

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Российская академия наук

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Российский фонд фундаментальных исследований

Федеральная целевая программа

«Научные и научно-педагогические кадры инновационной России»
на 2009–2013 годы

Фонд содействия развитию малых форм предприятий
в научно-технической сфере

ТРУДЫ 52-й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МФТИ

Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук

Часть VII Управление и прикладная математика

Том 1



Москва–Долгопрудный, 2009

УДК 519.6/8

ББК 22.1

T78

T78 **Труды 52-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук».** Часть VII. Управление и прикладная математика. Том 1. — М.: МФТИ, 2009. — 194 с.
ISBN 978-5-7417-0310-6

В данном выпуске представлены исследования по методам математического моделирования и их приложениям в экономике и физике. Важную роль в ряде исследований играет вычислительный эксперимент.

В октябре 2009 года Московский физико-технический институт (государственный университет) стал победителем конкурсного отбора программ развития университетов России, в отношении которых устанавливается категория «национальный исследовательский университет».

УДК 519.6/8

ББК 22.1

ISBN 978-5-7417-0310-6

© ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2009

Программный комитет

Кудрявцев Н.Н., чл.-корр. РАН, ректор института — **председатель**
Кондранин Т.В., профессор, первый проректор — **зам. председателя**
Стрыгин Л.В., доцент — **учёный секретарь конференции**

Алфимов М.В., академик, директор Центра фотохимии РАН
Андреев А.Ф., академик РАН, директор ИФП РАН
Беляев С.Т., академик РАН, зав. кафедрой МФТИ
Велихов Е.П., академик РАН, президент РНЦ «Курчатовский институт»
Гуляев Ю.В., академик РАН, директор ИРЭ РАН
Дмитриев В.Г., чл.-корр. РАН, зав. кафедрой МФТИ
Иванников В.П., академик РАН, директор ИСП РАН
Коротеев А.С., академик РАН, директор Центра им. М.В. Келдыша
Кузнецов Н.А., академик РАН, зав. кафедрой МФТИ
Макаров В.Л., академик-секретарь Отделения ОН РАН, дир. ЦЭМИ РАН
Петров А.А., академик РАН, заведующий отделом ВЦ РАН
Фортвов В.Е., академик-секретарь Отделения ЭММПУ РАН
Патон Б.Е., академик, президент НАН Украины
Шпак А.П., академик, первый вице-президент НАН Украины
Черепин В.Т., чл.-корр. НАН Украины, директор ФТЦ НАНУ
Жданок С.А., академик-секретарь Отделения ФТН НАН Беларуси

Гаричев С.Н., д.т.н., декан ФРТК
Трунин М.Р., д.ф.-м.н., декан ФОПФ
Негодяев С.С., к.т.н., декан ФАКИ
Грознов И.Н., доцент, декан ФМБФ
Тодуа П.А., профессор, декан ФФКЭ
Вышинский В.В., профессор, декан ФАЛТ
Шананин А.А., профессор, декан ФУПМ
Леонцов А.Г., профессор, декан ФПФЭ
Кривцов В.Е., доцент, декан ФИВТ
Ковальчук М.В., чл.-корр. РАН, декан ФНБИК
Деревнина А.Ю., д.т.н., декан ФИВС
Кобзев А.И., профессор, декан ФГН
Кваченко А.В., к.т.н., зав. кафедрой
Алехин А.П., профессор, зав. кафедрой
Белоусов Ю.М., профессор, зав. кафедрой
Бугаев А.С., академик РАН, зав. кафедрой
Габидуллин Э.М., профессор, зав. кафедрой
Гладун А.Д., профессор, зав. кафедрой
Иванов А.П., профессор, зав. кафедрой
Лужкин Д.С., профессор, зав. кафедрой
Петров И.Б., профессор, зав. кафедрой
Половинкин Е.С., профессор, зав. кафедрой
Сон Э.Е., чл.-корр. РАН, зав. кафедрой
Тельнова А.А., доцент, зав. кафедрой
Трухан Э.М., профессор, зав. кафедрой
Холодов А.С., чл.-корр. РАН, зав. кафедрой
Энтов Р.М., академик, зав. кафедрой

Пленарное заседание

УДК 519.86

А.А. Петров

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)

Математическое моделирование и анализ эволюции экономики России

1. Факультет управления и прикладной математики МФТИ был организован в то время, когда в СССР интенсивно развивалась вычислительная техника и методы прикладной математики, ориентированные на применение вычислительной техники для решения оборонных и народно-хозяйственных задач. Основателями ФУПМ были выдающиеся советские учёные, они понимали, что надо готовить кадры, которые были бы способны развивать методы прикладной математики и информатики, чтобы применять ЭВМ для решения задач проектирования сложных систем и управления сложными системами. Один из основателей факультета академик А.А. Дородницын определил информационную технологию как триаду модель–алгоритм–программа.

2. Математическое моделирование составляет основу триады. Математическое моделирование — методология проблемно ориентированных фундаментальных исследований. Это — не решение отдельных, пусть даже очень сложных задач, а анализ и синтез систем и объектов методами прикладной математики, ориентированными на применение компьютеров. Конечная цель — найти рациональный вариант проекта или решения. Внутреннее развитие математического моделирования требует разработки новых моделей, создания эффективных численных методов решения задач, разработки эффективных систем компьютерной поддержки математического моделирования.

3. Математические модели возникли в механике, в физике, затем распространились в область технических приложений. Две фундаментальные проблемы стоят перед математическим моделированием: проблема анализа систем и проблема синтеза систем. Для решения проблемы анализа разрабатываются методы решения нелинейных нестационарных задач большой размерности, к решению которых сводится исследование процессов в системах. Это — современные проблемы индустриальной математики и высокопроизводительных вычислений. Примеры приложений — сложные задачи обтеканий тел и теплопереноса. Для решения проблемы синтеза сложной системы, во-первых, требуется умение рассчитать процессы в системе при заданных значениях конструктивных параметров, то есть решение задачи анализа. Во-вторых, требуется определить множество возможных конструктивных параметров, охарактеризовать внешние условия функционирования системы, сформулировать критерии эффективности системы и поставить задачу оптимизации системы, построить алгоритм решения задачи оптимизации. Это — современные проблемы теории управления и методов оптимизации. Примеры приложений — системы автоматизации проектирования технических систем.

4. Из области физических и технических приложений методы математического моделирования распространились в области управления организационными системами, экономики, социологии. Существенные элементы всякой организационной или общественной системы — люди, имеющие собственные интересы и ресурсы, чтобы следовать интересам. В них человек — и объект управления, и субъект управления. Поэтому требуется смоделировать не только технические процессы в системе, но и информационные взаимодействия, конфликты интересов людей, принимающих решения. При моделировании технических процессов используется весь опыт математического моделирования, накопленный в области физических и технических приложений. Один из подходов — создавать своего рода компьютерные тренажеры и проводить на них имитационные игры. Игрокам-операторам поручаются информационные обмены и принятие решений в рамках предписанных сценариев. Примеры приложений — модель вооруженной борьбы в военном деле и модели лабораторных рынков в экспериментальной экономике.

5. В экономической науке математические методы начали применять в XIX веке. Неоклассическая экономическая теория ввела понятие рационального экономического агента, который максимизирует показатель, характеризующий его экономический интерес, при огра-

ничениях на ресурсы. Это открыло путь в экономику методам оптимизации. Гипотезы убывающей предельной полезности и убывающей предельной производительности придали экономическим структурам свойство выпуклости и стимулировали развитие выпуклого анализа и его приложений. Взаимодействия экономических агентов описывались условиями рыночного равновесия спроса на экономические блага и предложения благ. На принципах оптимальности и равновесия построена и теория экономического роста.

6. В 1975 году в Вычислительном центре АН СССР возникло направление математического моделирования в области экономических приложений, названное Системным анализом развивающейся экономики (САРЭ), более тридцати лет в исследованиях участвуют студенты, аспиранты и выпускники ФУПМ МФТИ. В САРЭ методология математического моделирования в области физических и технических приложений соединена с фундаментальными принципами экономической науки. Главный объект моделирования — национальная экономика. Основное понятие математических моделей САРЭ — экономический агент — макроструктура, которой приписана определенная функция в экономике (производителя, потребителя, торгового или финансового посредника, собственника). Состояние экономического агента описывается набором материальных и финансовых активов и пассивов, состояния экономических агентов задают состояние экономики. Состояния агентов изменяются в силу уравнений материальных и финансовых балансов, описывающих операции агентов с ресурсами, продуктами и деньгами разного вида. Уравнения балансов замыкаются моделями поведения и взаимодействий экономических агентов.

Модели поведения и взаимодействий агентов отражают внутренние механизмы регулирования экономических процессов, модель настолько адекватна, насколько адекватны модели поведения и взаимодействий. Поэтому они создаются на основании содержательного системного анализа предыстории и текущего состояния моделируемой экономики с привлечением методов агрегирования экономических описаний. Модели поведения агентов основаны на принципе оптимальности, а модели взаимодействий — на принципе равновесности.

Система уравнений балансов, замкнутая описаниями поведения и взаимодействий агентов, содержит экзогенные переменные двух видов. Во-первых, это — переменные (ставки налогов, расходы бюджета, нормы резервирования пассивов коммерческих банков, внешние

и внутренние займы и их обслуживание), описывающие воздействия на экономические процессы таких экономических агентов, как экономический блок государственной власти, Центральный банк. Поведение их не может быть описано на основе принципа оптимальности и задается сценарием. Во-вторых, это — переменные, которые параметризуют процессы, не описанные явным образом в модели (трудоовое поведение населения, цены на внешних рынках). После того как оценены параметры модели и заданы экзогенные переменные, модель генерирует системно согласованные временные ряды основных макроэкономических показателей (валового внутреннего продукта и его составляющих, индексов цен, распределения капитала по секторам экономики, кредиты и депозиты, проценты по ним) в зависимости от внешних условий и сценария государственной экономической политики. Модели САРЭ дают возможность оценивать последствия вариантов государственной экономической политики при разных прогнозах внешних условий. Однако оценки верны до тех пор, пока сохраняются сложившиеся экономические отношения, определяющие внутренние механизмы регулирования экономики. Они отражены в моделях поведения и взаимодействий экономических агентов. Если экономические отношения изменились, надо начинать разрабатывать новую модель.

7. Разработка математической модели САРЭ — дело непростое и трудоемкое. По ходу системного анализа состояния реальной экономики возникают гипотезы, как выразить в рациональных понятиях и отношениях сложную хаотическую картину экономической реальности. Проверить правильность гипотезы — это построить вариант модели, оценить параметры модели и сравнить результаты вычислительных экспериментов с моделью с данными о состоянии экономики. Часто результаты показывают, что гипотеза неверна, приходится менять ее, как правило, прежде чем будет создана адекватная модель, проверяется не одна гипотеза. Такую работу не выполнить «вручную» за короткое время, обычно отпущенное на разработку модели. Поэтому была разработана каноническая форма моделей САРЭ, и на основе канонической формы создана оригинальная компьютерная технология моделирования экономики, реализованная в системе ЭКОМОД. С помощью ЭКОМОД все этапы разработки, отладки и применения модели выполняются в диалоге с клавиатуры компьютера на языке, близком к привычному математическому.

8. Модели и методы САРЭ совершенствовались на опыте изучения эволюции экономики СССР и России в период 1986–2009 годов. Была создана «модельная летопись» эволюции экономики СССР и Рос-

сии в периоде перестройки и реформы 1986–2009 годов. В 1986 году создана модель плановой административно регулируемой экономики СССР, с помощью которой проанализированы реальные механизмы роста экономики и выявлены дефекты советской системы регулирования экономики. В 1989 году создана модель плановой административно регулируемой экономики, в которой часть производственных мощностей предоставлена кооперативному сектору, действующему в условиях хозяйственного расчёта, определённых законами о социалистическом предприятии и о кооперации. С помощью модели показано, что в предписанных условиях кооперативный сектор не может исправить дефекты административно регулируемой экономики. В 1990 году в связи с заявлением правительства о неизбежности радикальной экономической реформы создана модель, с помощью которой показано, что «шоковая» либерализация экономики СССР приведёт неконтролируемому росту цен и сокращению бюджетных расходов. Это вызовет обесценение сбережений населения, спад производства в отраслях, выполняющих государственные заказы, и сильную дифференциацию доходов населения. Результаты реформы в 1992 году подтвердили прогнозы 1990 года. В 1991 году создана модель, отражающая экономические отношения, возникшие в СССР накануне его распада. С помощью модели показано, что стихийно складывающиеся рыночные отношения стимулировали рост экспорта сырья, но при этом неизбежен общий спад производства. В 1993 году создана модель, отражавшая экономические отношения, возникшие на первом этапе трансформации экономики СССР. С помощью модели оценен рациональный уровень кредитования реального сектора экономики, тем самым конструктивно разрешен спор либеральных экономистов-«рыночников» и консервативных экономистов-«плановиков» относительно необходимости кредитования оборотных фондов реального сектора экономики. С помощью модели оценена величина вывоза из страны сверхприбылей экспортеров и импортеров. В 1996 году создана модель, которая отражала экономические отношения, возникшие в период «финансовой стабилизации» 1996–1998 годов. С помощью модели вскрыто экономическое содержание взаимных неплатежей производителей, связь их с теньвым оборотом денег в экономике. В мае 1998 года с помощью модели предсказан кризис банковской системы в августе 1998 года. В 1999 году создана модель, с помощью которой проанализированы макроэкономические последствия разных предлагавшихся механизмов эмиссии денег для восстановления инвестиций в реальный сектор экономики. В 2003 году создана модель, предна-

значенная для анализа влияния отраслей топливно-энергетического сектора на развитие экономики. С тех пор модель модифицируется и в настоящее время используется для анализа структурных ограничений роста экономики России. В 2004 году создана модель, в которой явно описан теневой оборот денег в экономике России. Она предназначена для оценки полной налогооблагаемой базы в экономике России. Эта модель тоже модифицируется и теперь используется для анализа современного состояния экономики России и для оценки последствий антикризисной политики правительства.

