Решение Дутта–Рэя для игр с ограниченной кооперацией

Е.Б.Яновская

Рассматриваются кооперативные игры с ограниченной кооперацией, задаваемой произвольным набором допустимых коалиций, включающим большую коалицию всех игроков. Для этого класса игр определяется уравнивающее решение (ESOS) [1] таким же способом, как и для произвольных игр с трансферабельными полезностями. Показывается, что если уравнивающее решение сбалансированной игры с ограниченной кооперацией пересекается с ее с-ядром, то оно является одноточечным и доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра, т.е. является эгалитарным решением Дутта–Рэя (ДР).

Более детально исследуется класс игр с коалиционой структурой, в которых допустимыми коалициями являются коалиции некоторого разбиения множеств игроков, их объединения и все подкоалиции каждой коалиции разбиения. Для таких игр определяется понятие выпуклости и определяется два типа эгалитарных решений для выпуклых игр с коалиционной структурой. Приводятся аксиоматические характеризации обоих эгалитарных решений.

Ключевые слова: кооперативная игра, ограниченная кооперация, уравнивающее решение, решение Дутта–Рэя

1 Введение

В классических кооперативных играх с трансферабельными полезностями (N, v) характеристическая функция v определена на множестве всех коалиций, т.е. подмножеств множества игроков N. На практике, однако, не все коалиции могут быть образованы по тем или иным политическим, экономическим или техническим причинам. Наиболее популярной является ситуация, в которой задано разбиение множества игроков, и подкоалиции коалиций этого разбиения не могут быть образованы. Обобщением этой ситуации является иерархия управлений, задаваемая разбиениями множества игроков, содержащимися друг в друге.

Таким образом, одним из дальнейших направлений исследования кооперативных игр следует рассматривать их расширения на случай задания характеристической функции на произвольном наборе коалиций множества игроков. Такой класс игр будет называться *играми с ограниченной кооперацией*.

Теория решений для игр с ограниченной кооперацией началась с исследования игр с *коалиционной структурой*. Для таких игр были определены решения, зависящие от разбиений ([9],[7] и др.). Однако характеристические функции определялись на множестве всех коалиций, хотя и не все коалиции участвовали в определении решений.

В статье предлагается другой подход. Рассматриваются произвольные наборы допустимых коалиций, и только на них определяется характеристическая функция. Приведем формальное определение.

Определение 1 Игрой с ограниченной кооперацией называется тройка (N, v, Ω), где N – конечное множество игроков, $\Omega \subset 2^N, N \in \Omega$ – набор *допустимых коалиций,* $v : \Omega \to \mathbb{R}$ – *характеристическая функция.*

Из этого определения следует, что если $\Omega = 2^N$, то игра $(N, v, \Omega) = (N, v)$ является классической кооперативной игрой с трансферабельными полезностями.

Решения классическиих ТП игр можно адаптировать для игр с ограниченной кооперацией двумя способами: или прямым переносом определений на игры с ограниченной кооперацией, если это возможно, или доопределением характеристической функции на всех недопустимых коалициях и затем применением классического решения для получившейся ТП игры.

Для значения Шепли и других линейных значений первый подход невозможен, так как определяющие их формулы для каждой игры зависят от значений характеристической функции на всех коалициях.

С другой стороны, пред n-ядро и решение Дутта-Рэя определяются как решения оптимизационных задач, в которых значения характеристической функции входят в качестве ограничений. Если эти ограничения заданы не для всех коалиций, то само определение остается без изменения и может быть применено к играм с ограниченной кооперацией.

В частности, эгалитарное решение Дутта-Рэя, определенное на классе выпуклых ТП игр, сопоставляет каждой выпуклой ТП игре единственный вектор из c-ядра, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из c-ядра. Так как для игр с ограниченной кооперацией понятие c-ядра уже было определено,(см., напр, [8]), то на класс игр с ограниченной кооперацией и с непустым c-ядром определение решения Дутта–Рэя переносится непосредственно, хотя оно может и оказаться пустым для некоторых игр. Поэтому нахождение классов игр с ограниченной кооперацией, для которых решение Дутта–Рэя не пусто, является основной целью данной статьи.

Эта задача решается с помощью уравнивающего решения (Equal Split Off Set – ESOS [1]), являющегося результатом применения алгоритма Дутта–Рэя [4] для любой ТП игры, и, следовательно, совпадающего с решением Дутта–Рэя на классе выпуклых игр.

Упомянутый алгоритм может быть применен в произвольным играм с ограниченной кооперацией, его результатом является некоторое, вообще говоря, многозначное решение. Если в сбалансированной ТП игре алгоритм приводит к единственному вектору, содержащемуся в c-ядре, в этом случае он доминирует по Лоренцу все остальные векторы из c-ядра и, следовательно, является решением Дутта–Рэя для этой игры. С другой стороны, если c-ядро (классической) сбалансированной ТП игры совпадает с c-ядром некоторой выпуклой игры, то для такой игры решение Дутта-Рэя существует. Таким образом, область определения решения Дутта-Рэя в классическом случае шире, чем класс выпуклых игр. Поэтому следует ожидать, что и для некоторых классов игр с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром решение Дутта–Рэя существует.

Понятие выпуклости для игр с ограниченной кооперацией не определено, ввиду того что для допустимых коалиций S, T их объединение или пересечение могут оказаться не допустимо. Поэтому для класса игр с ограниченной кооперацией и непустым c-ядром используется подход определения решения Дутта–Рэя с помощью уравнивающего решения. Именно, в этом классе находятся те игры, для которых уравнивающее решение состоит из единственного вектора, принадлежащего c-ядру (параграф 3). Показывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы результат алгоритма для рассматриваемой игры пересекался с ее с-ядром.

Более детально исследуются игры с коалиционными структурами, в которых набор допустимых коалиций состоит из коалиций разбиения множества игроков, их объединений и всех подкоалиций коалиций разбиения. Каждая игра с коалиционной структурой определяет *внешнюю* ТП игру, игроками которой являются коалиции разбиения и *внутренние* ТП игры, являющиеся под-играми исходной игры на коалициях разбиения. Показывается, что если все эти игры выпуклые, в исходной игре существует решения Дутта–Рэя. Приводится его аксиоматическая характеризация с помощью свойств согласованности по Дэвису–Машлеру и совпадения решения для игр двух лиц с решением ограниченного эгалитаризма. Этот результат является непосредственным обобщением одной из аксиоматизаций решения Дутта–Рэя для выпуклых ТП игр [4].

Для игр с коалиционными структурами строится еще одно эгалитарное решение, принимающее в расчет неравноправное значение коалиций разбиения (верхний уровень) и их подкоалиций (нижний уровень). Построение этого решения аналогично обобщению Камийо [7] значения Шепли на игры с коалиционными структурами. Построение решения для каждой игры состоит из двух этапов: на первом шаге находится решение Дутта–Рэя внешней игры, а на втором шаге находятся такие же решения под-игр на каждой коалиции разбиения, в которых значения больших коалиций заменены на соответствующую компоненту ДР-решения внешней игры. Набор этих решений определяет решение исходной игры. Приводятся аксиоматическая характеризация эгалитарного решения типа Камийо. Одна из аксом, характеризующих решение, является ослаблением свойства согласованности, а вторая, наоборот, усиливает аксиому ограниченного эгалитаризма, распространяя ее на игры значения выигрышей коалиций для игр с коалиционными структурами, состоящими из двух коалиций.

