ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2015, том 464, № 2, с. 136–140

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА НА ВЕСОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КРАЕМ

© 2015 г. А. В. Колесников, Э. Мильман (E. Milman)

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 03.12.2014 г.
Поступило 06.04.2015 г.

Хорошо известно, что с помощью формулы Бохнера–Лихнеровича–Вайценбека можно получать неравенства типа Пуанкаре на римановых многообразиях с мерой, удовлетворяющих обобщенному условию Бакри–Эмери. Для случая многообразий с краем подходящим обобщением является формула Райлли. Систематически используя формулу Райлли в сочетании с различными комбинациями условий на край многообразия и граничных условий для эллиптических уравнений, мы получаем новые неравенства типа Пуанкаре для многообразий с мерой. Получено обобщение неравенства Колесанти, доказанного ранее в евклидовом пространстве. Из него вытекает обобщение неравенств типа Брунна–Минковского для многообразий. Изучено новое уравнение эволюции поверхностей на римановых многообразиях, дающее в евклидовом случае сложение выпуклых тел по Минковскому. Наш подход охватывает широкий класс выпуклых мер, в том числе меры с тяжелыми хвостами, соответствующие отрицательной аналитической размерности.

DOI: 10.7868/S0869565215260035

Рассмотрим весовое многообразие (многообразие с мерой) (M, g, μ), т.е. гладкое, полное, компактное, связное, ориентированное многообразие (M, g) с краем ∂M, наделенное мерой $\mu = e^{-V}d\,\mathrm{Vol}M$, где Vol_M – риманов объем, V – дважды дифференцируемая функция. Край ∂M предполагается гладким многообразием с внешней нормалью ν. Через $L = \Delta - \langle \nabla V, \nabla\rangle$ обозначим соответствующий диффузионный оператор, симметричный относительно относительно μ. Символы ∇ и Δ обозначают соответствующую связность Леви–Чевиты и оператор Лапласа–Бельтрами. Вторая квадратичная форма ∂M обозначается символом II. Величины $H_g = \mathrm{tr}(\mathrm{II})$ и $H_\mu = H_g - \langle \nabla V, \nu\rangle$ называются средняя и обобщенная кривизна соответственно. Символом $\nabla^2 f$ обозначается гессиан функции f, а $\|\nabla^2 f\|$ – его норма Гильберта–Шмидта. Под $\mu|_{\partial M}$ мы подразумеваем меру с плотностью e^{-V} относительно риманова объема на ∂M. Вариацией функции f на множестве Ω относительно меры μ будем называть величину

$$\mathrm{Var}_\mu(f) := \int_\Omega \left(f - \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f d\mu\right)^2 d\mu.$$

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва
Технион – Израильский институт технологии, Хайфа, Израиль
E-mail: sascha77@mail.ru

Хорошо известно [1], что неравенства Соболева, а также различные неравенства изопериметрического типа на многообразиях можно получить в предположении ограниченности снизу тензора Риччи и ограниченности сверху топологической размерности. В ситуации многообразий с весом в качестве основной характеристики, определяющей спектральные свойства пространства, выступает N-мерный тензор Бакри–Эмери

$$\mathrm{Ric}_{\mu, N} = \mathrm{Ric}_g + \nabla^2 V - \frac{1}{N-n} dV \otimes dV,$$

где Ric_g – тензор Риччи многообразия M. Случай $N = n$ отвечает постоянной функции V. Для случая $N = \infty$ будем использовать обозначение Ric_μ, т.е.

$$\mathrm{Ric}_\mu = \mathrm{Ric}_{\mu,\infty} = \mathrm{Ric}_g + \nabla^2 V$$

есть классический тензор Бакри–Эмери. В качестве достаточного условия для ряда неравенств весьма часто выступает так называемое $CD(\rho, N)$-условие (Curvature-Dimension condition):

$$\mathrm{Ric}_{\mu, N} \ge \rho g, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Как правило, в приложениях $CD(\rho, N)$-условия требуется, чтобы параметр N (аналитическая размерность) принадлежал $[n, \infty]$. Мы рассматриваем более общий случай: $N \in [-\infty, 0] \cup [n, \infty]$ $\left(\text{эквивалентно } \frac{1}{N} \in \left[-\infty, \frac{1}{n}\right]\right)$, ранее за редкими исключениями (см., например, [2]) не изучавшийся.