9. Современная экономика развивается за счёт создания наукоемких продуктов и производств, которые экономят материальные ресурсы, рабочее время, снижают издержки обращения факторов производства. В наукоемкой продукции высока доля интеллектуальных затрат, которые реализуются с помощью информационных технологий. Математическое моделирование — научный фундамент информационных технологий, поэтому является одним из фундаментальных факторов современных инноваций.

Глобальный экономический кризис вскрыл пагубность кратковременных спекулятивных расчётов, несостоятельность рейтинговых оценок. Не вызывает сомнения, что возрождается интерес к долгосрочному планированию, которое широко применялось во времена военного и идеологического противостояния СССР и США. Долгосрочное планирование основано на научных прогнозах и совершенных методах обработки и использования информации. Социально-экономические инновации направлены на решение возникающих в обществе проблем и противоречий. Необходимы непрерывные опережающие исследования состояния экономики с целью выявления назревающих проблем, выработки альтернативных методов решения проблем и оценки эффективности альтернатив. Для этого надо совершенствовать методы математического моделирования и готовить кадры в области математического моделирования.

Секция математического моделирования в экономике, социологии и экологии

УДК 51.74

П.П. Бобрин

BobrikPP@mail.ru

Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН

К вопросу о сравнении радиально-кольцевых сетей

Транспортные сети многих городов, развивающиеся стихийно, без внешних воздействий, нередко приобретают радиально-кольцевую (РК) структуру. [8]. Как показывает практика, подобная структура обладает рядом принципиальных недостатков.

Попытки улучшить структуру транспортных сетей городов такого типа неизбежно поднимают ряд принципиальных вопросов. Прежде всего надо понять, какие сети являются наиболее предпочтительными для выстраивания в городах. Одним из вариантов ответа на этот вопрос являются так называемые регулярные сети, состоящие из повторяющихся ячеек [2, 5].

Прежде всего до сих пор нет общепринятого определения РК сети. Под ними на практике понимают любую сеть, где есть точка (центр), из которой выходят как минимум три дороги в разных направлениях, а также существует хотя бы одна дорога кольцевого типа (возможно, неполная) вокруг нее. Поэтому выбранные наугад два представителя из класса РК сетей могут быть очень непохожи друг на друга, не говоря уже про требование близости их эффективностей. В результате говорить про какую-то общую для всего класса эффективность не приходится.

РК сеть не является однородной. Поэтому для фиксированной сети эффективность транспортных корреспонденций меняется от точки

к точке и не существует общей для всей территории удельной характеристики. Также эффективность РК сети существенно зависит от размера сети.

Однако есть насущная потребность оценить эффективность РК сетей в теории. В настоящее время из теоретических результатов известно только то, что при увеличении размера РК сети она все более и более становится похожей на квадратную регулярную сеть, откуда следует вывод (верный далеко не для всех случаев), что характеристики РК сети асимптотически стремятся к характеристикам квадратной сети. Отметим только, что подобные рассуждения неявно предполагают, что большая часть корреспонденций не касается центра, то есть сеть перестает быть РК по своему смыслу.

Известно, что для наиболее эффективных сетей должен выполняться принцип однородности, который заключается в том, что чем меньше ячейки отличаются друг от друга, тем более эффективной является вся сеть, откуда и следует эффективность регулярных сетей. Это связано с тем, что транспортная доступность для всех точек ячейки ухудшается пропорционально кубу характерного размера ячейки. Поэтому уменьшение размера одних ячеек не компенсирует увеличение размера других. Также транспортная доступность в вытянутых и искривленных ячейках хуже, чем круглых или квадратных.

В соответствии с принципом однородности в работе предлагается подход, в соответствии с которым одними из самых эффективных РК сетей являются те, площади ячеек которых в максимальной степени равны друг другу, а сами они вытянуты в наименьшей степени, то есть приближены по форме к кругу. Несмотря на такую нечетность определений, они существенно ограничивают класс РК сетей, среди которых следует искать наиболее эффективные.

В работе было определено два подкласса РК сетей, удовлетворяющих в той или иной степени принципу однородности: классические и ветвящиеся (см. примеры на рис. 1, 2). Утверждается, что эти типы сетей являются одними из самых эффективных во всем классе РК сетей.

Оценка эффективности даже для таких наиболее формализованных типов РК сетей представляет достаточно трудную задачу, которая к тому же не является темой данной работы. Отметим только без доказательства, что для классической дихотомической РК сети при некоторых дополнительных предположениях удалось оценить эффективность сети.

РК сеть оказалась лучше квадратной только в случае корреспонденций одинаковой интенсивности между любыми точками кругового города, что выполняется только для небольших городов (город на семи холмах). Другими словами, её эффективность обуславливается не за счёт своей структуры, а за счёт профиля корреспонденций. Отметим, что РК сеть для поддержания своей эффективности по мере роста заставляет удерживать основные места посещения в центре, что фатально тормозит развитие территории.

Однако по мере роста города и замыкания корреспонденций только между близкими районами РК сеть быстро становится хуже квадратной. Что касается регулярной треугольной сети, то почти для любого размера города она превосходит по эффективности любую РК сеть.

Исследования были выполнены при финансовой поддержке программы ОЭМПУ РАН «Управление движением, теория сложных информационно-управляющих систем».

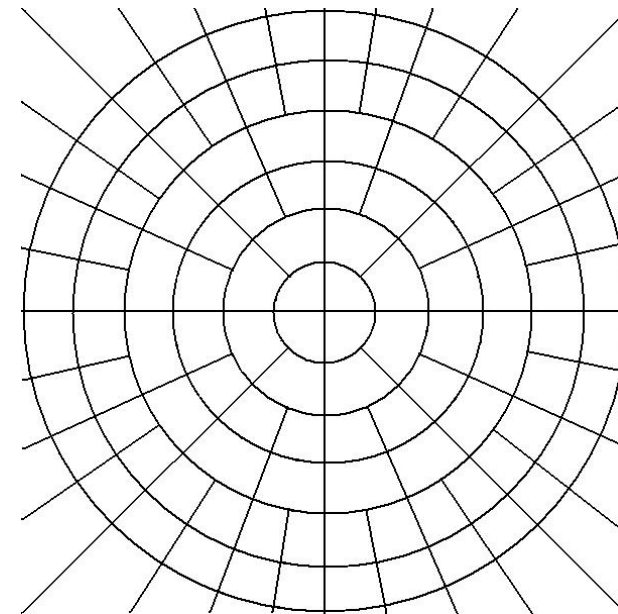


Рис. 1

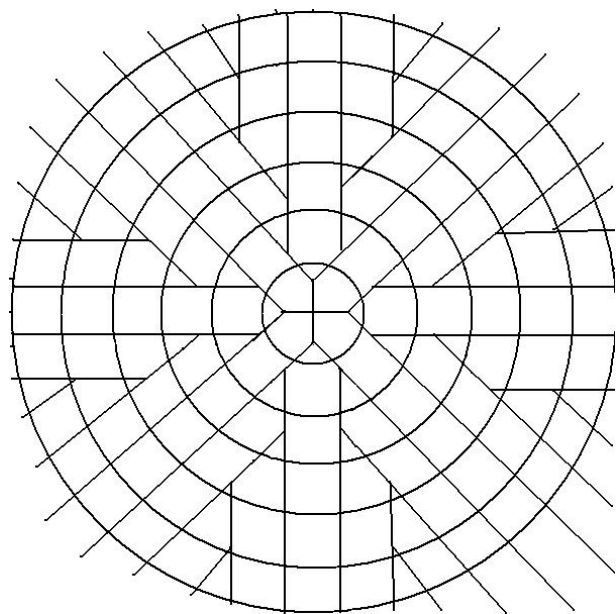


Рис. 2

Литература

1. Agassiant A.A., Strelnikov A.I. Rational Development of urban transportation systems, with due consideration given to environmental protection. — М.:, 1989. — 97 p.
2. Бобрин П.П. Сравнение эффективности треугольной и квадратной регулярных транспортных сетей // Транспорт: наука, техника, управление. — 2000. — № 7. — С. 26–31.
3. Бобрин П.П. О преимуществе треугольной топологии сети над квадратной // Транспорт: наука, техника, управление. — 2005. — № 3. — С. 32–34.
4. Тархов С.А. Эволюционная морфология транспортных сетей. — Смоленск: Универсум, 2005. — 384 с.

УДК 519.865.5

М.П. Ващенко

m_vashchenko@mail.ru

Российский университет дружбы народов

Модель Кантора–Липмана в непрерывном времени

В докладе обсуждается модель инвестиционной деятельности, являющейся обобщением известной модели Кантора–Липмана ([1]) на случай непрерывного времени. Для одного класса инвестиционных проектов получен аналог результата Кантора–Липмана, позволяющий оценить доходность инвестиционного проекта.

Пусть задан инвестиционный проект, который характеризуется функцией $\varphi(t)$, определяющей поток платежей проекта в момент времени t . Обозначим через $\Phi(t)$ функцию, определяющую сальдо платежей от инвестиционного проекта к моменту времени t , то есть $\Phi(t) = \int_t^{\cdot} \varphi(x) dx$. Мы будем предполагать, что инвестиционный проект имеет конечное время реализации L , то есть $\varphi(t) = 0$ при $t > L$.

Обозначим через $s(t)$ состояние расчётного счёта инвестора в момент времени t ; $u(t)$ — интенсивность реализации инвестиционного проекта, которую в момент времени t регулирует инвестор. Тогда мы можем описать динамику расчётного счёта инвестора следующим соотношением:

$$s(t) = \psi + \int_0^t \Phi(t-x)u(x)dx,$$

где ψ — первоначальный капитал инвестора. Как и в модели Кантора–Липмана, будем предполагать, что

— Инвестиционная деятельность ведётся только за счёт собственных средств инвестора (требование самофинансируемости), поэтому в каждый момент времени остаток на расчётном счёте должен быть неотрицательным.

— У инвестора есть конечный горизонт планирования T (терминальный момент времени), превышающий срок реализации инвестиционного проекта.

— Инвестор должен организовать свою деятельность так, чтобы в терминальный момент времени он был свободен от всех обязательств, связанных с ранее начатыми инвестиционными проектами.

С учётом вышеизложенного можно записать модель инвестиционной деятельности:

$$\left\{ \begin{array}{ll} s(t) = \psi + \int_0^t u(x)\Phi(t-x)dx, & t \leq T, \\ s(t) = \psi, & t < 0, \\ s(t) = s(T), & t > T, \\ s(t) \geq 0, \quad u(t) \geq 0 & \forall t \geq 0, \\ u(t) = 0, & t \geq T - L, \\ s(T) \rightarrow \max. \end{array} \right. \quad (1)$$

Определение. Будем говорить, что инвестиционный проект имеет стандартную структуру платежей, если $\varphi(t) \in C([0; L])$, $\varphi(t) \leq 0$ для некоторого отрезка $[0; \tau] \subset [0; L]$ и $\Phi(L) > 0$.

Утверждение 1. Для инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей платежей $\exists p : \int_0^L e^{-pt}\varphi(t)dt = 0$.

Определение. Будем говорить, что инвестиционный проект имеет традиционную структуру платежей, если он имеет стандартную структуру платежей и $\exists \tau_1 < L : \varphi(t) \leq 0 \quad t \in [0; \tau_1]$ и $\varphi(t) \geq 0 \quad t \in [\tau_1; L]$.

Утверждение 2. Для инвестиционных проектов с традиционной структурой платежей $\exists! p : \int_0^L e^{-pt}\varphi(t)dt = 0$.

Утверждение 3. Для инвестиционных проектов со стандартной структурой платежей платежей в задаче (1) $s(T) \leq e^{pT}\psi$.

Обозначим $V(\psi, T)$ — оптимальное значение функционала в задаче (1) при фиксированном горизонте T и начальном капитале ψ , то есть $V(\psi, T) = \max s(T)$.

Теорема. Для инвестиционных проектов с традиционной структурой платежей в задаче (1) для $\forall T > L$ и $\forall \psi > 0$ существуют такие положительные константы λ_1 и λ_2 , что

$$\lambda_1 \psi e^{pT} \leq V(\psi, T) \leq \lambda_2 \psi e^{pT}.$$

Работа поддержана грантами РФФИ (08-07-00158, 09-01-13534 офи-ц), РГНФ N 08-02-00347, программой поддержки ведущих научных школ НШ 2982.2008.01, ПФИ ОМН РАН N3, ПФИ президиума

РАН N2, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект П949).

Литература

1. Cantor D.G., Lipman S.A. Investment selection with imperfect capital markets // *Econometrica*. — 1983. — V. 51, N 4. — P. 1121–1144.

УДК 519.86

В.П. Вржещ¹, И.Г. Поспелов², М.А. Хохлов³
valensio@inbox.ru, pospeli@ccas.ru, khokhlov@ccas.ru

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

³ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Нелинейное дезагрегирование макрэкономической статистики

Однопродуктовое описание реального сектора экономики во многих исследованиях основывается на основном макроэкономическом балансе по использованию (ОМБ) в «номинальных величинах» (текущих ценах):

$$\text{ВВП} = \text{Валовое накопление} + \text{Конечное потребление} + \text{Экспорт} - \text{Импорт}$$

и измеряется в деньгах. Затем различными процедурами дефлирования ОМБ приводится к «реальным величинам» (неизменным ценам):

$$Y(t) = J(t) + C(t) + E(t) - I(t).$$

Статистический ОМБ в текущих ценах записывается как

$$p_Y(t)Y(t) = p_J(t)J(t) + p_C(t)C(t) + p_E(t)E(t) - p_I(t)I(t), \quad (1)$$

где $p_Y(t)$ — дефлятор ВВП, $p_J(t), p_C(t), p_E(t), p_I(t)$ — индексы цен отдельных составляющих ОМБ.

В последние годы динамика индексов разных составляющих ОМБ сильно различается [1] и возникла потребность в трёхпродуктовом описании реального сектора, где выделены импорт $I(t)$, экспорт $E(t)$ и продукт, производимый для внутреннего потребления $X(t)$. Покажем, как эти три продукта связаны с ОМБ.