2 Игры с ограниченной кооперацией

Обозначим через $\mathcal{G}^r_N$. класс всех игр с ограниченной кооперацией и множеством игроков N. Пусть $\mathcal{N}$ – произвольное *универсальное* множество игроков. Так как все последующие результаты (кроме результатов п.3.) будут справедливы для произвольного универсального множества игроков, будем обозначать класс игр $\mathcal{G}^r = \bigcup_{N\subset\mathcal{N}} \mathcal{G}^r_N$ не выделяя универсальное множество игроков $\mathcal{N}$.

Множество всех игр с ограниченной кооперацией с множествами игроков из множества $\mathcal{U}$ обозначим через $\mathcal{G}^r = \bigcup_{N\subset\mathcal{U}} \mathcal{G}^r_N$.

Для каждой игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией множество *допустимых* векторов выигрышей обозначим через

$$X(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) \le v(N)\},$$

а множество *эффективных* векторов выигрышей через

$$X^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}.$$

Заметим, что оба вышеприведенных определения не зависят от набора Ω, и совпадают с аналогичными множествами для классических ТП игр.

Определение 2 *Решением* для класса $\mathcal{C}_N \subset \mathcal{G}_N^r$ называется отображение $\sigma : \mathcal{C}_N \to \mathbb{R}^N$, удовлетворяющее соотношениям $(N, v, \Omega) \in \mathcal{C}_N \quad \sigma(N, v, \Omega) \subset X(N, v, \Omega)$.

Для классических ТП игр расширение эгалитарного решения Дутта–Рэя на классы супераддитивных и произвольных ТП игр рассматривалось в [1]. Это решение для каждой ТП игры являлось результатом алгоритма Дутта–Рэя, построенного для нахождения эгалитарного решения для выпуклых игр. Для произвольных ТП игр алгоритм может привести к многозначному решению, которое для некоторых игр, как, например, для субаддитивных игр двух лиц, не удовлетворяет интуитивному понятию равенства. Этот алгоритм можно применить и к играм с ограниченной кооперацией. Поэтому формальное определение дадим сразу для этого класса игр.

Определение 3 *Уравнивающее решение (Equal Split Off Set)* для класса $\mathcal{G}_N^r$ сопоставляет каждой игре (N, v, Ω) из этого класса множество $ESOS(N, v, \Omega) \subset X^*(N, v)$ такое что $x \in ESOS(N, v, \Omega)$ в том и только том случае, если

$$x = (\underbrace{a_1, \dots, a_1}_{T_1}, \underbrace{a_2, \dots, a_2}_{T_2}, \dots \underbrace{a_k \dots, a_m}_{T_m}), \tag{1}$$

где $a_1 = \max\limits_{S \in \Omega} \dfrac{v(S)}{|S|} = \dfrac{v(T_1)}{|T_1|}$, $a_j = \max\limits_{\substack{S \subset N \setminus \cup_{i=1}^{j-1} T_i \\ \cup_{i=1} j-1 t_i \cup S \in \Omega}} \dfrac{v^j(S)}{|S|} = \dfrac{v^j(T_j)}{|T_j|}$, $j = 2, \dots, m$,

$$v^j(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } \bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \notin \Omega, \\ v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S\right) - v\left(\bigcup_{i=1}^{j-1} T_i\right), & \text{если } \bigcup_{i=1}^{j-1} T_i \cup S \in \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

для $S \in \Omega$, $S \subset N \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} T_i$.

Заметим, что для каждой игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ алгоритм (1) дает определение непустого конечнозначного решения.

Если (N, v) – выпуклая ТП игра, т.е. то Определение 3 совпадает с алгоритмом Дутта–Рэя. Для каждой такой игры это решение – решение Дутта–Рэя (ДР) – состоит из единственного вектора в с-ядре, доминирующего по Лоренцу остальные векторы из с-ядра [4].

Из определения DR решения для каждой выпуклой игры как вектора, принадлежащего с-ядру и доминирующего по Лоренцу остальные векторы из с-ядра, следует, что оно существует для более широкого класса игр. Например, если для сбалансированной игры найдется такая выпуклая игра, с-ядро которой совпадает с с-ядром исходной игры, то в последней существует DR решение. Примерами таких игр являются k-выпуклые игры [3].

Кроме того, существуют сбалансированные игры с одноточечным с-ядром, по определению обладающие DR решением, но для которых уравнивающее решение не пересекается с с-ядром. Таким образом, возникает задача описания подклассов сбалансированных игр, обладающих DR решением.

Эту задачу можно сформулировать и для классов игр с ограничениями на кооперацию. Она оказывается более сложной, так как характеристическая функция задается на произвольном наборе коалиций, и решение зависит не только от значений характеристической функции, но и от самого набора допустимых коалиций.

Если в игре с ограниченной кооперацией и непустым с-ядром существует вектор, доминирующий по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра, мы будем называть этот вектор *решением Дутта–Рэя (ВК)*, как и для классических ТП игр. Напомним, что с-ядро для игр с ограниченной кооперацией рассматривалось в различных постановках разными авторами (см., напри [8]). С-ядром игры с ограниченной кооперацией (N, v, Ω) называется множество

$$C(N, v, \Omega) = \{x \in X^*(N, v) \mid x(S) \geq v(S) \text{ для всех } S \in \Omega\}.$$

В следующем параграфе для игр с ограниченной кооперацией и с непустым с-ядром будут даны два способа проверки совпадения уравнивающего решения с решением Дутта–Рэя.

3 Решение Дутта–Рэя для игр с ограниченной кооперацией

3.1 Определение и существование DR-решения для игр с ограниченной кооперацией

Ввиду того, что понятие выпуклости игры с ограниченной кооперации имеет смысл только для наборов допустимых коалиций Ω, являющихся кольцами, т.е. из $S, T \in \Omega$ следует $S \cup T, S \cap T \in \Omega$, в этом параграфе мы будем рассматривать класс игр с $\mathcal{G}_c^r$ ограниченной кооперацией и непустыми с-ядрами. Определим решение Дутта–Рэя для этого класса игр.

Определение 4 Для произвольной игры $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_c^r$, вектор $x = DR(N, v, \Omega)$, если $x \in C(N, v, \Omega)$ и x доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра $C(N, v, \Omega)$.

Известно, что не все сбалансированные ТП игры обладают DR-решением. Следовательно, решение, задаваемое Определением 4, не удовлетворяет условию непустоты. Будем пытаться найти подкласс класса $\mathcal{G}_c^r$, для которого DR решение существует, с помощью уравнивающего решения для игр с ограниченной кооперацией, а именно, выяснением условий, при которых оно совпадает с DR решением.

Определим следующий класс $\mathcal{G}_{ec}^r \subset \mathcal{G}_c^r$ класс игр с ограниченной кооперацией:

$$(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{ec}^r \iff ESOS(N, v, \Omega) \cap C(N, v, \Omega) \neq \emptyset,$$

и, соответственно,обозначим через $\mathcal{G}_{ec_N}^r \subset \mathcal{G}_{ec}^r$ его подкласс с множестволм игроков N.

Напомним определение доминирования по Лоренцу. Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ через x^* обозначим вектор, компоненты которого совпадают с компонентами x, но расположенными в порядке возрастания: $x_1^* \leq x_2^* \leq \ldots \leq x_n^*, n = |N|$. *Кривой Лоренца* вектора x называется вектор $L(x) \in \mathbb{R}^N$, компоненты которого равны $L_k(x) = \sum_{i=1}^k x_i^*, k = 1, \ldots, n$.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^N$. Вектор x *доминирует по Лоренцу* вектор y, $x \succ_{Lor} y$, если $L(x) \geq L(y)$, и $L(x) \neq L(y)$.

Приведем несколько свойств доминирования по Лоренцу.

