальных двудольных графов запретить порожденный цикл $C_4 = K_{2,2}$, то мы получим класс лесов, который является факториальным. Еще одним результатом данной работы является обобщение этого факта на случай произвольного полного двудольного графа с не менее чем 3 вершинами. А именно справедлива следующая теорема, приводимая здесь без доказательства.

Теорема 2. *Для любых натуральных p, q таких, что $p + q \geq 3$, класс $Free(K_{p,q}) \cap \mathcal{CB}$ является факториальным.*

Список литературы

1. Алексеев В. Е. Наследственные классы и кодирование графов // В сб. Проблемы кибернетики. вып. 39. Под ред. С. В. Яблонского — М.: Наука. — 1982. — С. 151–164.
2. Алексеев В. Е. Область значений энтропии наследственных классов графов // Дискретная Математика. — 1992. — Т. 4, вып. 2. — С. 148–157.

3. Алексеев В. Е. О нижних ярусах решетки наследственных классов графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 1997. — Серия 1, Т. 4. — С. 3–12.
4. Allen P. Forbidden induced bipartite graphs // Journal of Graph Theory. — 2009. — V. 60, I. 3. — P. 219–241.
5. Lozin V., Mayhill C., Zamaraev V. A note on the speed of hereditary graph properties // Electronic J. Combinatorics. — 2011. — V. 18, I. 1. — Research paper 157
6. Scheinerman E. R., Zito J. On the size of hereditary classes of graphs // J. Comb. Theory. — 1994. — V. 61, Ser. B. — P. 16–39.
7. Spinrad J. P. Nonredundant 1's in Γ-free matrices // SIAM J. Discrete Math.. — 1995. — V. 8. — P. 251–257.

О НАДЕЖНОСТИ СХЕМ В БАЗИСАХ, СОДЕРЖАЩИХ КОНСТАНТУ 1 И ФУНКЦИЮ ВИДА $x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus c)$

Д. М. Клянчина (Пенза)

Введение

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов [1] в полном конечном базисе B, содержащем константу 1 и функцию вида $x_1(x_2 \oplus x_3 \oplus c)$ $(c \in \{0,1\})$. Считаем, что схема реализует булеву функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$ $(n \geq 1)$, если при поступлении на входы схемы двоичного набора $\tilde{a} = (a_1,\ldots,a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Допустим, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью ε $(0 < \varepsilon < 1/2)$ переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном — константу 0.

Пусть $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ — вероятность появления $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S, реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, при входном наборе $\tilde{a}$. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальное из чисел $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ при всевозможных входных наборах $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна $1 - P(S)$.

Далее докажем, что в рассматриваемых базисах все булевы функции можно реализовать схемами, которые функционируют с ненадежностью, не больше $2\varepsilon + 149\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$, в то время как в тех же базисах при инверсных неисправностях на выходах элементов [3] — не больше $3\varepsilon + 293\varepsilon^2$ при $\varepsilon \in (0, 1/960]$.