Реальный ВВП $Y(t)$ может быть по-разному составлен из $E(t)$ и $X(t)$, но возможности замещения каналов реализации объективно ограничены, так что

$$Y = f(X, E).$$

Для накопления $J(t)$ и потребления $C(t)$ нужны импортный продукт $I_J(t)$, $I_C(t)$ и свой продукт $Y_J(t)$, $Y_C(t)$, которые не могут полностью замещать друг друга:

$$J = h(I_J, Y_J), C = g(I_C, Y_C). \quad (2)$$

Для $I(t)$ и $X(t)$ выполняются обычные линейные балансы:

$$X = Y_J + Y_C, I = I_J + I_C. \quad (3)$$

Частичное замещение импортного и отечественного продуктов издавна используется в моделях внешней торговли (так называемая «пред-посылка Армингтона») [2].

Соотношения (2)–(3) содержат пять неизвестных временных рядов (все величины квартальные, в ценах 2003 года): $X(t)$, $Y_C(t)$ и $Y_J(t)$ — выпуск, конечное потребление и валовое накопление внутреннего продукта соответственно, $I_C(t)$ и $I_J(t)$ — конечное потребление и валовое накопление импортного продукта соответственно. Поэтому (2)–(3) недостаточно, чтобы определить вид функций $f(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$. Однако у нас есть ещё информация о финансовых потоках и индексах цен. Для трёх продуктов — экспортного, импортного и внутреннего — мы должны рассматривать три индекса цен: $p_E(t)$, $p_I(t)$, $p_X(t)$, первые два из которых наблюдаемы из статистики (1), а последний должен быть восстановлен в процессе дезагрегирования.

В экономике действуют 5 агентов. Три основных: потребитель, инвестор, производитель и два вспомогательных: импортер и экспортер. Рассмотрим задачу потребителя, его затраты составляют $p_I(t)I_C(t) + p_X(t)Y_C(t) = p_C(t)C(t)$. Из (2) получаем $p_C(t)g(I_C(t), Y_C(t)) = p_I(t)I_C(t) + p_X(t)Y_C(t)$ и задача потребителя:

$$l_C(I_C, Y_C) = p_C(t)g(I_C, Y_C) - p_I(t)I_C - p_X(t)Y_C \rightarrow \max_{I_C, Y_C \geq 0}. \quad (4)$$

Предполагая, что $g(\cdot, \cdot)$ гладкая и выпуклая вверх, а также учитывая, что нас интересуют только внутренние точки максимума, получаем необходимые и достаточные условия (4) и следствие из них:

$$\frac{\partial_1 g(I_C(t), Y_C(t))}{\partial_2 g(I_C(t), Y_C(t))} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)}.$$

Аналогично исследуются задачи оптимизации инвестора и производителя и получаем следующую систему условий дезагрегирования:

$$Y = f(X(t), E(t)), \quad (5)$$

$$J = h(I_J(t), Y_J(t)),$$

$$C = g(I_C(t), Y_C(t)), \quad (6)$$

$$\frac{\partial_1 f(X(t), E(t))}{\partial_2 f(X(t), E(t))} = \frac{p_X(t)}{p_E(t)},$$

$$\frac{\partial_1 h(I_J(t), Y_J(t))}{\partial_2 h(I_J(t), Y_J(t))} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)},$$

$$\frac{\partial_1 g(I_C(t), Y_C(t))}{\partial_2 g(I_C(t), Y_C(t))} = \frac{p_I(t)}{p_X(t)}, \quad (7)$$

$$p_Y(t)Y(t) = p_X(t)X(t) + p_E(t)E(t), \quad (8)$$

$$p_J(t)J(t) = p_I(t)I_J(t) + p_X(t)Y_J(t),$$

$$p_C(t)C(t) = p_I(t)I_C(t) + p_X(t)Y_C(t), \quad (9)$$

$$X(t) = Y_J(t) + Y_C(t), I(t) = I_J(t) + I_C(t). \quad (10)$$

Функции $f(\cdot, \cdot)$, $g(\cdot, \cdot)$, $h(\cdot, \cdot)$ будем искать в классе функций с постоянной эластичностью замещения: $u(X, Y) = (aX^e + bY^e)^{1/e}$, где $a, b \geq 0$. Минимизируется сумма квадратов погрешностей выполнения равенств (5)–(7) при условии, что (8)–(10) выполняются точно ((8)–(9) рассчитываются статистическими службами, а (10) не используют нелинейных преобразований). В (5)–(6) правые и левые части взяты в логарифмах, так как компоненты ВВП растут экспоненциально.

Использовались данные Института народно-хозяйственного прогнозирования с 2000 по 2008 гг. [3]. Решение подтверждает возможность дезагрегирования российского ОМБ в три продукта, показывает эластичности замещения отечественного и внешних продуктов, выявляет рост внутренних цен по отношению к внешним и рост импортозависимости.

Литература

1. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А. Новая технология моделирования экономики и модель современной экономики России. — М.: Московский инженерно-физический институт (гос. университет), 2007.
2. Lloyd P.J., Zhang X.-G. The Armington Model // Government of the Commonwealth of Australia. — Productivity Commission, Productivity Commission Staff Working Paper, January 2006.
3. ИНХП РАН <http://macroforecast.ru/>.

УДК 519.86

А.В. Гасников, Е.В. Гасникова, Ю.В. Дорн
 gasnikov@yandex.ru, egasnikova@yandex.ru, dorn@pisem.net
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)

О некоторых примерах конечных однородных эргодических марковских процессов с огромным числом состояний

В работе изучается динамика макросистем при больших значениях времени. В основе динамики лежит дискретный эргодический марковский процесс с огромным числом состояний. При больших значениях времени распределение макросистемы по микросостояниям будет близко к стационарному. С ростом размерности макросистемы (количества состояний марковского процесса) стационарное распределение будет концентрироваться в окрестности наиболее вероятного макросостояния, которое и принимается за равновесное для данной макросистемы. В качестве примеров применения описанного формализма, приводится вывод распределения населения по доходу Больцмана — Парето (пример 1) и вывод статической гравитационной модели Вильсона расчёта матрицы корреспонденций (одной из наиболее популярных в приложениях) исходя из «разумной» (индивидуально выгодной) динамики обменов местами работы и местами жительства (пример 2).

Пример 1 (В. Парето (1896) распределения населения по доходу [1]). В некотором городе живет $N \gg 1$ пронумерованных жителей. У каждого i -го жителя есть в начальный (нулевой) момент времени $M_i(0)$ рублей (целое, неотрицательное число). Время пошло ($t = 0, 1, 2, 3, \dots$). В каждый момент времени $t \in N$ с равной вероятностью выбираются произвольные два жителя (любые два номера от 1 до N) — пусть (для определённости) это жители с номерами k и m . Если выигрывает k -й житель (вероятность этого события равна $1/2$), то при условии $M_m(t-1) > 0$ имеем

$$M_k(t) = M_k(t-1) + 1, \quad M_m(t) = M_m(t-1) - 1;$$

при условии $M_m(t-1) = 0$ ничего не происходит

$$M_m(t) = M_m(t-1) = 0, \quad M_k(t) = M_k(t-1).$$

Если выигрывает m -й житель (вероятность этого события равна $1/2$), то при условии $M_k(t-1) > 0$ имеем

$$M_k(t) = M_k(t-1) - 1, \quad M_m(t) = M_m(t-1) + 1;$$

при условии $M_k(t-1) = 0$ ничего не происходит

$$M_m(t) = M_m(t-1), \quad M_k(t) = M_k(t-1) = 0.$$

Пусть $x_s(t)$ — доля жителей города, имеющих ровно s рублей в момент времени t (замечим, что $x_s(t)$ — случайная величина). Пусть $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N M_i(0) = \bar{M}$. Тогда

$$\forall q = 0, \dots, \bar{M}N \exists \lambda > 0:$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\forall s = 0, \dots, q \rightarrow \left|x_s(t)/Ce^{-s/\bar{M}} - 1\right| \leq \lambda/\sqrt{N}\right) \geq 0,999,$$

где C определяется из условия нормировки $\sum_{s=0}^{\bar{M}N} Ce^{-s/\bar{M}} = 1$.

Пример 2 (А.Дж. Вильсона (1967) расчёта матрицы корреспонденций [2]). В некотором городе имеется n районов, $L_i > 0$ — число жителей i -го района, $W_j > 0$ — число работающих в j -м районе, $x_{ij}(t) \geq 0$ — число жителей, живущих в i -м районе и работающих в j -м в момент времени $t \geq 0$. Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, и равно $N = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{j=1}^n W_j$) меняют места жительства (квартиры) и места работы.

Считается, что отмеченные изменения могут происходить только за счёт обмена (квартирами или местами работы), то есть

$$x_{ij}(t) \geq 0, \quad \sum_{j=1}^n x_{ij}(t) \equiv L_i, \quad \sum_{i=1}^n x_{ij}(t) \equiv W_j, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Пусть в момент времени $t \geq 0$ r -й житель живет в k -м районе и работает в m -ом, а l -й житель живет в p -м районе и работает в q -ом. Тогда $p_{k,m;p,q}^L(t) \Delta t + o(\Delta t)$ — есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \leq r < l \leq N$) поменяются квартирами в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Аналогично, $p_{k,m;p,q}^W(t) \Delta t + o(\Delta t)$ — есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \leq r < l \leq N$) поменяются местами работы в промежутке времени $(t, t + \Delta t)$. Естественно считать, что вероятность в единицу времени обмена местами работы (или местами жительства) зависит только от мест проживания и работы обменивающихся. Например, можно считать, что время потраченное в пути от района i до района j — есть $c_{ij} > 0$, а $p_{k,m;p,q}^L(t) \equiv p^L \frac{c_{km}c_{pq}}{c_{pm}c_{kq}} > 0$, $p_{k,m;p,q}^W(t) \equiv p^W \frac{c_{km}c_{pq}}{c_{pm}c_{kq}} > 0$. Тогда по эргодической теореме для конечных однородных марковских процессов (см. §13, главы VI книги [3]) (параметр γ — находится из условия нормировки)

$$\begin{aligned} \forall \{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n} \in (1) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} P(x_{ij}(t) = x_{ij}, i, j = 1, \dots, n) = \\ = \prod_{i=1,j=1}^{n,n} (\gamma \cdot c_{ij})^{-x_{ij}} \cdot (x_{ij}!)^{-1} \stackrel{def}{=} p(\{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n}). \end{aligned}$$

Распределение $p(\{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n})$ на множестве (1) сконцентрировано при $N \gg 1$ (см., например, замечание ниже) в окрестности наиболее вероятного значения $\{x_{ij}^*\}_{i=1,j=1}^{n,n}$, которое находится, как решение задачи энтропийно — линейного программирования:

$$\sum_{i=1,j=1}^{n,n} x_{ij} \ln x_{ij} + \gamma \cdot \sum_{i=1,j=1}^{n,n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min_{\{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n} \in (1)}. \quad (2)$$

Решение задачи (2) можно представить как $x_{ij} = \exp(-1 - \lambda_i^L - \lambda_j^W - \gamma c_{ij})$, где множители Лагранжа (двойственные переменные) $\{\lambda_i^L\}_{i=1}^n$ и $\{\lambda_j^W\}_{j=1}^n$ определяются из равенств системы (1). Поэтому справедливо представление «гравитационной

модели» (с γ — находящимся из условия нормировки $p(\{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n})$ на множестве (1) и с $\beta = 1$):

$$x_{ij} = A_i B_j L_i W_j \exp(-\gamma c_{ij}^\beta),$$

где $\{A_i\}_{i=1}^n$ и $\{B_j\}_{j=1}^n$ определяются из соотношений:

$$A_i = \left(\sum_{j=1}^n B_j W_j \exp(-\gamma c_{ij}^\beta) \right)^{-1}, \quad B_j = \left(\sum_{i=1}^n A_i L_i \exp(-\gamma c_{ij}^\beta) \right)^{-1}.$$

При калибровке гравитационной модели для трудовых корреспонденций в крупных городах получались следующие значения параметров: $\gamma \approx 0,065$ и $\beta \approx 1$. Описанная в примере 2 модель активно используется в теоретико — игровых моделях (типа Дж. Г. Вардрона) равновесного распределения потоков.

Замечание. Если $N \sim n^{\alpha+1}$, $L_i, W_j \sim n^\alpha$ ($\alpha > 1$), $n \gg 1$, $\forall i, j = 1, \dots, n \rightarrow c_{ij} = c > 0$, то распределение вероятностей $p(\{x_{ij}\}_{i=1,j=1}^{n,n})$ на множестве (1) сконцентрировано в $O(n^{(\alpha-1)/2})$ окрестности наиболее вероятного значения $x_{ij}^* \approx L_i W_j / N \sim n^{\alpha-1}$. Поэтому,

$$\exists \lambda > 0: \lim_{t \rightarrow \infty} P(\forall i, j = 1, \dots, n \rightarrow |x_{ij}(t)/x_{ij}^* - 1| \leq \lambda/n^{(\alpha-1)/2}) \geq 0,999.$$

Работа поддержана грантами РФФИ № 07-01-00703, РФФИ № 08-07-00158, РГНФ № 08-02-00347, грантом Президента РФ (по государственной поддержке ведущих научных школ) проект № НШ — 2982.2008.1, ПФИ ОМН РАН № 3, ПФИ Президиум РАН П-2. Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 — 2013 годы (1.2.1, НК-15 П (3); 1.3.1, НК-215 П (1)).

Литература

1. Dragulescu A., Yakovenko V.M. Statistical mechanics of money // The European Physical Journal B. — 2000. — V. 17. — P. 723–729. arXiv: cond-mat/0001432v4.
2. Вильсон А.Джс. Энтропийные методы моделирования сложных систем. — М.: Наука, 1978.
3. Буллинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2003.