Утверждение 1 *Пусть $y \in \mathbb{R}^N$ – произвольный вектор, и для некоторых $1 \leq j_1 < j_2 \leq |N|$ $L_{j_1}(y) = a < b = L_{j_2}(y)$. Тогда для всех $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) \leq a + (b-a) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}$.*

Доказательство. . Предположим, что для некоторого $j \in (j_1, j_2)$ $L_j(y) > a + (b-a) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}$. Тогда

$$L_j(y) - L_{j_1}(y) = \sum_{l=j_1+1}^{j} y_l^* > \frac{j-j_1}{j_2-j_1} \cdot (b-a).$$

Так как компоненты y_l^* не убывают с ростом l,

$$y_j^* > \frac{b-a}{j_2-j_1}, \tag{3}$$

и для всех $l > j$ неравенство (3) также справедливо. Следовательно,

$$\sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > (b-a)\frac{j_2-j_1}{j_2-j_1} = b-a,$$

т.е.

$$b = L_{j_2}(y) = L_{j_1}(y) + \sum_{l=j_1+1}^{j_2} y_l^* > a + b - a,$$

что невозможно. □

Лемма 1 *Пусть* $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_N^r$ *– произвольная игра,* $x \in ESOS(N, v, \Omega)$*. Тогда* $x \succ_{Lor} y$ *для всех* $y \in X(N, v)$*, таких что* $L(y) \neq L(x)$ *и* $y(R_k) \geq v(R_k)$ *для* $k = 1, ..., m$*, где вектор* x *имеет представление (1), а* $R_k = \bigcup_{j=1}^{k} T_j$*.*

Доказательство. . Пусть вектор x имеет вид (1), а вектор and y удовлетворяет условиям леммы. Тогда

$$L_j(x) = \sum_{k=n-j+1}^{n} x_k. \tag{4}$$

Из неравенств $x(R_k) \leq y(R_k)$ следуют неравенства $x(N \setminus R_k) \geq y(N \setminus R_k), k = 1, \ldots, m$, а из (4) мы получаем равенство $x(N \setminus R_k) = L_{|N \setminus R_k|}$. Следовательно, $y(N \setminus R_k) \geq L_{N \setminus R_k}(y)$, откуда следуют неравенства

$$L_j(y) \leq L_j(x) \text{ for } j = |N \setminus R_k|, k = 1, \ldots, m. \tag{5}$$

Обозначим $j_1 = |N \setminus R_k|, j_2 = |N \setminus R_{k-1}|$ для некоторого произвольного $k = 1, \ldots, m-1$. Тогда для $j \in (j_1, j_2)$

$$L_j(x) = L_{j_1}(x) + (L_{j_2}(x) - L_{j_1}(x)) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1}. \tag{6}$$

По Утверждению 1 справедливы неравенства

$$L_j(y) \leq L_{j_1}(y) + (L_{j_2}(y) - L_{j_1}(y)) \cdot \frac{j-j_1}{j_2-j_1} \text{ для } j \in (j_1, j_2). \tag{7}$$

Из неравенств (5),(7) и равенства (6) следует неравенство $L_j(y) \leq L_j(x)$. Так как $k = 1, \ldots, m-1$ и $j \in (j_1, j_2)$ были выбраны произвольно, $L_j(x) \geq L_j(y)$ для всех $j \in N$. □

Следствие 1 *Если для игры* $(N,v,\Omega)\in\mathcal{G}^r_{ec}$ *вектор* $x\in ESOS(N,v,\Omega)\cap C(N,v,\Omega)$, *то* $x\succ_{Lor} y$ *для всех* $y\in C(N,v,\Omega), y\neq x$

Доказательство. . Представим x в виде (1), и пусть $y\in C(N,v,\Omega)$ – произвольный вектор. Если $L(x)\neq L(y)$, то $x\succ_{Lor} y$ по Лемме 4.

Остается показать, что для $y\neq x$ $L(y)\neq L(x)$. Для всех $k=1,\dots,m$. справедливы неравенства $y(R_k)\geq x(R_k)$. Предположим, что $y_{T_1}\neq x_{T_1}$. Тогда найдется такое $j\in T_1$, что $y_j>a_1=\max_{i\in N}x_i$, откуда следует $L(x)\neq L(y)$.

Пусть теперь $y_{R_{k-1}}=x_{R_{k-1}}$ для некоторого $k=2,\dots,m$, а $y_{T_k}\neq x_{T_k}$. Тогда найдется такое $j\in T_k$, что $y_j>x_j=a_k$, и в этом случае также равенство $L(x)=L(y)$ невозможно.

□

Следствие 1 показывает, что в классе $\mathcal{G}^r_{ec}$ уравнивающее решение совпадает с DR-решением, и в этом классе DR-решение не пусто.

Пусть $x\in\mathbb{R}^N$ – произвольный вектор. Обозначим через $\mathcal{G}^{rx}_N\subset\mathcal{G}^r_{ec_N}$ класс игр, для которых $x=DR(N,v,\Omega)$.

Представим x в виде

$$x=(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{T_1},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{T_2},\dots\underbrace{a_k\dots,a_m}_{T_m}), \tag{8}$$

где $a_1>a_2>\ldots>a_m$, и обозначим $R_j=\bigcup_{l=1}^{j}T_l$, $j=1,\dots,m$.

Тогда классы $\mathcal{G}^{rx}_N$ можно охарактеризовать следующим образом:

Утверждение 2 *Для того чтобы игра* (N,v,Ω) *принадлежала классу* $\mathcal{G}^{rx}_N$ *необходимо и достаточно выполнение равенств* $v(R_j)=x(R_j), j=1,\dots,m$, *и неравенств* $v(S)\leq\sum_{j=1}^m a_js_j$ *для остальных коалиций* $S\in\Omega$, *где* $S_j=S\cap T_j, s_j=|S_j|$, *а коалиции* R_j,T_j, *и числа* $a_j, j=1,\dots,m$ *определены в представлении (8).*

Доказательство. . *Необходимость.* Пусть $(N,v,\Omega)\in\mathcal{G}^{rx}_N$. Тогда $x=DR(N,v,\Omega)$, и $x\in C(N,v,\Omega)$. Из равенства $x=DR(N,v)$ следуют равенства $x(R_j)=v(R_j), j=1,\dots,m$, а из $x\in C(N,v,\Omega)$ следует равенство $x(S)=\sum_{j=1}^m a_js_j\geq v(S), S\in\Omega$.

Достаточность. Пусть (N,v,Ω)– произвольная игра, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда $x\in C(N,v,\Omega)$ и по Утверждению 1 вектор x доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра. Следовательно, $x=DR(N,v,\Omega)$ и $(N,v,\Omega)\in\mathcal{G}^{rx}_N$.

□

Таким образом, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограничениями, для которых ESOS совпадает с DR-решением, описывается следующим образом:

$$\mathcal{G}^r_{ec}=\bigcup_{N\subset\mathcal{U}}\{(N,v,\Omega)\,|\,x\in ESOS(N,v,\Omega)\iff x(R_j)=v(R_j),\sum_{j=1}^k a_j\geq v(S)\}, \tag{9}$$

в представлении (8) вектора x.