Простейшим и классическим примером применения CD(ρ, N)-условия является теорема Браскампа–Либа [3], согласно которой логарифмически вогнутая мера, т.е. вероятностная мера $\mu = e^{-V}dx$ на $\mathbb{R}^n$ с выпуклым потенциалом V, удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{Var}_\mu f \le \int \langle (D^2V)^{-1}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu$$

(где $D^2V = \nabla^2 V$ – стандартная гессианова матрица). Как нетрудно видеть, для стандартной евклидовой метрики g выполнено CD(0, n)-условие. Дальнейший прогресс и взаимодействие с идеями и методами римановой геометрии произошли благодаря работам многих исследователей, среди которых особенно отметим работу [4]. В работе [5] получена подробная классификация различных изопериметрических моделей в зависимости от важнейших параметров (кривизна Риччи, размерность, метрический диаметр и т.д.).

Основным инструментом нашего исследования является формула Райлли, обобщающая формулу Бохнера–Лихнеровича–Вайценбека и полученная впервые в [6] для многообразий с краем (т.е. постоянного V). В нашей работе используется следующая версия этой формулы для весовых многообразий (она является модификацией теоремы, полученной в работе [7]).

Т е о р е м а 1. *Предположим, что u – дважды непрерывно дифференцируемая функция на M, причем $u|_{\partial M}$, $u_\nu|_{\partial M}$ непрерывно дифференцируемы на M. Тогда*

$$\int_M (Lu)^2 d\mu = \int_M \|\nabla^2 u\|^2 d\mu + \int_M \langle \mathrm{Ric}_\mu \nabla u, \nabla u\rangle d\mu +$$

$$+ \int_{\partial M} H_\mu (u_\nu)^2 d\mu + \int_{\partial M} \langle \mathrm{II}_{\partial M}\nabla_{\partial M} u, \nabla_{\partial M} u\rangle d\mu -$$

$$- 2\int_{\partial M} \langle \nabla_{\partial M} u_\nu, \nabla_{\partial M} u\rangle d\mu, \qquad (1)$$

где $\nabla_{\partial M}$ – связность Леви-Чевита, индуцированная метрикой g на ∂M.

Немедленным приложением этой формулы являются различные формы неравенств типа Пуанкаре/Браскампа–Либа, вытекающие из применения (1) к решению уравнения $Lu = f$, где f – гладкая функция, удовлетворяющая условию $\int f d\mu = 0$. Доказательства всех пунктов следующей теоремы являются модификацией классической стратегии, состоящей в поиске решения уравнения $Lu = f$, и отличаются подбором краевых условий (Неймана или Дирихле).

Т е о р е м а 2. *Предположим, что* $\mathrm{Ric}_{\mu, N} > 0$ *на* M *и* $\frac{1}{N} \in \left(-\infty, \frac{1}{n}\right]$. *Тогда формула* (2) *влечет все неравенства ниже для произвольной* $f \in C^1(M)$:

1. *Предположим, что* $\mathrm{II}_{\partial M} \ge 0$. *Тогда*

$$\frac{N}{N-1}\mathrm{Var}_\mu(f) \le \int_M \langle \mathrm{Ric}^{-1}_{\mu, N}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu;$$

2. *Предположим, что* $H_\mu \ge 0, f \equiv 0$ *на* $\partial M \ne \phi$. *Тогда*

$$\frac{N}{N-1}\int_M f^2 d\mu \le \int_M \langle \mathrm{Ric}^{-1}_{\mu, N}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu;$$

3. *Предположим, что* $H_\mu > 0$. *Тогда*

$$\frac{N}{N-1}\mathrm{Var}_\mu(f) \le$$

$$\le \int_M \langle \mathrm{Ric}^{-1}_{\mu, N}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu + \mathrm{Var}_{\mu/H_\mu}(f|_{\partial M}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проиллюстрируем доказательство на примере пункта 3. Докажем сперва неравенство

$$\|\nabla^2 u\|^2 + \langle \mathrm{Ric}_\mu \nabla u, \nabla u\rangle \ge$$

$$\ge \frac{1}{N}(Lu)^2 + \langle \mathrm{Ric}_{\mu, N}\nabla u, \nabla u\rangle. \qquad (2)$$

Согласно определениям, неравенство (2) эквивалентно следующему:

$$\|\nabla^2 u\|^2 + \frac{1}{N-n}\langle \nabla u, \nabla V\rangle^2 \ge \frac{1}{N}(Lu)^2.$$

В силу очевидного неравенства $\|\nabla^2 u\|^2 \ge \frac{1}{n}(\Delta u)^2$ для случаев $N = \infty$ и $N = n$ (отвечает постоянной функции V) неравенство (2) выполнено. Остается доказать

$$\frac{1}{n}(\Delta u)^2 + \frac{1}{N-n}\langle \nabla u, \nabla V\rangle^2 \ge \frac{1}{N}(Lu)^2$$

для остальных значений N. Для этого надо воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{\alpha}A^2 + \frac{1}{\beta}B^2 \ge \frac{1}{\alpha+\beta}(A+B)^2 \quad \forall A, B \in \mathbb{R},$$

которое выполнено для значений (α, β) из множеств $\{\alpha, \beta > 0\}$ или $\{\alpha + \beta < 0$ и $\alpha\beta < 0\}$.