В.А. Горбачев¹, Н.Н. Оленев^{2,3}

g_vova@inbox.ru, olenev@ccas.ru

¹ Российский университет дружбы народов

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

³ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Имитационная модель добывающего сектора экономики Монголии с учётом теневого оборота

В данной работе рассмотрена нормативная вычислимая математическая модель добывающего сектора экономики Монголии с учётом теневого оборота. Динамика материальных и финансовых балансов выражается через изменения запасов природных ресурсов, факторов производства и денег. Заданные параметры и переменные модели имеют понятный экономический смысл. Потоки благ в модели описаны посредством дифференциальных уравнений на основе балансового метода.

Для проведения качественных и количественных расчётов на модели проведена идентификация её внешних параметров. Большая часть параметров модели не может быть оценена напрямую из данных экономической статистики, для их идентификации необходимо сравнивать полученные при расчётах на модели временные ряды макропоказателей со статистическими временными рядами этих макропоказателей.

В качестве экономических агентов выделим добывающий сектор, домашние хозяйства L , банковскую систему B и Правительство (консолидированный бюджет) G . Производитель поставяет продукцию на внутренний и внешний рынок. Домашние хозяйства предлагают труд и потребляют конечную продукцию. Банковская система выпускает денежные средства, выдает кредиты производителям с целью извлечения банковской прибыли. Правительство региона собирает налоги с производителей и домашних хозяйств. Считаем, что своя цена формируется на каждом рынке, и изменение цены обратно пропорционально изменению запасов соответствующих продуктов.

Для учёта в модели теневого оборота мы предполагаем, что добытый из природной среды продукт производитель делит на легальный и теневой, который не облагается налогами. В результате у производителя оказывается два вида денег — «белые» и «черные». «Черные» деньги могут отмываться, а запас неотмытых денег подвергается штрафным санкциям — «налогообложению» теневого сектора. У потребителя все деньги считаются «белыми», а свой доход потребитель делит по заданным нормам потребления легальных и теневых продуктов всех секторов. Занятое в отрасли население получает «белую» заработную плату и заработную плату «в конверте».

В данной работе интенсивные показатели и параметры будем обозначать строчными символами, а экстенсивные показатели и именованные индексы — прописными. Считаем, что распределение запаса каждого блага и распределение денег производится по нормативу. Параметры производственной функции сектора заданы константами. В модели учтено налогообложение.

Для проведения численных экспериментов над моделью была проведена идентификация её внешних параметров. Идентификация осуществлена на основе анализа собранных статических данных.

Большая часть параметров не может быть оценена напрямую из данных экономической статистики, для их идентификации нужно сравнивать полученные при расчётах на модели временные ряды макропоказателей со статистическими временными рядами этих макропоказателей.

Численные эксперименты с моделью проводились, чтобы найти работоспособный вариант, качественно верно отражающий процессы, происходящие в экономике Монголии. Численные эксперименты показали работоспособность полной модели и отдельных её частей. Это значит, что модель может использоваться в дальнейшей работе.

Некоторые графические результаты расчётов, полученные в ходе проведения численных экспериментов, представлены на рис. 1, 2, 3.

Из представленных рисунков видно, что макропоказатели принимают экономически осмысленные значения. Это значит, что внешние параметры этого варианта можно взять за основу для более точной идентификации модели в будущем, а сам вариант использовать как базовый для проведения качественных сценарных расчётов.

Итак, общий вывод таков: требуются дополнительные усилия для сбора статистических данных и приведения результатов расчётов в соответствие с ними в результате проведения трудоемких процедур идентификации. Работа выполнена при поддержке РФФИ (коды про-

ектов №№ 09-01-90201-Монг_а, 08-01-00377), ПФИ ОМН РАН № 3, ПФИ Президиума РАН П-2, Гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-2982.2008.1).

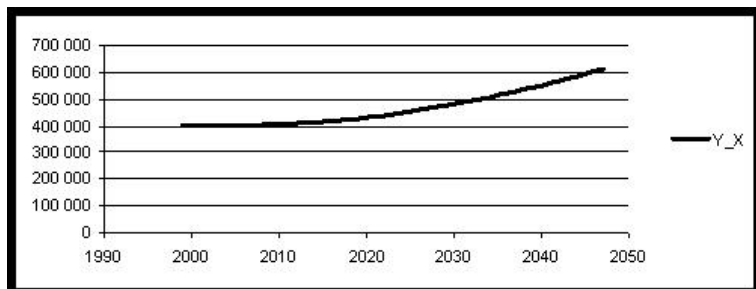


Рис. 1. Выпуск продукции добывающего сектора экономики Монголии, тонн

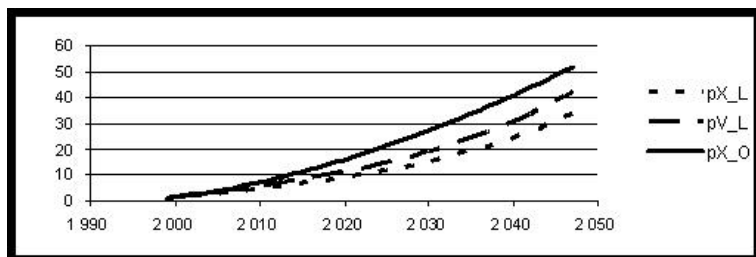


Рис. 2. Индекс цен на продукцию добывающего сектора

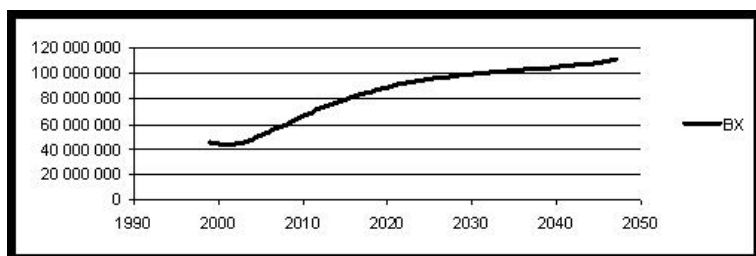


Рис. 3. Теневые деньги, \$

Литература

1. Горбачев В.А., Оленев Н.Н. Частное решение трёхсекторной вычислимой модели экономики Кировской области. — Долгопрудный:

Труды 51-й научной конференции МФТИ., 2008. — Ч. VII. Управление и прикладная математика. Т. 1. — 47 с.

УДК 51-73

А.И. Евстафьев

evstafyev_artem@mail.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Устойчивая формула построения виртуальных проекций лучевого преобразования для конусной схемы сканирования

Под задачей обращения лучевого преобразования понимается задача восстановления функции по известным интегралам, взятым вдоль линейных многообразий. Для конусной схемы сканирования задача формулируется следующим образом. Предположим, задана функция ω , описывающая распределение массы внутри цилиндра $K \times R$ с основанием $K = \{x \in R^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1, x_3 = 0\}$ и главной осью, направленной вдоль оси x_3 . Известно значение интегралов от этой функции вдоль всевозможных прямых, проходящих через окружность ∂K . Окружность ∂K в данной задаче называют траекторией источника излучения. Значения этих интегралов находятся по формуле

$$u(x,p) = \int \omega(x + ps, s) ds,$$

где $x \in \partial K$, а $p \in R^2$.

По данным значениям функции $u(x,p)$ необходимо определить распределение массы внутри цилиндра. Задача имеет применение в геологической томографии. С ее помощью можно исследовать вращающийся цилиндрический образец породы с высокой точностью. Задачи, сходные с данной, но для других траекторий источников рассматривались в работах Кириллова А.А. (1961) [2], Туу Н.К. (1983) [3]. Также аналогичная задача, но с ограничением носителя функции на единичный шар рассматривалась в работе Аниконова Ю.Е. (1978) [4].

Конструктивные формулы для цилиндрической задачи были получены А.С. Благовещенским (1986) [1]. Задача решается в два этапа. На первом этапе по значениям функции $u(x,p), x \in \partial K, p \in R^2$ строятся виртуальные проекции, то есть находятся значения функции $u(x,p), x \in K, p \in R^2$ (под значениями функции подразумеваются значения интегралов, определённых выше). На втором этапе по значениям функции $u(x,p), x \in K, p \in R^2$ находятся значения функции $\omega(x,s), x \in K, s \in R$. Однако на этапе построения виртуальных проекций используются формулы, которые не являются устойчивыми относительно входных данных. Поясним это утверждение. Рассмотрим пространство функций ω из класса $C^\infty(Q)$ с компактным носителем Q , причём носитель находится внутри полуцилиндра $Z = \{x \in R^3 | x_1^2 + x_2^2 < 1, x_3 > 0\}$. Обозначим через P оператор лучевого преобразования, переводящий функцию ω в функцию u на окружности, а через S — оператор, переводящий функцию ω в функцию u на круге. Пространства $PC^\infty(Q)$ и $SC^\infty(Q)$ являются подпространствами пространств $C^\infty(W)$ и $C^\infty(V)$, где W и V — это компакты, зависящие от компакта Q . В этих пространствах можно ввести следующие нормы:

$$\|u\|_{C^\infty(W)}^2 = \sum_{i+j \leq 2} \sup_{y \in \partial K} \int_{R^2} \left(\frac{\partial^i \partial^j}{\partial p_1^i \partial p_2^j} u(y,p) \right)^2 dp,$$

$$\|u\|_{C^\infty(V)}^2 = \int_K \int_{R^2} u^2(y,p) dp d\Omega_y.$$

В работе [1] построен оператор A , переводящий произвольную функцию $u(x,p), x \in \partial K, p \in R^2$ в функцию $u(x,p), x \in K, p \in R^2$, по следующей формуле:

$$u(x,p) = \int_{\partial K} \int_{R^2} u(y,p') T(x,p,y,p') d\Omega_y dp', x \in K, p \in R^2,$$

$$T(x,p,y,p') = \frac{1}{2\pi^2} \cos \frac{\pi\lambda}{2} \cdot |(x,x-y)(y,p-p') + (y,y-x)(x,p-p')|^\lambda |_{\lambda=-2} \times \\ \times (|x|^2|y|^2 - (x,y)^2)(y,y-x)I((x-y,x) \geq 0).$$

Однако этот оператор не устойчив, а кроме того функции, полученные по этому оператору, не определены в некоторых точках.

В работе рассматривается регуляризованная формула, обладающая свойством устойчивости относительно начальных данных.

Обозначим оператор, соответствующий данной формуле, через B . Этот оператор можно представить в следующем виде:

$$u(x,p) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\partial K} \int_R \int_0^\infty \frac{u(y,p + \alpha k + \beta k^\perp) + u(y,p - \alpha k + \beta k^\perp) - 2u(y,p + \beta k^\perp)}{\alpha^2} \times \\ \times (|x|^2|y|^2 - (x,y)^2)(y,y-x)I((x-y,x) \geq 0) d\alpha d\beta d\Omega_y, \\ k = \frac{y(x,x-y) + x(y,y-x)}{|y(x,x-y) + x(y,y-x)|} \text{sign}(x^\perp, y).$$

Для каждого $\omega \in C^\infty(Q)$ выполнено $S\omega = B P \omega$. Кроме того, выполнено следующее утверждение.

Теорема. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что если $u \in C^\infty(W)$ и $\|u\|_{C^\infty(W)} < \delta$, то $\|Bu\|_{C^\infty(V)} < \varepsilon$.

Литература

1. Благовещенский А.С. О восстановлении функции по известным интегралам от нее, взятым вдоль линейных многообразий // Математические заметки. — 1986. — Т. 39, № 6. — С. 841–849.
2. Кириллов А.А. Об одной задаче Гельфанда И.М // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 137, № 2. — С. 276–277.
3. Туу Н.К. An inverse formula for cone-beam reconstruction // SIAM J. Appl. Math. — 1983. — V. 43. — P. 546–552.
4. Аниконов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: Наука, 1978. — 120 с.

Е.С. Жичкина

geny_work@bk.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Неединственность решения проблемы Кальдерона в применении к задаче маскировки объектов

Проблемой Кальдерона называется задача определения коэффициента электропроводности σ внутри некоторой проводящей области Ω по измерениям, проводимым на границе. Предположим, задана функция u , описывающая распределение электрического потенциала внутри Ω , где она удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot \sigma \nabla u = 0.$$

Известно значение потенциала на границе, а также нормальная составляющая плотности тока через границу. В силу единственности решения задачи Дирихле для потенциала в области отображение Λ_σ различных значений $u|_{\partial\Omega}$ потенциала на границе в соответствующие им граничные значения тока $\sigma \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega}$ однозначно определено.

По данному отображению (DN-карте) необходимо определить распределение коэффициента электропроводности в области. Изначально задача возникла в геофизике как задача разведки полезных ископаемых. В медицине она известна как электроимпедансная томография и имеет широкое применение, например, в диагностике раковых опухолей. Вопрос о единственности решения данной проблемы впервые был поставлен И.М. Гельфандом. В случае изотропной проводимости Sylvester J и Uhlman G. [1] доказали единственность решения для размерности пространства больше или равной трём и гладкой проводимости. Далее A. Nachman [2] получил результат для двумерного пространства. В случае анизотропной проводимости единственность как таковая невозможна. Любой диффеоморфизм области на себя, тождественный на границе, даёт новое распределение электропроводности в области, дающее ту же DN-карту. Кроме этого, все результаты единственности опираются на строгую положительность электропроводности в области. Анизотропная, вырождающаяся

ся в ноль проводимость, нарушающая условия единственности, была использована в [3] для построения примера математической модели маскирующего покрытия. Такое покрытие делает невозможным обнаружение объекта описанными выше электрическими измерениями на границе.

Выросший в последнее время интерес к метаматериалам (материалам, с задаваемыми электромагнитными свойствами) и бурное развитие данной области позволяют надеяться на возможное практическое применение построенной модели. В работе рассматривается подход к математическому моделированию маскирующего покрытия и его физической реализации.

Литература

1. Sylvester J., Uhlman G. A global uniqueness theorem for an inverse boundary problem // Annals of Mathematics. — 1987. — V. 125, N1. — P. 153–169.
2. Nachman A. Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem // Annals of Mathematics. — 1996. — V. 143, N1. — P. 71–96.
3. Greenleaf A., Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Invisibility and inverse problems // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2009. — V. 46, N1. — P. 55–97.