Формула (9) описывает класс игр $\mathcal{G}^r_{ec}$ не столь явно, как например, определение класса выпуклых игр. Однако из Утверждения 2 следует, что для того чтобы проверить, принадлежит ли игра (N,v,Ω) к этому классу, достаточно найти множество $ESOS(N, v, \Omega)$ и, в случае если оно одноточечно, $ESOS(N, v, \Omega) = x$, проверить сбалансированность ТП игры (N, v_x), где

$$v_x(S) = \begin{cases} v(S) & \text{если } S \in \Omega, \\ x(S) & \text{если } S \notin \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Эта процедура не сложнее, чем проверка выпуклости ТП игры. Следовательно, класс $\mathcal{G}^r_{ec}$ игр с ограниченной кооперацией, для которых ESOS совпадает с DR-решением, определен корректно. Более того, для частного случая классических ТП игр, когда набор Ω состоит из всех коалиций, соответствующий подкласс класса $\mathcal{G}^r_{ec}$ оказывается шире, чем класс выпуклых игр.

Замечание 1 DR-решение может существовать и в играх с ограниченной кооперацией, не принадлежащих классу $\mathcal{G}^r_{ec}$. Примером является следующая игра (N, v, Ω) трех лиц: $\Omega = N, \{1, 2\}, \{1, 3\}$, $v(N) = v(1, 2) = v(1, 3) = 1$. В этой игре с-ядро состоит из единственного дележа $x = (1, 0, 0)$, являющегося DR-решением. Однако $ESOS(N, v, \Omega) = (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2)$. Нахождение класса всех игр, обладающих DR-решением, является открытой задачей.

3.2 Свойства DR-решения для игр с ограниченной кооперацией

В этом пункте мы проверим, какие свойства DR-решения, которыми оно обладает в классе выпуклых ТП игр, сохраняются и для игр с ограниченной кооперацией, а какие могут не иметь места. Будем рассматривать свойства DR-решения во всем классе $\mathcal{G}^r$, хотя оно может оказаться пустым для некоторых игр из этого класса. Очевидно, что DR-решение в играх с ограниченной кооперацией анонимно.

Покажем, что оно коалиционно монотонно. Для класса выпуклых ТП игр это свойство DR-решения было доказано Хокари и ван Геллекомом [6]

Сформулируем определение свойства коалиционной монотонности для игр с ограниченной кооперацией:

Одноточечное решение Φ на классе $\mathcal{G}^r_N$ *коалиционно монотонно*, если для игр $(N, v, \Omega), (N, w, \Omega) \in \mathcal{G}^r_N$, таких что $\Phi(N, v, \Omega), \Phi(N, w, \Omega) \neq \emptyset$ $v(S) \leq w(S)$ для некоторой коалиции $S \in \Omega$, $v(T) = w(T)$ ддля всех $T \in \Omega, T \neq S$, справедливы следующие неравенства :
$\Phi_i(N, v, \Omega) \leq \Phi_i(N, w, \Omega)$ для всех $i \in S$.

Следующая теорема является обобщением аналогичного результата Хокари и ван Геллекома [6], показывающего коалиционную монотнность DR-решения на классе выпуклых ТП игр.

Теорема 1 *DR-решение коалиционно монотонно в классе $\mathcal{G}^r$.*

Доказательство. Заметим, что если $x = DR(N, v, \Omega)$, то $x = DR(N, v_x, \Omega,$ где (N, v_x) – ТП игра, характеристическая функция которой определена в (10). Действительно, из определения игры (N, v_x) имеет место равенство $C(N, v, \Omega) = C(N, v_x)$, откуда и следует $x = DR(N, v_x)$.

Далее доказательство теоремы следует из Леммы 2 в цитированной статье [6], так как вектор $x = DR(N, v_x)$, который доминирует по Лоренцу все остальные векторы из с-ядра $C(N, v_x)$, совпадает с множеством максимальных по Лоренцу векторов $L(N, v)$. ???????????????? $\square$

Покажем теперь, что DR-решение в классе $\mathcal{G}^r_{ec}$ удовлетворяет свойству согласованности в определении Дэвиса–Машлера [2] для произвольного универсального множества игроков $\mathcal{N}$.

Для заданной игры (N, v, Ω) с ограниченной кооперацией *редуцированной игрой* на множество игроков $S \subset N$ относительно вектора выигрышей $x \in X(N, v)$ называется игра $(S, v^x_S, \Omega|_S) \in \mathcal{G}^r_S$, где

$$v^x_S(T) = \begin{cases} v(N) - x(N \setminus S) \text{ если } T = S, \\ \max\limits_{\substack{Q: T \cup Q \in \Omega \\ Q \subset N \setminus S}} (v(T \cup Q) - x(Q)), \qquad \text{если } T \subsetneqq S, \end{cases} \tag{11}$$

$$\Omega|_S = \{T \subset S \mid \exists Q \subset N \setminus S, T \cup Q \in \Omega\}.$$

Теорема 2 *DR-решение согласовано в определении Дэвиса–Машлера в классе* $\mathcal{G}^r_c$

Доказательство. Пусть $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}^r_c$ – произвольная игра, для которой существует DR-решение $x = DR(N, v, \Omega) \in C(N, v, \Omega) = C(N, v_x)$. Тогда $x \succ_{Lor} y$ для всех $y \in C(N, v, \Omega) \setminus \{x\}$. Пусть $i \in N$ – произвольный игрок. Рассмотрим редуцированную игру $(N \setminus \{i\}, v^x_{N\setminus\{i\}})$ на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

Так как с-ядро ТП игр согласовано по Дэвису–Машлеру [] $x^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$, где $(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x)$ – редуцированная игра игры of (N, v_x) на множество игроков $N \setminus \{i\}$ относительно x.

По определению редуцированной игры (11)

$$C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x) = C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega|_S). \tag{12}$$

Покажем, что $x^i \succ_{Lor} y^i$ для всех $y^i \in C(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_{N\setminus\{i\}}, \Omega|_S)$.

Из сильной согласованности с-ядра [?] и из равенства (17) следует$(y^i, x_i) \in C(N, v_x)$, откуда мы получаем

$$x \succ_{Lor} (y^i, x_i). \tag{13}$$

Из равенства (13) следует $x^i \succ_{Lor} y^i$ (см. Замечание 2 в статье [?] Следовательно, $x^i = DR(N \setminus \{i\}, v^{x_i}_x, \Omega|_{N\setminus\{i\}})$. □

Однако, в отличие от выпуклых ТП игр, DR-решение на классе $\mathcal{G}^r_c$ не удовлетворяет свойству обратной согласованности, что не позволяет дать его аксиоматическую характеризацию для этого класса, обобщающую аксиоматизацию DR-решения на классе выпуклых игр, данную в [4]

4 Игры с ограниченной кооперацией, порожденной разбиением

4.1 Игры с коалиционной структурой

В теории кооперативных игр известны модели, называемые *кооперативными играми с коалиционной структурой (КС)*. Такая игра задается тройкой $(N, v, \mathcal{B})$, где N – множество игроков, $v : 2^N \to \mathbb{R}$ – характеристическая функция, $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_k)$ – разбиение множества N. Решения кооперативных игр с КС определяются так же, как для классических ТП игр, но с учетом разбиений как первого уровня кооперации. Наиболее известным одноточечным решением для кооперативных игр с КС является значение Оуэна [9], являющегося модификацией значения Шепли для этого класса игр.

Существуют различные подходы к определению набора допустимых коалиций для игр с КС. Некоторые авторы рассматривают КС для дополнительного ограничения на множество допустимых векторов выигрышей: суммарный выигрыш игроков каждой коалиции разбиения не должен превышать соответствующего значения характеристической функции [10]. При этом все коалиции считаются допустимыми.