Предположим, что $\int_M f d\mu = 0$, и решим проблему Пуассона с условием Дирихле

$$Lu = f \text{ на } M, \quad u \equiv 0 \text{ на } \partial M.$$

Из (1) и (2) получаем

$$\frac{N-1}{N}\int_M f^2 d\mu \ge \int_M \langle \mathrm{Ric}_{\mu, N}\nabla u, \nabla u\rangle d\mu + \int_{\partial M} H_\mu u_\nu^2 d\mu.$$

Интегрируя по частям, получаем, что для любого $\lambda > 0$

$$\int_M f^2 d\mu = \int_M fLu d\mu = -\int_M \langle \nabla f, \nabla u\rangle d\mu + \int_{\partial M} f u_\nu d\mu \le$$

$$\le \frac{1}{2\lambda}\int_M \langle \mathrm{Ric}_{\mu,N}^{-1}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\int_M \langle \mathrm{Ric}_{\mu,N}\nabla u, \nabla u\rangle d\mu + \int_{\partial M} f u_\nu d\mu.$$

Поскольку $\int_{\partial M} u_\nu \, d\mu = \int_M f\, d\mu = 0$, последнее слагаемое может быть заменено на $\int_{\partial M}(f - C)u_\nu d\mu$, где C – произвольная константа. Подставим в это выражение предыдущую оценку:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{2}\frac{N-1}{N}\right)\int f^2 d\mu \le \frac{1}{2\lambda}\int_M \langle \mathrm{Ric}_{\mu,N}^{-1}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu +$$

$$+\int_{\partial M}(f - C)u_\nu d\mu - \frac{\lambda}{2}\int_{\partial M} H_\mu u_\nu^2 d\mu \le$$

$$\le \frac{1}{2\lambda}\int_M \langle \mathrm{Ric}_{\mu,N}^{-1}\nabla f, \nabla f\rangle d\mu + \frac{1}{2\lambda}\int_{\partial M}\frac{1}{H_\mu}(f - C)^2 d\mu.$$

Умножая на 2λ и используя оптимальные значения $\lambda = \dfrac{N}{N-1}$, $C = \int \dfrac{f}{H_\mu}d\mu$, завершаем доказательство.

Теорема 2 включает в себя несколько классических результатов, таких как неравенства Браскампа–Либа, Лихнеровича. Случай отрицательных N применим к распределениям с тяжелыми хвостами, например, к мерам Коши (см. [8, 9]). Авторам неизвестен какой-либо аналог результата пункта 3.

Дальнейшими приложениями формулы (1) являются неравенства на M.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что* (M, g, μ) *удовлетворяет условию* $\mathrm{CD}(0, N)$, *где* $\dfrac{1}{N} \in \left(-\infty, \dfrac{1}{n}\right]$ и $\mathrm{II}_{\partial M} > 0$. *Тогда следующее неравенство выполнено для* $f \in C^1(\partial M)$:

$$\int_{\partial M} H_\mu f^2 d\mu - \frac{N-1}{N}\frac{\left(\int_{\partial M} f d\mu\right)^2}{\mu(M)} \le$$

$$\le \int_{\partial M}\langle \mathrm{II}_{\partial M}^{-1}\nabla_{\partial M} f, \nabla_{\partial M} f\rangle d\mu. \quad (3)$$

Теорема 3 была получена А. Колесанти в [10] для $N = n$, компактного подмножества M евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега ($V = 0$) и C^2-гладкой выпуклой границей. Колесанти получил неравенство как инфинитезимальную версию неравенства Брунна–Минковского. Мы получим общий результат, опираясь на формулу (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим неравенство Коши–Буняковского к последнему слагаемому в формуле (1):

$$2\langle \nabla_{\partial M} u_\nu, \nabla_{\partial M} u\rangle \le \langle \mathrm{II}_{\partial M}\nabla_{\partial M} u, \nabla_{\partial M} u\rangle +$$

$$+\langle \mathrm{II}_{\partial M}^{-1}\nabla_{\partial M} u_\nu, \nabla_{\partial M} u_\nu\rangle.$$