*А.А. Жукова¹, И.Г. Поспелов², М.А. Хохлов¹,
Н.П. Пильник³*

alexa10@mail.ru, pospeli@yandex.ru, aeol@mail.ru, u4d@yandex.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

³ Государственный университет Высшая школа экономики

Опыт моделирования экономики Казахстана в период кризиса

Модель построена в парадигме системного анализа развивающейся экономики, предложенной А.А. Петровым и И.Г. Поспеловым. Плотность её доказана успешным выполнением ряда прикладных проектов по моделированию российской экономики [1, 2]. Модель описывает развитие во времени полного цикла общественного воспроизводства (производства — распределения — потребления) в экономике в разрезе одного продукта, труда и 6 финансовых инструментов (наличных денег, остатков расчётных счетов, остатков корреспондентских счетов в ЦБ, банковских ссуд, банковских депозитов, иностранной валюты).

Продукт — реальный ВВП — представляет агрегат материальных благ: ресурсов, товаров и услуг, образованный по методике, принятой при составлении межотраслевых балансов. Финансовый инструмент — агрегат реальных финансовых инструментов, образованный по методике, принятой в статистике системы денежного обращения.

Потоки продукта, труда и финансовых инструментов удовлетворяют системе уравнений материальных и финансовых балансов. Величины потоков определяются решениями субъектов экономики — физических и юридических лиц и механизмами согласования этих решений, например, рыночным торгом или отношениями собственности и власти. Действия множества реальных субъектов описаны как рациональная деятельность следующих 8 экономических (макро) агентов: производитель, население, банк, собственник, экспортер и импортер, центральный банк, государство.

Модель формально представляет собой систему динамических и конечных уравнений, которая определяет траекторию изменения пе-

ременных при заданных значениях параметров и траекториях изменения экзогенных переменных. Часть параметров (начальные значения фазовых переменных, предельные производительности факторов производства, предельные полезности потребительских благ, темпы выбытия, скорости обращения денег в различных секторах экономики и др.) характеризуют сложившиеся в РК экономические отношения. Их значения определяются в процессе идентификации модели. Остальные параметры (ставки налогов и пошлин, нормы резервирования и амортизации) характеризуют относительно стабильные элементы государственной экономической политики. Они определяются из статистики или сценарием.

Модель предназначена для аналитических и прогнозных расчётов. Аналитический расчёт проводится при изменении прошлых значений сценарных переменных и позволяет качественно оценить значимость и направление различных внешних факторов и управляющих воздействий на разных этапах развития экономики. Прогнозный расчёт проводится при изменении будущих значений сценарных переменных и позволяет дать вариантный прогноз развития экономики.

Теоретической основой модели является межвременное равновесие. Контрагенты задают свои планы как функции спроса или предложения, зависящие от значений информационных переменных (цен, процентов, курсов и т. п.). Именно, функции спроса/предложения агентов Производителя, Банка, Населения и Собственника вычисляются в результате решения задач оптимального управления. Задача у каждого агента своя: Производитель, Банк и Собственник максимизируют каждый свою капитализацию, а Население — ожидаемую полезность своего потребления. В этих задачах балансы, описания технологических возможностей и сложившихся институтов (например, условия резервирования для Банка или соотношения количественной теории денег для Производителя и Населения) выступают в качестве ограничений. Информационные переменные при решении задачи отдельного агента считаются экзогенными. Использование указанных функции спроса и предложения позволяет получить динамическое описание экономики, а не последовательность статических равновесий, которые получаются в стандартных макроэкономических моделях или даже в более сложных «вычислимых моделях общего равновесия» (CGE). Модель межвременного равновесия подразумевает проведение большого объёма аналитических преобразований и требует сложных алгоритмов решения. Но мы полагаем её применение оправданным, поскольку экономические процессы в Казахстане в по-

следние годы протекают достаточно бурно, даже по сравнению с Россией.

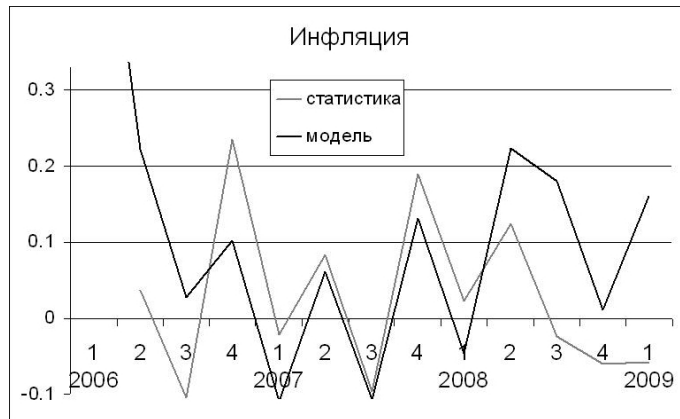


Рис. 1. Инфляция



Рис. 2. Реальный ВВП

Результаты расчётов с целью идентификации модели представлены на рис. 1, 2. Рисунки показывают, что модель весьма удовлетворительно воспроизводит по величине и по фазе колебаний наблюдавшиеся сложные траектории реального ВВП и темпа инфляции. Следует отметить, что правильное воспроизведение динамики инфляции является очень сложной задачей в практике математического моделирования экономики. Таким образом, в модели отражены монетарные эффекты, которые оказались столь важными в период кризиса.

Литература

1. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996. — 558 с.
2. Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А. Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. — М.: МИФИ, 2007. — 262 с.

УДК 517.955.8

А.В. Казейкина

kazanna@bk.ru

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Устойчивость решения уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса вида бегущей волны

В связи с развитием метода автомодельной редукции для решения дифференциально-разностных уравнений значительный интерес представляет изучение асимптотического при $t \rightarrow \infty$ поведения решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса:

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0, & b > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

В частности, существенное внимание привлекла задача о распаде ступеньки, то есть случай, когда начальное условие задачи Коши $u_0(x)$ представляет достаточно гладкую функцию, стремящуюся к u_{\pm} при $x \rightarrow \pm\infty$ ($u_- \neq u_+$). При $u_- < u_+$ глобальная устойчивость волны разрежения изучена в [1]. При $u_- > u_+$ И. Наумкиным и И.А. Шишмаревым в [2, 3] получены достаточные условия существования и устойчивости бегущей волны для задачи (1), а также оценки на скорость сходимости в случае, когда $f(u) = u^2$. В настоящей работе при помощи использования аналогичной схемы рассуждений сформулированы достаточные условия существования и устойчивости бе-

гущей волны в случае, когда $f(u)$ является произвольной достаточно гладкой, выпуклой функцией.

Пусть $u_- > u_+$. Под бегущей волной будем понимать функцию $u = \varphi(x - \lambda t)$, удовлетворяющую условиям

1) $u(x, t) = \varphi(x - \lambda t)$ является решением уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса из (1);

2) $\exists \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi(s) = u_+$, $\exists \lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi(s) = u_-$;

3) $\exists \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \varphi'(s) = 0$, $\exists \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \varphi''(s) = 0$.

Теорема 1. Если бегущая волна для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса из (1) существует, то её скорость определяется однозначно из условия

$$\lambda = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}.$$

Пусть $f(u) \in C^2(R)$ и $f''(u) > 0$, а также выполнены условия

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, & a > 0, \\ \frac{b}{\sqrt{-a}} \geq 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, & a < 0. \end{cases}$$

Тогда бегущая волна существует, единственна и монотонна.

Обозначим $w(x, t; \alpha) = \int_{-\infty}^x (u(\xi, t) - \varphi(\xi - \lambda t + \alpha)) d\xi$.

Теорема 2. Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(u) \in C^{n+1}(R)$ для некоторого натурального n , $n \geq 3$, и ограничена вместе со своими производными до порядка $n+1$ включительно,

2) $f''(u) > 0$.

Пусть выполнены условия

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, & a > 0, \\ \frac{b}{\sqrt{-a}} \geq 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, & a < 0. \end{cases}$$

Пусть начальная функция $u_0(x)$ достаточно близка к бегущей волне в следующем смысле: существует такое α , что

$$w(x, 0; \alpha) \in H^\infty(R), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w(x, 0; \alpha) dx < \infty.$$

Тогда существует такое c , что если $\|w(x, 0; \alpha)\|_H < c$, где $H = H^n(R)$, то решение задачи Коши (2) существует, единственно, и существует постоянная A , такая, что

$$\|w(x, t; \alpha)\|_H \leq \frac{A}{\sqrt{t+1}} \quad \forall t \geq 0.$$

Следствие. Если начальное условие $u_0(x)$ задачи Коши (1) достаточно близко к бегущей волне, то решение задачи Коши (1) сходится с течением времени к бегущей волне равномерно по x со скоростью, не меньшей $O\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)$.

Работа поддержана грантами РФФИ № 08-07-00158, РГНФ № 08-02-00347. Работа проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (1.2.1, НК-15 П (3)).

Литература

1. Duan R. Zhao H. Global stability of strong rarefaction waves for the generalized KdV-Burgers equation // *Nonlinear Analysis*. — V. 66. — P. 1100–1117.

2. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // *Функциональный анализ и его приложения*. — 1991. — Т. 25, № 1. — С. 21–32.

3. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. О распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // *Функциональный анализ и его приложения*. — 1991. — Т. 26, № 2. — С. 88–93.

А.В. Косьяненко

a.v.kosyanenko@gmail.com

Государственный университет Высшая школа экономики

Опыт оценки влияния крупных государственных проектов с использованием моделей общего экономического равновесия

Обоснование рациональных объёмов государственных затрат требует комплексного подхода. Основным вопросом является обеспечение необходимого уровня финансирования для выполнения основных государственных функций регулирования, социального и оборонного обеспечения. Следует, однако, принимать во внимание влияние уровня государственных затрат на экономическое развитие страны. Это влияние характеризуется двумя противоположными процессами. С одной стороны, увеличение государственных затрат происходит за счёт повышения налогового бремени, что ограничивает возможности экономического развития. С другой стороны, государственный заказ предоставляет платёжеспособный спрос на продукцию, производимую на территории страны, стимулируя тем самым экономическое развитие. В этой связи естественным является вопрос определения оптимального, с точки зрения положительного отклика экономики, уровня государственных затрат. Другой задачей, которая может быть решена при помощи того же инструмента, является оценка влияния неблагоприятных изменений в макроэкономической конъюнктуре, особенно в ситуации, складывающейся на международных финансовых и товарных рынках, и стратегий противодействия государства такого рода событиям.

Для решения такого рода задач наиболее приспособлены модели общего экономического равновесия. В последние годы подход этот становится всё более популярным. Известными работами такого рода являются модель экономики Австралии MONASH [1] и модель экономики зоны евро, разработанная Европейским центральным банком [2]. Современное состояние зарубежных исследований описано,

например, в обзоре Грассини [5]. Среди русскоязычных исследований отметим работы [3, 6].

В ходе настоящего исследования использовалась модификация модели общего равновесия, описанной в [4]. В основе подхода лежит описание взаимодействия двух секторов экономики — производственного и домашних хозяйств на рынках товаров и услуг и рынке труда. Население (домашние хозяйства) максимизируют свою полезность, определяемую уровнем конечного потребления и уровнем занятости при наличии бюджетного ограничения. Производственные предприятия максимизируют свою прибыль при наличии технологических ограничений по выпуску продукции в условиях ограниченности основных фондов и объёме трудовых ресурсов, выбираемых на рынке труда. Балансовые соотношения на рынках труда и товаров и услуг выполняются по построению.

Роль государства в рассматриваемой модели сводится к определению фискальной и бюджетной политики. При этом доходная часть бюджета определяется как сумма налогов и сборов, для определения каждого из которых вычисляется его налогооблагаемая база. Такой подход позволяет с гораздо более высокой точностью вычислять характеристики бюджетного процесса. Исходная модель использовалась для расчёта оценки влияния реализации различных бюджетных программ на экономику государства. Помимо прочего, модель позволяла оценивать различные варианты политики заимствования и управления государственными резервами.

Российская экономика существенно открыта и многие её характеристики существенным образом зависят от характера внешнеэкономических операций. В первую очередь речь идёт об экспорте энергетических и сырьевых ресурсов, кроме того, следует учитывать зависимость экономики от импорта потребительских товаров. Ключевыми характеристиками в этом смысле становятся цены, складывающиеся на мировых сырьевых (цены на энергоносители) и финансовых (курсы валют) рынках. В случае возникновения неблагоприятной конъюнктуры на рынках возможно возникновение дефицита бюджета. Способы устранения этого дефицита по природе своей могут рассматриваться сами по себе как крупные государственные программы и оцениваться соответствующим образом. Кроме того, даже в отсутствие бюджетного дефицита неблагоприятная рыночная конъюнктура может иметь отрицательные последствия для социально-экономического развития государства. Предложенная модель использовалась для оценки влияния такого рода неблагоприятных явлений. Другая

модификация модели [4] использовалась для оценки влияния реализации программы инновационного развития фармацевтической отрасли до 2020 г. на экономическое развитие страны.

Как подтвердилось в ходе проведения экспериментов, даже краткосрочные изменения в рыночной конъюнктуре или стратегии действий государства имеют долгосрочные последствия. Получаемые оценки носят комплексный характер, поскольку описывают отклик экономической системы в целом. В частности, в ответ на сокращение финансирования федерального бюджета происходит сокращение инвестиционных программ, финансируемых государством и частным сектором, что ведёт к снижению темпов экономического роста, происходит снижение покупательной способности и уровня жизни населения. Различные стратегии действий со стороны государства обеспечивают существенно различные результаты.

Литература

1. *Dixon P.B., Rimmer M.T.* Dynamic general equilibrium modeling for forecasting and policy. A practical guide and documentation of MONASH. Amsterdam, North-Holland, 2002. — 338 p.
2. *Smets, F. and Wouters R.* An estimated stochastic general equilibrium model of the euro area // Journal of Economic Association. — 2003. — V. 1, N. 5. — P. 1123–1175.
3. *Андреев М.Ю., Поспелов И.Г., Поспелова И.И., Хохлов М.А.* Технология моделирования экономики и модель современной экономики России. — М.: МИФИ, 2007. — 262 с.
4. *Гусев В.Б., Косьяненко А.В.* Оценка влияния государственного заказа на воспроизводство ВВП // Проблемы управления. — 2009. — № 2. — С. 23–30.
5. *Грассини М.* Проблемы применения вычислимых моделей общего равновесия для прогнозирования экономической динамики // Проблемы прогнозирования. — 2009. — № 2. — С. 30–49.
6. *Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Сулашкин С.С.* Применение вычислимых моделей в государственном управлении. — М.: Научный эксперт, 2007. — 304 с.