Оуэн [9] также рассматривал полностью заданную кооперативную ТП игру (N, v) и разбиение $\mathcal{B} = (B_1, ..., B_r)$ на множестве игроков. Однако фактически значение Оуэна зависит только от значений характеристической функции на коалициях S, имеющих вид

$$S = \bigcup_{J \subset \{1,...,k\}} B_i \cup T, \text{ где } T \subset B_i, i \notin J. \tag{14}$$

Следовательно, можно считать, что значение Оуэна является решением игры с ограниченной кооперацией, допустимый набор коалиций Ω которой состоит из коалиций, определенных в (14).

Другой модификацией значения Шепли для кооперативных игр с КС является значение Камийо [7]. Это значение зависит от меньшего набора допустимых коалиций, чем значение Оуэна, а именно, от коалиций S, имеющих вид

$$S \subset B_i, i = 1, ..., k \text{ или } S = \bigcup_{j \in J \subset \{1,...,k\}} B_j, \tag{15}$$

т.е. набор допустимых коалиций в этом случае состоит из коалиций разбиения и их объединений, а также от всех подкоалиций каждой коалиции разбиения.

Оказывается, что для такой набора коалиций можно определить понятие выпуклости игр и определить два различных эгалитарных решения, являющихся модификациями решения Дутта–Рэя. Более того, свойство выпуклости кооперативных игр с КС и наборами допустимых коалиций вида 15 позволяет дать аксиоматические характеризации этих решений. Это будет сделано в настоящем параграфе.

4.2 Выпуклые игры с коалиционными структурами

Рассмотрим класс кооперативных игр с КС $\mathcal{G}_{cs} \subset \mathcal{G}^r$, определяемый допустимыми наборами коалиций вида 15), т.е. $(N, v, \Omega) \in \mathcal{G}_{cs}$, если существует такое разбиение $\mathcal{B} = (B_1, B_2, ..., B_k)$ множества N, что

$$\Omega = \{S \subset N \,|\, S \subset \mathcal{B} \text{ or } S \subset B_j, j = 1, ..., k\}. \tag{16}$$

Мы будет обозначать такие наборы коалиций $\Omega(\mathcal{B})$.

Для каждой игры (N, v, Ω) с КС, определяемой набором допустимых коалиций $\Omega = \Omega(\mathcal{B})$ для некоторого разбиения $\mathcal{B}$ множества N, определим *внешнюю игру* $(\mathcal{B}, v)$, множество игроков которой совпадает с множеством коалиций разбиения, а характеристическая функция определяется характеристической функцией исходной игры, и поэтому имеет то же обозначение v, и *внутренние игры* (D_j, v), являющиеся под-играми исходной игры на каждой коалиции разбиения. По определению набора $\Omega(\mathcal{B}|$ внутренняя и внешние игры являются классическими ТП играми.

Определение 5 Игра с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ называется *выпуклой*, если ее внешняя и все внутренние игры выпуклые.

Обозначим через $\mathcal{G}_{cs}^c \subset \mathcal{G}_{cs}$ класс выпуклых игр с КС. Будем доказывать, что все игры этого класса обладают DR-решением.

Начнем в применения алгоритма Дутта–Рэя к произвольной выпуклой игре с КС

$$\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B}). \tag{17}$$

Пусть

$$a_1 = \max_{S \in \Omega(\mathcal{B})} \frac{v(S)}{|S|}, \tag{18}$$

и пусть максимум в (22) достигается на коалиции $T_1 \in \Omega$. Определим игру $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$, где $\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B}|_{N \setminus T_1}))$, в соответствии с Определением 3. Характеристическая функция v^1 определяется в зависимости от вида коалиции T_1.

Эта коалиция либо является объединением коалиций разбиения $\mathcal{B}$, либо подкоалицией коалиции $B_j, j = 1, ..., k$.

В первом случае, когда максимум в (22) достигается на коалиции $T_1 = \bigcup\limits_{\substack{j \in J \\ J \subset \{1,...,k\}}} B_j$, из Определения 3 следует, что

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \in \mathcal{B}, \\ v(S), & \text{если } S \subsetneqq B_j \text{ для некоторой коалиции } B_j \cap \mathrm{B} = \emptyset. \end{cases} \tag{19}$$

Рассмотрим второй случай, когда максимум в (22) достигается на некоторой подкоалиции коалиции разбиения. Пусть $T_1 \subset B_j$ – одна из таких коалиций. Тогда в игре $\Gamma^1 = (N \setminus S, v^1, \Omega^1)$

$$\Omega^1 = \Omega(\mathcal{B})_{N \setminus T_1} = \{S \in \mathcal{B} \setminus B_j, \text{ and } S \subset B_i, i \neq j, S \subset B_j \setminus S\}.$$

Для таких коалиций

$$v^1(S) = \begin{cases} v(S), & \text{если } S \in \Omega^1, S \cap B_j = \emptyset,, \\ v(B_j) - a_1|T_1|, & \text{если } S = B_j \setminus T_1, \\ v(S \cup T_1) - a_1|T_1|, & \text{если } S \subsetneqq B_j, \\ v(\mathrm{B}) - a_1|S|, & \text{если } S = (\mathrm{B} \setminus B_j) \cup (B_j \setminus T_1), \\ & \text{где } \mathrm{B} \subset \mathcal{B}, B_j \subset \mathrm{B}. \end{cases} \tag{20}$$

Используя формулы (19,(20), получаем следующий результат:

Лемма 2 *Игра* $\Gamma^1 = (N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ *является выпуклой игрой с КС.*

Следовательно, алгоритм корректно определен для выпуклых игр с КС, и в результате за конечное число шагов мы получим вектор $x =$

$(\underbrace{a_1,\dots,a_1}_{T_1},\underbrace{a_2,\dots,a_2}_{T_2},...,a_k,...,a_k)$, где $a_1 > a_2 > ... > a_k$, и игроки упорядочены в соответствии с убыванием выигрышей.

Заметим, что на некотором шаге алгоритма соответствующий максимум может достигаться на нескольких коалициях. В случае классической выпуклой игры максимум в этом случае достигается и на объединении этих коалиций, и именно это свойство позволяет доказать, что алгоритм приводит к единственному вектору выигрышей. В рассматриваемом случае игр с КС объединение двух допустимых коалиций может оказаться не недопустимым. Поэтому, не доказывая единственности вектора – результата применения алгоритма, будем брать в качестве x произвольный вектор из набора возможных.

Рассмотрим аддитивные расширения игры $(N,v,\Omega(\mathcal{B}))$ с КС до ТП игры (N,v). Каждая коалиция $S\subset N, S\notin\Omega(\mathcal{B})$ может быть представлена единственным образом как объединение максимальных допустимых коалиций следующим образом:

$$S=\bigcup_{j\in J_1}B_j\cup\bigcup_{j\in J_2}S_j, \tag{21}$$

где $J_1,J_2\subset\{1,2,...,k\}, J_1\cap J_2=\emptyset, J_2\neq\emptyset$. Положим для коалиций таких коалиций S

$$v_{ae}(S)=v(\bigcup_{j\in J_1}B_j)+\sum_{j\in J_2}v(S_j). \tag{22}$$

Лемма 3 *Если игра* $\Gamma=(N,v,\Omega(\mathcal{B}))\in\mathcal{G}^c_{cs}$, *то ее аддитивное расширение* $\Gamma_{ea}=(N,v_{ae})$ *является выпуклой ТП игрой.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}=(B_1,B_2,...,B_k)$, и $S,T\subset N, S\cap T\neq\emptyset$. Представим коалиции S,T в виде (21):

$$\begin{aligned} S &= \bigcup_{j\in J_1}B_j\cup\bigcup_{j\in J_2}S_j,\\ T &= \bigcup_{j\in J_3}B_j\cup\bigcup_{j\in J_4}S_j, \end{aligned} \tag{23}$$