Мы получим следующее неравенство для произвольной функции u, удовлетворяющей условиям теоремы 1:

$$\int_M (Lu)^2 d\mu \ge \int_M (\|\nabla^2 u\|^2 + \langle \mathrm{Ric}_\mu \nabla u, \nabla u\rangle) d\mu +$$

$$+\int_{\partial M} H_\mu (u_\nu)^2 d\mu - \int_{\partial M}\langle \mathrm{II}_{\partial M}^{-1}\nabla_{\partial M} u_\nu, \nabla_{\partial M} u_\nu\rangle d\mu.$$

Из (2) вытекает

$$\frac{N-1}{N}\int_M (Lu)^2 d\mu \ge \int_{\partial M} H_\mu (u_\nu)^2 d\mu -$$

$$-\int_{\partial M}\langle \mathrm{II}_{\partial M}^{-1}\nabla_{\partial M} u_\nu, \nabla_{\partial M} u_\nu\rangle d\mu.$$

Для функции $f \in C^{1,\alpha}(\partial M)$ решим уравнение с граничным условием типа Неймана:

$$Lu \equiv \frac{1}{\mu(M)}\int_{\partial M} f d\mu \ \text{ на } \ M, \quad u_\nu = f \ \text{ на } \partial M.$$

Решение существует, так как соблюдено условие $\int_{\partial M} u_\nu \, d\mu = \int_M (Lu) d\mu$. Подставив выражение для Lu в предыдущее неравенство, получаем искомый результат для $f \in C^{1,\alpha}(\partial M)$. Для более общих функций доказательство завершается с помощью стандартных приближений гладкими функциями.

В качестве естественного приложения теоремы 3 могут выступать неравенства Пуанкаре для многообразий с мерой (в том числе обобщения и уточнения результатов работы [11]). Другая интересная задача вытекает из следующего наблюдения Колесанти: теорема 3 в евклидовом пространстве эквивалентна неравенству Брунна–Минковского. Возникает естественный вопрос: может ли теорема 3 в случае многообразия с мерой использоваться для доказательства неравенств типа Брунна–Минковского? Следующая теорема обобщает классическое “второе неравенство Минковского”, одно из неравенств Александрова–Фенхеля на случай многообразий с мерой.

Для подмножества $K \subset M$ с гладкой границей положим

$$W_N(K) := \mu(K), \quad W_{N-1}(K) := \frac{1}{N}\int_{\partial K} d\mu,$$

$$W_{N-2}(K) := \frac{1}{N(N-1)}\int_{\partial K} H_\mu d\mu.$$

Каждая величина W_{N-i} есть не что иное, как i-я вариация функции $\mu(K_t)$, где $K_t = \{x \in M\colon \operatorname{dist}(x, K) \le t\}$.

Теорема 4. *Пусть K – подмножество (M, g, μ) с C^2-гладкой границей, отстоящей на положительном расстоянии от ∂M. Пусть $(K, g|_K, \mu|_K)$ удовлетворяет* CD(0, *N*)*-условию* $\left(1/N \in \left(-\infty, \frac{1}{n}\right]\right)$ *и* $\mathrm{II}_{\partial K} > 0$ (*K локально строго выпукло*). *Тогда выполнено второе неравенство Минковского*:

$$W_{N-1}(K)^2 \ge W_N(K)W_{N-2}(K).$$

Эквивалентно,

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 N\mu(K_t)^{1/N}\Big|_{t=0} \le 0.$$

Таким образом, функция $t \mapsto N\mu(K_t)^{1/N}$ вогнута на любом интервале $[0, T]$, на котором для всех $t \in [0, T)$ каждое K_t является C^2-гладким, локально строго выпуклым, отстоящим на положительном расстоянии от ∂M подмножеством, таким что $(K_t, g|_{K_t}, \mu|_{K_t})$ удовлетворяет CD(0, *N*)*-условию.*

Интригующей проблемой анализа на многообразиях является поиск возможных обобщений понятия сложения по Минковскому, т.е. определения суммы двух множеств $K + tL$, $t \ge 0$. Заметим, что в силу отсутствия однородности это не эквивалентно определению суммы $(1-t)K + tL$, $0 \le t \le 1$ (последняя задача тривиально решается путем интерполяции с помощью геодезических).