УДК 519.866

А.Г. Котельникова

alena.kotelnikova@phystech.edu

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт системного анализа РАН

Применение модели энтропийной декомпозиции при решении задач пространственной макроэкономики

Национальная экономика в рамках концепции пространственной экономики может быть представлена как объединение взаимодействующих, пространственно-распределённых региональных экономик.

Модели пространственной макроэкономики основываются на определённой регионализации экономического пространства. Будем рассматривать экономическое пространство как совокупность регионов, каждый из которых имеет собственный набор признаков-показателей. На практике оказывается, что чем меньше регион, тем менее доступна информация о значениях его показателей. В свете этого, актуальной видится задача определения показателей мелких районов, исходя из известных значений показателей крупных регионов. Эту задачу позволяет решить метод, использующий понятие энтропийной декомпозиции.

Распределение региональных показателей по районам, названное энтропийной декомпозицией [1], есть результат решения следующей задачи:

$$H(S) \Rightarrow \max, S \in D,$$

где $H(S) = -\sum_{i=1, j=1}^{I, M_i} S_{ij} \ln \frac{S_{ij}}{a_{ij}e}$ — обобщённая информационная энтропия Больцмана [2], выбранная в качестве меры неопределённости;

$$D = \left\{ S_{ij} | S_i = \sum_{j=1}^{M_i} S_{ij}; \sum_{j=1}^{M_i} q_{ijk}(S) = Q_{ik}(S), i = 1, \dots, I, k = 1, \dots, r \right\};$$

S — матрица с элементами S_{ij} , характеризующая распределение районных показателей, a_{ij} — параметры энтропийной функции H , M_i —

количество районов в каждом регионе, $q_{ijk}(S)$ — районные потенциалы, $Q_{ik}(S)$ — региональные потенциалы, r — количество типов ресурсов в каждом регионе, I — количество регионов.

Данная задача может иметь несколько постановок. В общей постановке все регионы и районы взаимосвязаны через соответствующие производственные функции. Также возможен крайний случай — когда все они изолированы.

Эта задача может применяться в моделировании, анализе и прогнозировании развития транспортной инфраструктуры, когда типична ситуация, в которой пространственное деление территории на районы достаточно мелкое, тогда как информация о показателях состояния имеется только для их агрегатов. Применимость данной модели проанализирована на примере решения задачи распределения населения по транспортным ячейкам для региона Нанджинг (Китай). Получено, что модельное распределение удовлетворительно соответствует реальному распределению и является устойчивым по входным данным. Модель энтропийной декомпозиции может использоваться для решения более широкого круга задач.

Далее рассмотрим частный случай регионального потенциала, когда Q_r зависит только от расстояния между регионами d_{rs} . В этом предположении

$$Q_r = \sum_{s \in N}^{M_s} \exp(-\beta d_{rs}) \quad \forall r \in N,$$

где Q_r — потенциал региона r , M_s — «масса» региона s , d_{rs} — расстояние между r и s или затраты на преодоление расстояния, $N(1, \dots, n)$ — набор исследуемых регионов, β — неизвестный параметр.

Однако данная формула имеет существенный недостаток, когда речь идёт о собственном потенциале региона, то есть в случае $s = r$. Можно работать в предположении, что d_{rr} пропорционально квадратному корню из площади региона r . Но, к сожалению, данный подход плохо отражает действительность при больших значениях параметра β . Действительно, при $\min_{s \in N}(d_{rs}) < \min_{s \in N}(d_{r's})$ для двух регионов r и r' получаем, что

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{Q_r(\beta)}{Q_{r'}(\beta)} = \infty.$$

Этой проблемы можно избежать, если рассматривать регион как непрерывное пространство с определённой функцией распределения плотности массы. Поскольку вид распределения плотности массы в

общем случае не известен, для простоты выкладки будем полагать его равномерным с удельной плотностью $m_r = \frac{M_r}{F_r}$, а сам регион — окружностью с площадью $F_r > 0$ и радиусом $c_r = \left(\frac{F_r}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. В этих предположениях собственный потенциал региона Ω_r будет выражаться следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega_r(\beta, m_r, c_r) &= \\ &= m_r \int_0^{c_r} 2\pi \tilde{c} \exp(-\beta \tilde{c}) d\tilde{c} = m_r \beta^{-2} 2\pi [1 - \beta c_r \exp(-\beta c_r) - \exp(-\beta c_r)]. \end{aligned}$$

Прежде чем изучать предельные свойства потенциальной формулы, произведем z -стандартизацию:

$$z_r(x) = [x_r - E(x)] \left(\frac{1}{n-1} \sum_{s=1}^n [x_s - E(x^2)] \right)^{-\frac{1}{2}},$$

где $E(x) = \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n x_s$.

Тогда измененный потенциал будет определяться как

$$\Phi_r(\beta) = z_r[P(\beta)],$$

$$\begin{aligned} P(\beta) &= [P_1(\beta), \dots, P_n(\beta)], \\ P_r(\beta) &= \Omega_r(\beta, m_r, c_r) + \sum_{\substack{s \in N \\ s \neq r}} M_s \exp(-\beta d_{rs}). \end{aligned}$$

В этом случае при устремлении β к бесконечности плотности не будут одинаковыми для всех регионов: $\lim_{\beta \rightarrow \infty} \Phi_r(\beta) = z_r(m)$.

Таким образом, показано, что классическая потенциальная формула в виде убывающей с расстоянием экспоненциальной функции имеет определённую ошибку при рассмотрении собственного потенциала региона. Поэтому целесообразно использовать модифицированную формулу.

Автор благодарит Попкова Ю.С. за интересную постановку задачи.

Литература

1. Попков Ю.С. Макросистемные модели пространственной экономики. — М.: Комкнига, 2008. — 240 с.
2. Попков Ю.С. Теория макросистем. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 320 с.

3. Brocke J. How to eliminate certain defects of the potential formula // Environment and Planning A. — 1989. — V. 21, N. 6. — P. 709–850.

4. Wilson A.G. A statistical theory of spatial distribution models // Transportation Research. — 1967. — V. 1. — P. 253–269.

УДК 519.866

В.А. Лапшин

victor.lapshin@gmail.com

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Государственный университет Высшая школа экономики

Построение практической непараметрической модели динамики срочной структуры процентных ставок

Срочная структура процентных ставок, более известная как кривая доходности, в развитых странах рассматривается как главный и наиболее информативный индикатор состояния финансового рынка и является одним из важнейших макроэкономических параметров и эталоном для оценки ценных бумаг в других секторах рынка инструментов фиксированной доходности. В связи с этим особую важность имеет задача нахождения кривой доходности по рыночным данным.

До сих пор используемые модели определяли либо всю кривую в один момент времени, работая с «моментальным снимком» рынка, либо временную стохастическую динамику одной точки кривой (обычно её левого конца, который имеет особый экономический смысл). В [1] показано, что ни одна из существующих параметрических моделей кривой доходности не может быть снабжена никакой стохастической динамикой при условии отсутствия арбитражных возможностей.

Для преодоления этих ограничений возможно использование непараметрических моделей. Их сложность, а также трудоёмкость оценки параметров таких моделей приводят к тому, что на текущее время не известно ни одной модели подобного рода.

В работе [2] путём обобщения модели, описанной в [3], был предложен общий подход к построению непараметрических (бесконечномерных) моделей такого рода: кривой доходно-

сти $r_t(\cdot)$ как элементу некоторого функционального пространства приписывается бесконечномерная стохастическая динамика $dr_t = [Dr_t + F_{HJM}(r_t)] dt + B(r_t)dW_t$. К сожалению, в описанном виде подход не был пригоден к практическому применению, так как не учитывал такие важные аспекты, как количество и качество доступной информации и возможность практической реализации на ЭВМ.

В настоящей работе предлагается модель динамики кривой доходности, основанная на подходе [2], учитывающая характер доступной информации: наблюдаются цены отдельных облигаций, что формализуется как наблюдение нелинейного функционала $J(r_t) = \sum_{i=1}^n F_i \exp[r_t(x_i)x_i]$, где x_i — моменты выплат по облигации, а F_i — соответствующие объёмы выплат. Невысокое качество доступной информации (в частности, нерыночные аспекты формирования цены сделки) формализуется предположением о наличии нормально распределённого шума в наблюдениях: предполагается, что наблюдается величина $J(r_t) + \varepsilon_t$, где ε_t — независимые нормально распределённые случайные величины с нулевым средним и стандартным отклонением порядка бид-аск спреда w_t (разницы между ценами покупателя и продавца). Также на качество наблюдения (и, следовательно, на стандартное отклонение ошибки) может влиять как объём сделки (например, неестественно малый объём не вызывает доверия и позволяет увеличить ошибку), так и другие факторы.

«Усваивание» моделью потока информации, доступной во всё поступающих наблюдениях, может быть формализовано в рамках байесовского подхода: условная плотность распределения кривой доходности после наблюдения P_{t_i} по отношению к плотности распределения до наблюдения P_{t_i-0} равна

$$\frac{dP_{t_i}}{dP_{t_i-0}} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} w_{t_i}^{-1} \left(p_{t_i} - \sum_{s=1}^n F_s e^{r_{t_i}(x_s)x_s} \right)^2 \right]. \quad (1)$$

Оценка бесконечномерной сущности по конечномерным наблюдениям требует регуляризации. Регуляризация в представляемой модели следует духу идей Тихонова [4]. Предполагается, что реальные кривые доходности, используемые участниками рынка, достаточно гладкие. Негладкость кривой r может быть формализована в виде произвольного функционала $J_1(r)$. Тогда условная плотность (1) перепишется

в виде

$$\frac{dP_{t_i}}{dP_{t_i-0}} \propto \exp \left[-\frac{1}{2} w_{t_i}^{-1} \left(p_{t_i} - \sum_{s=1}^n F_s e^{r_{t_i}(x_s)x_s} \right)^2 \right] \times \\ \times \exp [-\alpha J_1(r_{t_i})(t_i - t_{i-1})],$$

где α — параметр регуляризации, соответствующий «температуре», средней негладкости кривых, используемых при расчётах на рынке. Выбор его численного значения необходимо проводить таким образом, чтобы ошибки приближения наблюдаемых цен имели порядок неточности этих цен (мы считаем, что неточность цены имеет порядок бид-аск спреда).

Также построены численные алгоритмы оценки неизвестных параметров модели по наблюдаемым и историческим рыночным данным, реализованные в виде трёхуровневого программного комплекса с использованием параллельных вычислений.

В работе построена первая практически применимая модель непараметрической стохастической динамики кривой доходности, дающая экономически разумные формы кривой, имеющая нетривиальную динамику и не допускающая арбитражных возможностей. Кроме того, в предельном случае при отсутствии информации о прошлом модель сводится к одному из известных «методов моментального снимка» [5].

Литература

1. Bjork T., Christensen B.J. Interest Rate Dynamics and Consistent Forward Rate Curves // *Mathematical Finance*. — 1999. — V. 9, N 4. — P. 323–348.
2. Filipovic D. Consistency Problems for Heath-Jarrow-Morton Interest Rate Models // *Lecture notes in mathematics*. — V. 1760. — Berlin: Springer-Verlag, 2001. — 145 p.
3. Heath D., Jarrow R., Morton A. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation // *Econometrica*. — 1992. — V. 16, N. 1. — P. 77–105.
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука. — 1979. — 142 с.
5. Лапшин В.А. О задачах, связанных с определением срочной структуры процентных ставок // *Вестник молодых учёных «Ломоносов»*. Выпуск III. — 2006. — С. 66–71.

УДК 519.86

М.А. Мартынов

mikhailmartinov@gmail.com

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

О построении арбитражной хеджирующей стратегии на рынке с активами, зависящими от одинакового случайного фактора

В данной работе речь пойдет о модели ценообразования финансового инструмента, который может быть интерпретирован как опцион на рынке, подчинённом некоторым дополнительным условиям.

Поскольку опцион представляет собой финансовый актив, цену которого определяет рынок, то его стоимость зависит от времени и цены на базовый актив. Задача определения справедливой цены опциона на финансовый актив была решена Блэком, Шоулсом и Мертоном. В дальнейшем построенная ими модель для определения справедливой цены опциона подвергалась многочисленным модификациям.

Основное предположение, которое делается для получения формулы Блэка–Шоулса, однозначно определяющей цену опциона, — безарбитражность рынка. Напомним, что наличие арбитража эквивалентно существованию возможности с вероятностью 1 получить положительный доход, имея нулевой стартовый капитал.

Отметим также, что при выводе формулы Блэка–Шоулса строится хеджирующая стратегия, то есть такой специальный самофинансируемый портфель $V(T)$, который позволяет покрыть иск X в момент времени T , что означает $V(T) = X$.

Предположим, что на рынке присутствуют, по крайней мере, два актива, стоимости которых являются случайными процессами, зависящими от одного и того же броуновского движения. Утверждение об арбитражности рынка с такими активами не является новым. В книге [1] сформулирован принцип, утверждающий, что рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда число торгуемых активов (за исключением безрискового) не превосходит числа источников случайности. В этой же книге с помощью мартингального подхода показано, что для того чтобы рынок, включающий несколько рискованных акти-

вов, стоимости которых заданы процессами Ито, был безарбитражным, необходимо и достаточно, чтобы на рынке присутствовало, по крайней мере, столько независимых винеровских процессов, сколько имеется рискованных активов.