где $J_i\subset\{1,...,k\}, i=1,2,3,4,\ (J_1\cup J_2)\cap(J_3\cup J_4)\neq\emptyset$. Тогда

$$\begin{aligned} S\cup T &= \bigcup_{j\in J_1\cup J_3}B_j\cup\bigcup_{j\in J_2\cup J_4}T_j,\\ S\cap T &= \bigcup_{j\in J_1\cap J_3}B\cup\bigcup_{j\in J_2\cap J_4}T_j. \end{aligned} \tag{24}$$

Используя формулы (23),(24)), получим равенство

$$v(S)+v(T)=v\Big(\bigcup_{j\in J_1}B_j\Big)+\sum_{j\in J_2}v(S_j)+v\Big(\bigcup_{j\in J_3}B_j\Big)+\sum_{j\in J_4}v(T_j). \tag{25}$$

В правой части равенства (25) стоит сумма значений характеристической функции v от допустимых коалиций из $\Omega(\mathcal{B})$. Так как игра $(N,v,\Omega(\mathcal{B}))$ выпуклая, справедливы неравенства we have the inequalities

$$v\Big(\bigcup_{j\in J_1}B_j\Big)+v\Big(\bigcup_{j\in J_3}B_j\Big)\le v\Big(\bigcup_{j\in J_1\cup J_3}B_j\Big)+v\Big(\bigcup_{j\in J_1\cap J_3}B_j\Big), \tag{26}$$

$$\sum_{j\in J_2} v(S_j)+\sum_{j\in J_4} v(T_j)\le \sum_{j\in J_2\setminus J_4} v(S_j)+\sum_{j\in J_4\setminus J_2} v(T_j)+\sum_{j\in J_2\cap J_4} v(S_j\cap T_j) \qquad (27)$$

Из равенства () и неравенств (26) и (27) следует неравенство

$$v(S)+v(T)\le v(S\cup T)+v(S\cap T),$$

завершающее доказательство. □

Применим теперь алгоритм Дутта–Рэя к игре Γ_{ae}. Тогда на первом шаге максимум $\max_{S\subset N}\frac{v_{ae}(S)}{|S|}$ будет достигаться на той же коалиции T_1, что и максимум в (22). Рассмотрим игру $(N\setminus T_1,(v_{ae})^1)$, где

$$(v_{ae})^1(S)=v_{ae}(S\cup T_1)-a_1|T_1| \text{ for all } S\subset N\setminus T_1. \qquad (28)$$

Лемма 4 *$(v_{ae})^1=(v^1)_{ae}$, где игра $(N\setminus T_1,(v^1)_{ae})$ является аддитивным расширением игры с КС $\Gamma^1=(N\setminus T_1,v^1,\Omega^1)$.*

Доказательство. Пусть $S\subset\Omega^1$ – произвольная коалиция. Тогда очевидно, что $(v^1)_{ae}(S)=(v_{ae})^1(S)$. Теперь пусть $S\subset N\setminus T_1, S\notin\Omega^1$. Рассмотрим следующие случаи.

1. $T_1\subsetneqq B_l$. Если $S\subset N\setminus T_1, S\notin\Omega^1$, то S разлагается на коалиции из Ω^1 следующим образом:

$S=\mathrm{B}'\cup Q$, где $\mathrm{B}'=\bigcup_{j\in J_1}B'_j$, $Q=\bigcup_{j\in J_2}S_j$, $B'_j=B_j$ for $j\ne l$, $B'_l=B_l\setminus T_l$, $S_j\in B'_j, J_1,J_2\subset\{1,...,k\}, J_1\cap J_2=\emptyset$.

1a) $l\in J_1$. Тогда

$$(v^1_{ae}(S)=v^1(\mathrm{B}')+\sum_{j\in J_2}v^1(S_j)=v(\mathrm{B})-a_1|T_1|+\sum_{j\in J_2}v(S_j). \qquad (29)$$

1b) $l\notin J_1,J_2$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S)=v(\mathrm{B})+\sum_{j\in J_2}v(S_j)=v(\mathrm{B})+\sum_{j\in J_2}v(S_j)+v(T_1)-a_1|T_1|. \qquad (30)$$

1c) $l\in J_2$. Тогда $v^1(S_l)=v(S_l\cup T_l)-a_1|T_1|$,

$$(v^1)_{ae}(S)=v(\mathrm{B})+\sum_{\substack{j\in J_2\\ j\ne l}}v(S_j)+v(S_j\cup T_l)-a_1|T_1|. \qquad (31)$$

Равенства (35)–(31) доказывают лемму для случая 1.

2. $T_1=\mathrm{B}_1=\bigcup_{j\in J_1\subset\{1,\dots,k\}}B_j$. В этом случае, если $S\subset N\setminus T_1, S\notin\Omega^1$, то S разлагается на коалиции из from Ω^1 следующим образом:

$S=\mathrm{B}_2\cup Q$, где $\mathrm{B}_2=\bigcup\limits_{\substack{j\in J_2\subset\{1,\dots,k\}\\ J_2\cap J_1=\emptyset}}B_j$, $Q=\bigcup\limits_{j\in J_3}S_j$, $S_j\subsetneqq B_j$, $J_3\cap(J_1\cup J_2)=\emptyset$. Тогда

$$(v^1)_{ae}(S)=v(\mathrm{B}_2\cup T_1)+\sum_{j\in J_3}v(S_j)-a_1|T_1|=v_{ae}(S\cup T_1)-a_1|T_1|=(v_{ae})^1(S).$$

□

Теорема 3 *В классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ выпуклых игр с КС DR-решение не пусто*

Доказательство. Рассмотрим произвольную выпуклую игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Для сохранения обозначений пусть она совпадает с игрой Г (17). Из Леммы 1 следует, что игра с КС $(N \setminus T_1, v^1, \Omega^1)$ выпуклая, а из Лемм 2 и 3 следует, что ТП игра $(N \setminus T_1, (v_{ae})^1)$ выпуклая. Следовательно,и на всех остальных шагах алгоритма $j = 2, 3, ..m$ справедливы равенства $v^j_{ae}(S) = (v^j)_{ae}(S)$ для всех $S \subset N \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} T_1$, откуда и получается равенство $DR(N, v_{ae}) = DR(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. $\square$

Из Теоремы 3 следует, что класс $\mathcal{G}^c_{cs} \subset \mathcal{G}^r_{ec}$, и класс ТП игр, характеристические функции которых являются аддитивными расширениями игр из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, содержится в классе выпуклых ТП игр. Поэтому из Теорем 1 и 2 следует, что DR-решение в классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ коалиционно монотонно и согласовано в определении Дэвиса–Машлера. Очевидно, что для $|N| = 2$ $\mathcal{G}^c_{cs_N} = \mathcal{G}^r_{ec}$ = классу супер-аддитивных (выпуклых) ТП игр двух лиц, и DR-решение для этого класса совпадает с решением ограниченного эгалитаризма (CE) [4].

Эти свойства позволяют построить аксиоматическую характеризацию DR-решения для класса выпуклых игр с КС, аналогичную характеризации DR-решения для выпуклых ТП игр, данной Дутта [4]

Теорема 4 *В классе $\mathcal{G}^c_{cs}$ выпуклых игр с КС DR-решение является единственным решением, удовлетворяющим одноточечности, согласованности и ограниченному эгалитаризму для игр двух лиц.*

Ввиду Теоремы 3 и установленных свойств DR-решения для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$,достаточно доказать только его единственность в этом классе. Пусть σ – произвольное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам, указанным в формулировке теоремы, $x = \sigma(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. По свойствам CE и согласованности решения σ все редуцированные игры $(\{i, j\}, v^x, \Omega|_{i,j})$ исходной игры на двухэлементные множества игроков $\{i, j\}, i, j \in N$ относительно вектора x являются супераддитивными, и игра $(\{i, j\}, v^x, \Omega|_{i,j})$ является классической ТП игрой для любых $i, j \in N$.