В настоящей работе предложен подход, основанный на технике геометрических потоков. Пусть $F_0\colon \Sigma^{n-1} \to M^n$ – гладкое вложение ориентированного подмногообразия $\Sigma_0 := F_0(\Sigma)$ в (M, g), где Σ – $(n-1)$-мерное компактное гладкое ориентированное многообразие без края. Зафиксируем C_2-функцию $\varphi\colon \Sigma \to \mathbb{R}$. Будем называть параллельным потоком нормалей $F\colon \Sigma \times [0, T] \to M$ решение следующего уравнения

$$\frac{d}{dt}F(y, t) = \omega_t(F(y, t)), \quad F(y, 0) = F_0,$$
$$y \in \Sigma, \quad t \in [0, T], \tag{4}$$
$$\omega_t := \varphi_t \nu_{\Sigma_t} + \tau_t \text{ на } \Sigma_t, \quad \tau_t := \mathrm{II}_{\Sigma_t}^{-1}\nabla_{\Sigma_t}(\varphi_t),$$
$$\varphi_t := \varphi \circ F_t^{-1},$$

где ν_t – единичная, согласованная с ориентацией нормаль к Σ_t. Будем предполагать, что $\mathrm{II}_{\Sigma_t} > 0$ для всех $t \in [0, T]$.

В настоящей работе не рассматриваются вопросы существования потока (4). Будем предполагать, что нам дано гладкое решение уравнения (4) на отрезке $[0, T]$. Базовые свойства решения установлены в следующей теореме.

Теорема 5. 1. (Классическое сложение по Минковскому для выпуклых тел определяет параллельный поток нормалей). *Пусть K и L – два строго выпуклых тела в $\mathbb{R}^n$ с C^2-гладкими границами и отображение $F\colon S^{n-1} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ определено условием $F(\nu, t) := \nu_{K+tL}^{-1}(\nu)$, так что $\partial(K + tL) = F_t(S^{n-1})$ для всех $t \ge 0$. Тогда F удовлетворяет уравнению (4) с $\varphi = h_L$ и $F_0 := \nu_K^{-1}$, где h_L – несущая функция L, а ν_K – внешняя нормаль к K*;

2. (Векторное поле единичных нормалей параллельно вдоль потока)

$$\frac{d}{dt}\nu_{\Sigma_t}(F_t(y)) = 0, \quad \forall y \in \Sigma, \quad \forall t \in [0, T];$$

3. (Уравнение Монжа–Ампера). *Определим функцию $u\colon \Sigma \to \mathbb{R}^+$ условием $u|_{\Sigma_t} = t$. Тогда u является решением однородного уравнения Монжа-Ампера с граничными условиями*

$$\det\nabla^2 u = 0, \quad u|_{\Sigma_0} = 0, \quad u_\nu|_{\Sigma_0} = \frac{1}{\varphi(x)}.$$

Более того, вектор ∇u параллелен вдоль потока

$$\frac{d}{dt}\nabla u(F_t(y)) = 0, \quad \forall y \in \Sigma, \quad \forall t \in [0, T];$$

4. (Неравенство Брунна–Минковского на многообразиях). *Пусть Ω_t – семейство компактных подмножеств Ω и $\Sigma_t = \partial\Omega_t$. Если (M, g, μ) удовлетворяет* CD(0, *N*)*-условию* $\left(\frac{1}{N} \in \left(-\infty, \frac{1}{n}\right]\right)$, *то функция*

$$t \to N\mu(\Omega_t)^{\frac{1}{N}}$$

вогнута на $[0, T]$.

Работа поддержана грантами РФФИ (проект 14–01–00237, РФФИ–КНР (14–01–91158-ГФЕН).

Работа поддержана ISF (грант 900/10), BSF (грант 2010288), Marie-Curie Actions (грант PCIG10-GA-2011-304066) и E. and J. Bishop Research Fund.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chavel I.* Eigenvalues in Riemannian Geometry // Pure and Appl. Math. 1984. V. 115.
2. *Ohta S.-I.* Prepr. 2013. axiv.org/abs/1310.7993.
3. *Brascamp H.J., Lieb E.H.* // J. Func. Anal. 1976. V. 22. № 4. P. 366–389.

4. *Bakry D., Émery M.* In: Séminaire de probabilités XIX 1983/84. Notes Math. 1985. V. 1123.
5. *Milman E. Prepr.* 2013. arxiv.org/abs/1108.4609.
6. *Reilly R.C.* // Indiana Univ. Math. J. 1977. V. 26. P. 459–472.
7. *Ma L., Du S.-H.* // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. 2010. V. 348. № 21/22. P. 1203–1206.
8. *Bobkov S.G., Ledoux M.*// Ann. Probab. 2009. V. 37. № 2. P. 403–427.
9. *Nguyen V. H.* // Prepr. 2013. arxiv.org/abs/1302.4589.
10. *Colesanti A.* // Commun. Contemp. Math. 2008. V. 10. № 5. P. 765–772.
11. *Xia C.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1997. V. 125. № 6. P. 1801–1806.