В настоящей работе мы доказываем арбитражность рынка с присутствующими на нём активами, зависящими от одних и тех же случайных факторов, альтернативным способом и предъявляем явную хеджирующую стратегию, используя математический аппарат, описывающий формирование контрастных структур типа ступеньки в полулинейных параболических уравнениях. Следует отметить, что принципиальное наличие хеджирующей стратегии не всегда означает возможность применить её на практике (вспомним принцип удвоения ставок), поэтому предъявление стратегии, которую легко можно реализовать, представляется весьма ценным.

Далее мы обсуждаем вопрос о возможности реализации найденной нами стратегии на сложившемся в настоящий момент рынке реальных опционов. Реальный опцион — это опцион, но не на финансовый актив, а на любой актив вне фондового или денежного рынков. Приведём его типичный пример: кредит, взятый фирмой для инвестирования в проект, по сути, представляет собой выписанный этой фирмой реальный опцион на покупку. Значит, она фактически имеет возможность в любой момент погасить кредит. При этом если к моменту истечения срока кредита инвестированные средства дадут прибыль выше основного долга фирмы, то произойдёт погашение кредита и фирма получит прибыль. В противном случае фирма предпочтет не выплачивать остаток долга и лишиться залога или подвергнется процедуре банкротства.

Понятно, что это несколько идеализированная модель, поскольку реальные кредиты имеют фиксированный амортизационный план. Как отмечалось выше, в работе будут рассмотрены активы, зависящие от одних и тех же случайных факторов. Приведём пример таких активов в случае с реальным, а не финансовым рынком [2].

Рассмотрим ситуацию из нефтегазовой отрасли: государство выставляет на тендер по проведению геологоразведочных работ (ГРП) некоторый участок недр. Инвестор выдвигает справедливую, на его взгляд, сумму за право пользования недрами этого участка. Задачу определения предельного значения этой суммы можно понимать как проблему вычисления справедливой цены реального опциона в недропользовании, причём опцион будет зависеть от двух показателей: стоимости геологической информации и величины чистого дисконтиро-

ванного дохода, рассчитанного на основании имеющихся на текущий момент времени данных о разведанных запасах. Сроком исполнения считаем длительность ГРП, а под ценой исполнения, как это обычно и бывает, понимается величина затрат на проведение этих работ. Заметим, что стоимость геологической информации и доходность месторождения зависят от одних и тех же факторов. К примеру, от объёма разведанных запасов. Поэтому мы сможем применить к данной ситуации результаты, которые будут получены в нашей работе.

Литература

1. *Tomas Bjork*. Arbitrage Theory in Continuous Time. — oxford university press, 2003.
2. *Ампилов Ю.П., Мартынов М.А.* Конструирование модели опциона для оценки величины стартового платежа за право пользования участком недр // Минеральные ресурсы России. Экономика и управление. — 2009. — № 2. — С. 49–53.

УДК 51.77

Е.Г. Молчанов

molch64@mail.mipt.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Об одной проблеме моментов, возникающей при оценке эластичности замещения производственных факторов на микроуровне

В обобщённой модели Хаутеккера–Иохансена [1] с двумя производственными факторами текущего пользования (ПФТП) и однородным продуктом производство распределено по технологиям, причём технология используется с максимальной интенсивностью, если $p_0 \geq q(p_1 x_1, p_2 x_2)$, иначе не используется вообще. Здесь (x_1, x_2) — технологии, (p_1, p_2) — цены на ПФТП, p_0 — цена на выпускаемую продукцию, а $q(\dots)$ — себестоимость выпуска единицы продукции, полученная преобразованием Юнга из производственной функции. Выпуск

продукции определяется следующей формулой:

$$y = \int_{R_+^2} \theta(p_0 - q(p_1x_1, p_2x_2)),$$

где $\theta(\dots)$ — это функция Хевисайда.

Чтобы понять, какие производственные функции удовлетворяют вышеприведённой модели, если известна статистика выпусков и цен $(y^t, p^t, p_0^t), t = 1 \dots T$ в несколько периодов времени, необходимо разрешить следующую проблему моментов:

$$\exists? \mu(\dots) \geq 0; \mu(R_+^2) < \infty : y = \int_{R_+^2} \theta(p_0 - q(p_1x_1, p_2x_2))\mu(dx).$$

Разрешимость этой проблемы моментов зависит только от структуры разрезания R_+^2 линиями $p_0 - q(p_1x_1, p_2x_2) = 0$ на области.

Будем рассматривать производственные функции с постоянной эластичностью замещения (CES-функции). Чтобы определить, при каких эластичностях замещения проблема моментов разрешима, достаточно конечное число раз проверить её разрешимость для линейных функций себестоимости [2].

Каждую область закодируем T -значным числом, где каждый знак этого числа будет равен единице, если соответствующая прямая лежит выше данной области, и нулю, иначе (рис. 1). Через $B = B\left(\frac{p_1^1}{p_0^1}, \dots, \frac{p_1^T}{p_0^T}\right)$ обозначим множество кодов областей разрезания. Тогда проблема моментов разрешима тогда и только тогда, когда $y \in \text{cone}\left(B\left(\frac{p_1^1}{p_0^1}, \dots, \frac{p_1^T}{p_0^T}\right)\right)$ [2].

Чтобы решить задачу принадлежности вектора некоему выпуклому конусу $\text{cone}(B)$, необходимо найти фасеты этого конуса. Для ускорения исследования предлагается найти множество всех возможных фасет $\text{cone}(B)$ при заданном количестве прямых разрезания.

Для того чтобы некое множество T -мерного булевского куба являлось множеством кодов разрезаний, необходимо, чтобы оно задавалось при помощи последовательности перестановок чисел $(1, 2, \dots, T)$ (рис. 2).

С помощью всех возможных последовательностей перестановок было найдено множество возможных фасет $\text{cone}(B)$ при $T < 10$.

Работа поддержана ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (мероприятие 1.2.1,

НК-15 П), грантом РФФИ 08-07-00158-а и выполнена по программе государственной поддержки ведущих научных школ (код проекта НШ — 2982.2008.1).

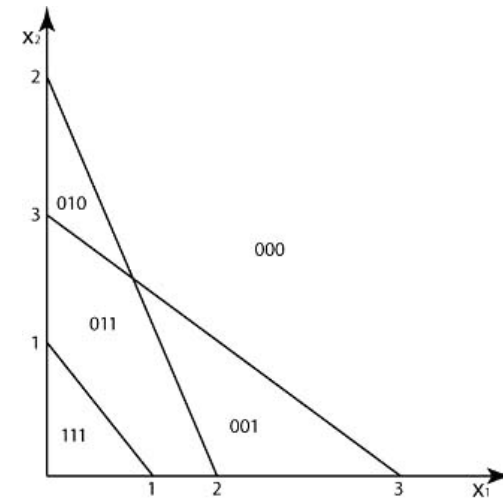


Рис. 1. Коды областей разрезания

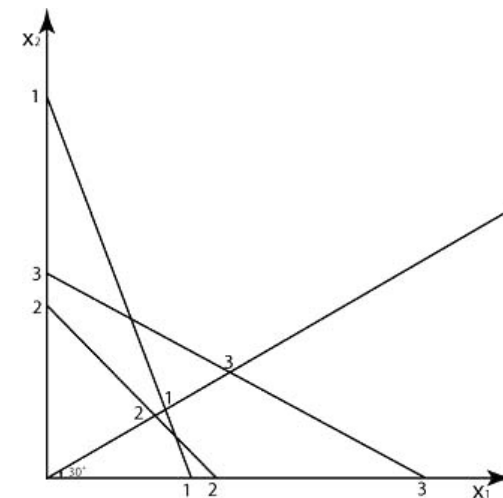


Рис. 2. Последовательность перестановок $(1,2,3) \rightarrow (2,1,3) \rightarrow (2,3,1)$ задает структуру разрезания

Литература

1. Шананин А.А. Обобщенная модель чистой отрасли производства // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, N. 9. — С. 117–127.
2. Шананин А.А. Непараметрический метод анализа технологической структуры производства // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11, N. 9. — С. 116–122.

УДК 519.86

*Н.К. Обросова*¹, *А.А. Шананин*²
 nobrosova@ya.ru, shan@mail.mipt.ru

¹ Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

² Московский физико-технический институт
 (государственный университет)

Влияние торговой инфраструктуры на функционирование депрессивных отраслей

Одной из актуальных проблем российской экономики является проблема модернизации производства в обрабатывающем секторе. В силу сложившихся за длительный период особенностей отечественной производственной системы продукция этого сектора оказалась низко конкурентоспособной по отношению к более качественным импортным аналогам. В результате производители сектора испытывают задержки в реализации продукции, а сами реализации нестабильны во времени. Это приводит к дефициту оборотных средств и необходимости авансирования производственных затрат.

Государственные программы по технологическому переоснащению депрессивного сектора экономики требуют подробного анализа с учётом косвенных последствий их реализации. Адекватным инструментом для такого анализа являются математические модели, позволяющие описывать экономические механизмы производства и обращения с учётом существенных обратных связей. Такие модели могут

быть созданы на базе системного подхода к анализу экономических явлений, который уже более 30 лет развивается и применяется научной школой академика РАН А.А. Петрова [1].

Для анализа положения в обрабатывающем секторе на базе системного подхода была разработана модель производства с учётом дефицита оборотных средств и нестабильности канала реализации продукции [2]. В основу модели положена схема Хаутеккера–Иохансена функционирования производства. Предполагается, что реализация продукции происходит в случайные моменты времени, а пополнение оборотных средств возможно за счёт двух типов кредитов — долгосрочного и краткосрочного. Исследование модели показало, что дефицит кредитных ресурсов (высокий процент по краткосрочным кредитам) является причиной неэффективного распределения ресурсов в производственной системе. Кроме того, неэффективное распределение ресурсов наблюдается только в случае, когда краткосрочный кредит дороже долгосрочного. Модель производства с учётом дефицита оборотных средств впервые позволила описать неэффективность функционирования обрабатывающего сектора в условиях низкой конкурентоспособности продукции.

В современных условиях разработанная модель производства требует корректировки, так как не предполагает ограничения на объём реализуемой партии товара. Созданная ранее версия модели описывала период неустойчивых торговых отношений в российской экономике в девяностые годы XX века, когда производство в основном работало под заказ, и весь объём реализовывался. Современные условия производства в обрабатывающем секторе характеризуются более устойчивыми связями с торговлей, что позволяет производить и накапливать некоторое количество товара на складе в надежде, что наступит реализация. Однако развивающаяся торговая инфраструктура имеет ограничения по мощности, связанные, например, с ограниченной ёмкостью торговых складов. В результате возникает ограничение на максимальный размер приобретаемой у производителя партии товара, которое отсутствует в модели. Мы предлагаем учитывать эту связь, введя в модель ограничение на максимальный объём реализуемой партии товара, которое предлагается рассматривать как характеристику состояния торговой инфраструктуры. Кроме того, в нынешних условиях оборотные средства пополняются в основном за счёт краткосрочного кредита. Таким образом, была разработана модификация модели, учитывающая влияние торговой инфраструктуры.

В терминах модели поставлена и решена задача выбора собственником производства оптимального периода пользования кредитом с целью максимизации его дисконтированного дохода на неограниченном горизонте. Проанализирована средняя (по времени) загрузка производства в зависимости от соотношения оптимального запаса на складе и максимального объема реализации. Величина данного соотношения определяет уровень, на котором находится производственная единица. Показано, что переключение между уровнями сопровождается скачком значения средней загрузки. Таким образом, в модели наблюдается «квантовый эффект» — средняя загрузка производства меняется скачком при непрерывном изменении параметров модели (торговой инфраструктуры). В терминах модели (на основе полученного «квантового эффекта») предлагается подход к объяснению возникновения кризисов перепроизводства 19–20 вв., связанных с неразвитостью торговых отношений, когда при стабильной внешней ситуации возникало несоответствие спроса и предложения на рынке, обусловленное затовариванием производственных складов.

Работа поддержана грантами РФФИ (08-07-00158, 09-01-13534 офи-ц), РГНФ N 08-02-00347, программой поддержки ведущих научных школ НШ 2982.2008.01, ПФИ ОМН РАН N3, ПФИ президиума РАН N2, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект П949).

Литература

1. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. — М.: Энергоатомиздат, 1996.
2. Акпарова А.В., Шананин А.А. Модель производства в условиях несовершенной кредитной системы и нестабильной реализации продукции // Математическое моделирование. — 2005. — Т. 17, N 9. — С. 60–76.

УДК 519.86

Н.П. Пильник¹, И.Г. Поспелов²

u4d@yandex.ru, pospeli@ccas.ru

¹ Государственный университет Высшая школа экономики

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Описания взаимодействия реального и монетарного секторов экономики в динамической модели общего равновесия

В настоящем докладе предпринята попытка совместить в рамках единой детерминированной динамической модели общего равновесия взаимодействие реального и монетарного сектора экономики. Для моделирования реального сектора экономики используется специальное описание производственной сферы из [1]. Производящая единственная в рамках модели продукт фирма представляет собой акционерное общество, все акции которого принадлежат собственнику, который одновременно является единственным потребителем продукта в экономике. Кроме того, в процессе задания целевого функционала в задаче фирмы решается вопрос о целях деятельности фирмы.

В модели в терминах балансовых уравнений описано функционирование Центрального Банка, который проводит собственную кредитно-денежную политику. Основными инструментами воздействия на экономику для Центрального Банка служит уровень денежной массы, а также процентные ставки и объемы выдаваемых банковской системе кредитов и принимаемых от неё на свои счета депозитов.

В докладе рассматривается замкнутая рыночная экономика без участия государства, в которой производится единственный однородный продукт. Производственная функция считается линейной, а капитальные затраты — обратимыми. Функционирование экономики описывается в непрерывном времени на конечном временном отрезке $[0, T]$.

В экономике действуют четыре макроагента: фирма-производитель, банк, собственник-потребитель. Четвертым агентом является Центральный Банк, проводящий собственную кредитно-денежную политику.

Модель строится на основе принципа рациональных ожиданий, то есть предполагается, что все агенты знают точный прогноз на все будущее время $t \in [t_0, T]$ всех нужных им показателей экономической конъюнктуры. Поведение фирмы-производителя, банка и собственника-потребителя описывается решением неавтономной задачи оптимального управления. Для описания поведения Центрального Банка используются заданные сценарии изменения его управляемых переменных. Показатели конъюнктуры затем определяются так, чтобы оптимальные решения агентов удовлетворяли материальным и финансовым балансам, которые должны выполняться в целом по экономике.