Покажем, что $x \in C(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. Пусть $S \in \Omega(\mathcal{B}), S \neq N$ – произвольная коалиция, и пусть $j \notin S, i \in S$. Рассмотрим редуцированную игру $(\{i, j\}, v^x)$ на множество игроков $\{i, j\}, i \in S$. По свойству CE решения σ $(x_i, x_j) \in C(\{i, j\}, v^x)$, и $x_i \geq v^x(\{i\})$. По определению редуцированной игры (11)

$$v^x\{i\} = \max_{\substack{i \cup Q \in \Omega \\ Q: i,j \notin Q}} (v(i \cup Q) - x(Q)). \tag{32}$$

Из $x_i \geq v^x(\{i\})$ и равенства 32) следует, что $x(i \cup Q) \geq v(i \cup Q)$ для всех Q, по которым берется максимум в (32). Так как коалицию $S \setminus \{i\}$ удовлетворяет этим условиям на Q, то $x(S) \geq v(S)$. Так как коалиция $S \in \Omega(\mathcal{B})$ была выбрана произвольной в наборе $\Omega\mathcal{B})$, $x \in C(N, v, \Omega$.

Покажем теперь, что для любых $i, j \in N$ редуцированная игра $(\{i, j\}, v^x)$ совпадает с соответствующей редуцированной игрой $(\{i, j\}, v^x_{ae})$. аддитивного расширения (N, v_{ae}). Рассмотрим следующие случаи:

1)$i, j \in B_t, t \in \{1, ..., k\}$. Тогда по (11)

$$v^x(\{i\}) = \max_{Q \subset B_t \setminus \{i,j\}} (v(i \cup Q) - x(Q)),$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q\subset N\setminus\{i,j\}} (v_{ae}(i\cup Q) - x(Q)). \tag{33}$$

Если $Q \notin B_t \setminus \{i,j\}$, то $Q = Q_1 \cup Q_2$, где $Q_1 \subset B_t$, $Q_2 \cap B_t = \emptyset$. По определению аддитивного расширения (22) и принадлежности x с-ядру игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, справедливо неравенство

$$v_{ae}(i\cup Q) - x(Q) \le v_{ae}(i\cup Q_1) - x(Q_1), \tag{34}$$

из которого следует равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.
2) $i \in B_t, j \in B_r, t, r \in \{1, ..., k\}$, $t \neq r$. Тогда

$$v^x(\{i\}) = \max_{J\subset\{1,\dots,k\}, y\notin J} (v(\bigcup_{l\in J} B_l) - x(\bigcup_{l\in J} B_l) + x_i,$$

$$v^x_{ae}(\{i\}) = \max_{Q\subset N\setminus\{i,j\}})(v_{ae}(i\cup Q) - x(Q).$$

Аналогично случаю 1) получаем равенство $v^x(\{i\}) = v^x_{ae}(\{i\})$.

Очевидно, что $v^x(\{i,j\}) = v^x_{ae}(\{i,j\}) = x_i + x_j$. Следовательно, редуцированные игры совпадают и, по согласованности решения of σ, $(x_i, x_j) = DR(\{i,j\}, v^x) = DR(\{i,j\}, v^x_{ae})$.

Из обратной согласованности DR-решения в классе выпуклых ТП игр [4] следует, что $x = DR(N, v_{ae})$, и из Теоремы 3 мы получаем требуемый результат $x = DR(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$. □

В следующем разделе приведем другое решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, с похожими свойствами.

4.3 DR-решение типа Камийо для класса выпуклых игр с коалиционной структурой

Для каждой игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где набор $\Omega(\mathcal{B})$ порожден разбиением $\mathcal{B}$ как определено в (17), рассмотрим внешнюю игру $(\mathcal{B}, v^*)$ (см.п.4.2) и внутренние игры $(B_i, v_i), i = 1, ..., k$, являющиеся соотвествующими под-играми игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

Камийо [7] определил следующее двухшаговое решение для игр с КС: Для произвольной игры с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, на первом шаге находится значение Шепли внешней игры $(\mathcal{B}, v^*)$, и пусть $x = Sh((\mathcal{B}, v^*)$. Далее значения характеристических функций больших коалиций B_i внутренних игр $(B_i, v_i), i = 1, ..., k$ заменяются на x_i. Такие модифицированные внутренние игры обозначим через (B_i, v^x_i). На втором шаге находятся значения Шепли игр (B_i, v^x_i). Обозначим $y^x_i = Sh(B_i, v^x_i), i = 1, ..., k$. Вектор $(y^x_i, ..., y^x_k) \in X^*(N, v)$ называется Камийо-Шепли значением игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$.

В этом разделе мы рассмотрим выпуклые игры с КС и заменим значение Шепли в предыдущем определении на DR-решение, и получим непустое одноточечное решение для этого класса, так как внешняя и все внутренние (и также модифицированные внутренние) игры выпуклые, и для них существуют DR-решения. Назовем получившееся решения для игр с КС *DR-решением типа Камийо (DR^K)*.

Это решение отличается от определенного в предыдущем разделе DR-решения для игр с КС. Покажем это на примере

Пример 1 Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{B} = \{1\}\{2, 3\}$. Рассмотрим игру с КС $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, где $v(N) = 4, v(\{1\} = 1.5, v(\{2, 3\} = 2, v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0$. Очевидно, эта игра выпуклая. Тогда DR-решение для этой игры равно $x_{DR} = (1.5, 1.25, 1.25)$.
Однако DR-решение типа Камийо $x_{DR^K} = (2, 1, 1)$.

Приведенный пример показывает, что DR-решение является "более эгалитарным"с точки зрения равноправия всех игроков. DR-решение типа Камийо сначала "уравнивает"в смысле доминирования по Лоренцу выигрыши коалиций разбиения, а на втором уровне уравнивает выигрыши игроков внутри коалиций разбиения.

Очевидно the DR$^K-$решение анонимно и принадлежит с-ядру. Однако, в отличие от DR-решения,(см. раздел 4.2), оно не является согласованным в определении редуцированной игры (11).

Пример 2 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mathcal{B} = (B_1, B_2,)\ B_1 = \{1, 2, 3\}, B_2 = \{4, 5, 6\}$.

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{для } S = \{i\}, i \in N, \text{ and } S \subsetneqq B_2,\ S = \{1,3\}, \{2,3\} \\ 1 & \text{для } S = \{4, 5, 6\}, \\ 1.5 & \text{для } S = \{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \\ 4 \text{ для } S = N. \end{cases}$$

Очевидно, игра $\Gamma = (N, v, \Omega(\mathcal{B}))$ является выпуклой игрой с КС. DR-решение внешней игры $\Gamma_{ou} = (B_1, B_2), v(B_1) = 1.5, v(B_2) = 1, v(N) = 4$ равно $DR(\Gamma_{ou}) = (2, 2)$, и $\mathrm{DR}^K(N, v, \Omega(\mathcal{B})) = x = (3/4, 3/4, 1/2, 2/3, 2/3, 2/3)$. Рассмотрим редуцированную игру Γ^{x_3}, когда игрок 3 покидает игру с выигрышем $1/2$. В этой игре $\mathcal{B}|_{N\setminus\{3\}} = (B_1\setminus\{3\}, B_2)$. Характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v_4^x(S) = \begin{cases} 0, & \text{if } S = \{i\}, i = 1, 2, 4, 5, 6 \text{ and } S \subsetneqq B_2. \\ 1.5 & \text{для } S = \{1, 2\}, \\ 1 & \text{для } S = \{4, 5, 6\} \\ 3.5 & \text{для } S = \{1, 2, 4, 5, 6\}. \end{cases}$$

Torдat $\mathrm{DR}^K(\Gamma^{x_3}) = (7/8, 7/8, 7/12, 7/12, 7/12) \neq x_{N\setminus\{3\}}$.

Однако, ввиду того что DR^K-решение является результатм двухшагового нахождения DR-решений классических выпуклых ТП игр, естественно ожидать, что оно удовлетворяет некоторому иному, возможно более слабому, свойству согласованности. Таким свойством оказывается свойство коалиционной согласованности, когда согласованность выполняется только для редуцированных игр, образованных уходом целых коалиций разбиения или их объединениями.

Определение 6 Одноточечное решение σ для класса $\mathcal{G}_{cs}$ игр с КС называется *коалиционно согласованным с смысле Дэвиса–Машлера,* если для любой игры $(N, v, \Omega(\mathcal{B}))$, и коалиции $B_j \in \mathcal{B}$ из $x = \sigma(N, v, \Omega\mathcal{B}))$ следует выполнение равенства

$$x_{N\setminus B_j} = \sigma_{N\setminus B_j}(N, v, \mathcal{B}) = \sigma(N \setminus B_j, v_x^{N\setminus B_j}, \mathcal{B} \setminus B_j),$$

где редуцированная игра определена следующим образом:

$$v_x^{N\setminus B_j}(S) = \begin{cases} v(N) - x(B_j), \\ \max\{v(S), v(S \cup B_i)\}, & \text{if } S = \bigcup_{J\subset\{1,\ldots,k\}, j\neq i} B_j \end{cases} \tag{35}$$

В этом определении предполагается, что разбиение $\mathcal{B}$ состоит более чем из одной коалиции.

Так как коалиционная структура двухточечного множества (i, j) может состоять только из единственной коалиции (i, j), или из одноточечных множеств $\{i\}, \{j\}$, любая выпуклая игра двух лиц с КС совпадает с выпуклой ТП игрой двух лиц. Таким образом, в обоих случаях свойство СЕ определяется одним и тем же способом, и Для игр этого класса $DR(N,v) = DR^K(N,v) = CE(N,v)$,

Однако если число игроков более двух, а число коалиций разбиения равно одному или двум, то определение DR^K-решения учитывает неравноправие коалиций разбиения и коалиций, содержащихся в единственной коалиции разбиения. Это свойство формулируется в виде следующего СЕ свойства для игр с КС:

Определение 7 Одноточечное решение σ для класса $\mathcal{G}_{cs}$ игр с КС, содержащих две коалиции разбиения и удовлетворяющие коалиционной соласованности, удовлетворяют свойству *коалиционного ограниченного эгалитаризма (CCE)*, если для любой игры $(N,v,\Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^r$, $\mathcal{B} = (B_i, B_j)$ и $x = \sigma(N,v,\Omega(\mathcal{B}))$ из неравенства $x(B_i) > x(B_j)$ следует равенство $x(B_i) = v(B_i)$.

Заметим, что это определение совпадает со свойством СЕ для случая игр двух лиц.

Приведем теперь аксиоматическую характеризацию DR^K-решения для класса выпуклых игр с КС.

Теорема 5 *Единственным одноточечным решением для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющим свойством непустоты, CCE для разбиений, состоящих из двух коалиций, CE для игр двух лиц, CCONS, и согласованности для разбиения, состоящих из одной коалиции, является DR^K-решение.*

Доказательство. Свойство коалиционной согласованности DR^K-решения фактически означает согласованность решения внешней игры Из того факта, что для первым шагом нахождения DR^K-решения является нахождение DR-решения внешней игры, которое является согласованным, решение DR^K обладает свойством коалиционной согласованности.

Остальные свойства непосредственно следует определения DR^K-решения и уже доказанных свойств DR-решения.

Пусть теперь Φ– произвольное одноточечное решение для класса $\mathcal{G}^c_{cs}$, удовлетворяющее всем свойствам теоремы.

Рассмотрим класс $\mathcal{G}'$ выпуклых ТП игр, таких что любая игра $(K,v) \in \mathcal{G}'$ является внешней игрой некоторой игры $(N,v,\Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ с $\mathcal{B} = (B_1,...,B_k), k = |K|$. Очевидно, что класс $\mathcal{G}'$ совпадает с классом всех выпуклых ТП игр $\mathcal{G}^c$. Обратно, для любой игры $(N,v,\Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$ ее внешняя игра принадлежит классу $\mathcal{G}$. Следовательно, по теореме Дутта, коалиционной согласованности и свойству коалиционного ограниченного эгалитаризма решения Φ, для любой игры из класса $\mathcal{G}^c_{cs}$ решение Φ ее внешней игры совпадает с DR-решением. Пусть $x = \Phi(N,v,\Omega(\mathcal{B})) \in \mathcal{G}^c_{cs}$. Мы доказали справедливость равенств

$$x(B_i) = \Phi_i(K,v) = DR_i(K,v), i \in K. \tag{36}$$

Рассмотрим внутреннюю игру (B_i, v^x), где характеристическая функция v^x определяется следующим образом:

$$v^x(S) = \begin{cases} x(B_i) & \text{if } S = B_i, \\ v(S) & \text{if } S \subsetneq B_i. \end{cases}$$

По определению (11) согласованности решения для класса $\mathcal{G}_{cs}$, эта игра совпадает с редуцированной игрой игры Γ на множество игроков B_i относительно вектора выигрышей x. Следовательно, по согласованности решения $\Phi(B_i, v^x)$ и по теорем Дутта получаем равенства

$$x_{B_i} = \Phi(B_i, v^x) = DR(B, v^x), i \in K. \tag{37}$$

Равенства (36) и (37) завершают доказательство теоремы. $\square$

Список литературы

[1] Branzei R., Dimitrov D., Tijs S. (2006) The equal split-off set for cooperative games. Game Theory and Mathematical Economics// Banach Center Publications, vol.71. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warszawa, pp39-46

[2] Davis M., Maschler M. (1965) The kernel of a cooperative game// Naval Research Logistic Quarterl. – 1965. – 12. – C.223-259

[3] Driessen T. (1986) k-convex games n-person games and their cores// Zeitschrift für Operations Research. Series A. – 30. – C. 49-84.

[4] Dutta B (1990) The egalitarian solution and the reduced game properties in convex games// International Journal of Game Theory. – 19. – C.153-159

[5] Dutta B., Ray D. (1989). A concept of egalitarianism under participation constraints// Econometrica. – 57.–C.615-630

[6] T. Hokari, A. van Gellekom (2002) Population monotonicity and consistency in convex games: Some logical relations// International Journal of Game Theory. – 31. – C.593-607.

[7] Kamijo Y. (2009) A two-step value for cooperative games with coalitional structures// International Game Theory Review. – 11. – C.207-214

[8] Llerena F (2007) An axiomatization of the core of games with restricted cooperation// Economic Letters. – 95. – C.80-84

[9] Owen G. (1977), Values of games with a priori unions// Essays in Mathematical Economics and Game Theory (eds. Henn R. and Moeschlin O.) Springer-Verlag. Berlin. 76–88.

[10] Peleg B., Sudhölter P. (2003) Introduction to the Theory of Cooperative Games// Kluwer Academic Publishers. Boston. 380pp.