В модели собственник-потребитель располагает неотрицательными запасами денег, акций фирмы и акций банка. Собственник определяет количество выпущенных акций, одновременно беря на себя обязательство скупать вновь выпущенные акции по складывающемуся на рынке курсу. Собственник может брать в банке ссуды и держать в банке депозиты под некоторые проценты. На полученные от процентов и дивидендов доходы собственник приобретает на товарном рынке потребительский продукт, а на фондовом рынке новые акции фирмы и банка. Предполагается, что собственник ведёт себя рационально. Он стремится максимизировать полезность своего будущего реального потребления.

Фирма располагает неотрицательным запасом денег и имеет обязательства перед собственниками (акции), по которым она выплачивает дивиденды. Поскольку объём выпуска акций определяет собственник, при решении задачи фирмы эта величина считается заданной. Средства на инвестиции и выплату дивидендов приносит продажа произведённого продукта, а также выпущенных акций. Кроме того, фирма может брать у банка кредиты и вкладывать депозиты под проценты. Целью деятельности фирмы является максимизация приведённой полезности выплаченных дивидендов, измеренных в базовых ценах.

Аналогичный функционал ставится и в задаче банка, взаимоотношения которого со своим собственником построены по той же схеме, что и у фирмы. Банк обладает запасом выданных собственнику и фирме кредитов, по которым получает проценты, и запасом привлеченных депозитов собственника и фирмы, по которым выплачивает проценты. Кроме того, банк занимает у Центрального Банка или вкладывает деньги на счета в Центральном Банке. В задаче банка ставится ограничение на суммарный уровень выданных кредитов

собственнику, фирме и Центральному Банку в зависимости от привлекаемых депозитов этих агентов (резервное требование).

В задаче каждого агента, кроме Центрального Банка, ставится терминальное ограничение, требующее, чтобы значение собственного капитала агента в конечный момент времени не менее чем в γ раз превосходило его начальное значение. Величина γ у агентов может не совпадать. Однако поскольку само понятие собственного капитала при выводе требует учёта траекторий двойственных переменных, то формально ограничение, как и в [2], ставится на величину некоторой линейной комбинации фазовых переменных задачи агента.

В зависимости от разрешения возникающих в задачах агентов условий дополняющей нежёсткости в равновесии может реализовываться один из восьми случаев. Данная множественность возникает при выборе направлений потоков кредитования между банком и потребителем, банком и фирмой, банком и Центральным Банком. В каждом из указанных случаев найдено полное решение модели в зависимости от заданных начальных условий.

В равновесии однозначно определяется курс, количество выпущенных акций и объём выплачиваемых в единицу времени дивидендов фирмы и банка. Кроме того, однозначно определяется траектория потребления и выпуска.

Аналогично [1] проверяется эффективность полученных равновесий. Показано, что эффективны те равновесия, в которых совпадают направления кредитования между банком и потребителем и банком и фирмой. Кроме того, описано влияние политики Центрального Банка на эффективность реализовавшегося равновесия.

Литература

1. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. Описание целей деятельности фирмы в динамической модели общего равновесия. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 74 с.
2. Пильник Н.П., Поспелов И.Г. О естественных терминальных условиях в моделях межвременного равновесия // Экономический журнал ВШЭ. — 2007. — Т. 11, № 1. — С. 1–33.

УДК 519.865.3

*А.В. Рудева*¹, *А.А. Шананин*²
 rudeva_asya@mail.ru, alexshan@yandex.ru

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

² Московский физико-технический институт
 (государственный университет)

Моделирование сберегательного поведения с учётом ограничения ликвидности

В работе рассматривается модифицированная модель Рамсея с учётом ограничения ликвидности. Такая постановка задачи рассматривалась в [1], однако не было получено решение в форме синтеза. В работе построено оптимальное управление в форме синтеза для рассматриваемой задачи.

Рассмотрим репрезентативное домашнее хозяйство, доходы которого в момент времени t состоят из заработной платы $S(t)$ и процентов по депозитам $D(t)$ по ставке r_D . Благополучие $X(t)$ складывается из наличных средств $M^H(t)$ и средств на депозитах, а изменение благополучия определяется выражением $X'(t) = r_D D(t) + S(t) - C(t)$. Для осуществления расходов в каждый момент времени необходим запас денежных средств: $M^H(t) \geq \theta C(t)$, где θ — коэффициент ликвидности. Функция полезности домашнего хозяйства $U(C(t)) = C(t)^\alpha$, где $\alpha \in [0, 1]$ — коэффициент, характеризующий склонность к риску [2]. Пусть домашнее хозяйство прогнозирует экспоненциальный рост заработной платы с темпом γ . Обозначим коэффициент дисконтирования $\Delta \geq 0$, тогда распределение средств описывается решением задачи

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} U(C(t))e^{-\Delta t} dt \rightarrow \max, \\ X'(t) = r_D D(t) + S(t) - C(t), \\ X(t) = M^H(t) + D(t), \\ M^H(t) = \theta C(t), \\ C(t) \geq 0, D(t) \geq 0, \\ X(0) = D_0 + M_0^H. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных: $X(t) = x(t)e^{\gamma t}$, $C(t) = c(t)e^{\gamma t}$ и $u(t)x(t) = \theta c(t)$.

Тогда

$$\begin{cases} \int_0^{+\infty} (u(t)x(t))^\alpha e^{-(\Delta-\alpha\gamma)t} dt \rightarrow \max, \\ x' = (r_D - \gamma)x + S - (1 + r_D\theta)ux\theta^{-1}, \\ 0 \leq u \leq 1, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где управление $u(t)$ — доля средств, выделяемых на текущее потребление.

Введём обозначения

$$\hat{x} = \frac{S\theta(\Delta - \alpha r_D)}{(r_D - \gamma)(r_D\theta - \Delta\theta + 1 - \alpha)}, \quad (2)$$

x_1 — решение уравнения

$$\frac{1 + r_D\theta}{1 + \gamma\theta} \int_0^1 (px_1 + (1-p))^\alpha p^{\frac{\theta(\Delta-\alpha\gamma)}{1+\gamma\theta}} dp = x_1^{\alpha-1}, \quad (3)$$

τ — решение уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{x}{S} = \frac{-1}{r_D - \gamma} + \left[\frac{x_1}{S} + \frac{1}{r_D - \gamma} - \frac{(1 + r_D\theta)(\alpha - 1)x_1}{\theta(r_D\alpha - \Delta)S} \right] e^{-(r_D - \gamma)\tau} + \\ + \frac{(1 + r_D\theta)(\alpha - 1)x_1}{\theta(r_D\alpha - \Delta)S} e^{-\frac{(\Delta - r_D + (1 - \alpha)\gamma)\tau}{(\alpha - 1)}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теорема. Пусть $\Delta > \alpha \max(r_D, \gamma)$, тогда задача (1) имеет решение в форме синтеза, а именно

- 1) если $\frac{r_D \leq \Delta - 1 - \alpha}{\theta}$, тогда оптимальное управление $u^*(x) \equiv 1$;
- 2) если $\frac{\Delta - 1 - \alpha}{\theta < r_D \leq \Delta + (1 - \alpha)\gamma}$, тогда оптимальное управление

$$u^*(x) = \begin{cases} x_1 x^{-1} e^{-\left(\frac{\Delta - r_D}{\alpha - 1} + \gamma\right)\tau}, & x > x_1, \\ 1, & x \leq x_1; \end{cases}$$

где x_1 — решение уравнения (3), а τ — решение уравнения (4);

- 3) если $r_D > \Delta + (1 - \alpha)\gamma$, тогда оптимальное управление

$$u^*(x) = \begin{cases} 1, & x < \hat{x}, \\ \left(1 + \frac{S}{x(r_D - \gamma)}\right) \frac{\theta(\Delta - \alpha r_D)}{(1 - \alpha)(1 + r_D\theta)}, & x \geq \hat{x}; \end{cases}$$

где \hat{x} определяется (2).

Полученные результаты допускают содержательную интерпретацию. Соотношение коэффициента дисконтирования и параметров экономической конъюнктуры позволяет разбить население на три слоя. Первый «бедный» слой ничего не сберегает. Сбережения третьего «богатого» слоя неограниченно растут, а в пределе текущее потребление пренебрежимо мало по сравнению со сберегаемыми средствами. Домашние хозяйства второго «среднего» слоя ищут компромисс между текущим потреблением и сбережением. В период роста российские коммерческие банки устанавливают высокую процентную ставку по депозитам. Пусть $r_D(t) = \Delta(t) + (1 - \alpha)\gamma(t)$, коэффициент ликвидности $\theta = K(t) \left(\sqrt{r_D(t)} \right)^{-1}$ по модели Баумоля–Тобина [3], где $K(t)$ — сезонный параметр, идентифицированный по данным 2007 года. Результаты сопоставления расчётов с данными Росстата о распределении средств населения с 01.2003 по 07.2009 приведены на рис. 1 (пунктирная линия — факт, сплошная — расчёты).

Работа поддержана грантами РФФИ (08-07-00158, 09-01-13534 офи-ц), РГНФ N 08-02-00347, программой поддержки ведущих научных школ НШ 2982.2008.01, ПФИ ОМН РАН N3, ПФИ президиума РАН N2, ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект П949).



Рис. 1. Результаты расчётов по модели

Литература

1. Гурьев С.М. Модель формирования сбережений и спрос на деньги // Математическое моделирование. — 1994. — Т. VI, № 7. — С. 41–54.
2. Laffont. J. J. The Economics of Uncertainty and Information // The Massachusetts Institute of Technology Press Cambridge, London, England. — 1989. — С. 22.
3. Мэнкью Г. Макроэкономика. — М.: Изд-во МГУ, 1994. — 735 с.

УДК 338.27

М.В. Тимченко^{1,2}, В.В. Клочков²

masha.nizhnik@gmail.com, vlad_klochkov@mail.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Методы прогнозирования спроса на услуги новых видов скоростного пассажирского транспорта

В данной работе проводится прогнозирование экономической эффективности создания новых видов скоростного пассажирского транспорта. Модель, используемая в данной работе, является упрощённой, поскольку для предварительного анализа экономической эффективности нового вида транспортных средств (далее НВТС), проводимого на ранних стадиях жизненного цикла, вполне достаточно оценить лишь порядок величины спроса на услуги гипотетического нового вида скоростного транспорта.

В первой части работы строится упрощённая модель спроса пассажиров на дальние перевозки. Предполагается, что потребитель готов потратить на дальние поездки определённую долю дохода сверх прожиточного минимума; совершается лишь одна поездка в год (например, поездка в отпуск), для которой выбирается оптимальный вид транспорта. Два противоречивых критерия — стоимость и длительность поездки — сводятся к одному путём введением понятия «стоимость времени пассажира». Оптимальным считается тот вид транспорта, который позволяет данному пассажиру достичь максимальной дальности поездки с учётом как прямых денежных затрат, так и потерь времени в пути.

Временные и стоимостные характеристики поездки, влияющие на принятие пассажиром решения, определяются крейсерской скоростью транспортного средства (то есть скоростью движения в наиболее экономичном режиме) и средним километровым тарифом. Также учитывается увеличение длительности пути, обусловленное существованием начально-конечных операций и необходимостью использова-

ния подвозящего транспорта, доставляющего пассажира в аэропорт или на вокзал.

В предложенной выше модели оптимальный для данного индивида вид транспорта и максимальная дальность поездок определяются уровнем среднемесячного дохода индивида. Поэтому для анализа совокупного спроса на услуги тех или иных видов транспорта оправдано использование структурных моделей, которые учитывают неоднородность распределения доходов в обществе. Население упорядочивается по возрастанию дохода и делится на 10 равных по численности групп, каждая из которых включает в себя 10% населения — децилей. Строятся зависимости максимальной дальности поездки на самолёте и на поезде от величины среднедушевого дохода. Из сопоставления графиков делаются выводы о том, какие группы населения будут совершать поездки на тех или иных видах транспорта и на какие расстояния. Путём суммирования результатов для отдельных доходных групп рассчитываются суммарные показатели объёма перевозок и пассажирооборота. Вначале для тестирования модели оценивается лишь спрос на услуги существующих транспортных средств, — таких, как магистральные самолёты и поезда дальнего следования. Модельные оценки обнаруживают удовлетворительное согласие со статистическими данными.

В рамках данной работы наибольший интерес представляет связь между структурой спроса на услуги различных видов транспорта и распределением доходов в обществе. В нынешней социально-экономической ситуации при наличии значительной дифференциации доходов населения и низкого уровня доходов большинства домохозяйств услуги воздушного транспорта доступны лишь нескольким процентам россиян, а наиболее массовым видом транспорта в дальнем пассажирском сообщении остаётся железнодорожный — относительно дешёвый и тихходный. По результатам проведённого анализа доступности транспорта для различных групп населения можно сделать вывод о необходимости увеличения ёмкости рынка скоростных транспортных перевозок в России.

Помимо существующих видов дальнего пассажирского транспорта, в описанную модель был включён гипотетический новый вид транспортных средств (НВТС), занимающий промежуточное положение между поездами и самолётами как по скорости, так и по себестоимости перевозок. В рамках предлагаемого подхода к прогнозированию поведения потенциальных пассажиров принимается следующая гипотеза. Появление нового вида скоростного транспорта повлияет на

выбор индивида только в том случае, если этот вид транспорта открывает перед ним возможность увеличения дальности поездок. При этом учитывается ограничение на максимальную длительность поездки, определяемое физиологическими возможностями пассажиров и требованиями к комфорту. Вывод о том, на какие группы населения повлияет возникновение альтернативного вида транспорта, получается путём сравнения графиков зависимости максимальной дальности поездки от уровня дохода индивидуума (на которых помимо самолёта и поезда теперь присутствует кривая, соответствующая НВТС). Также оценивается пассажирооборот и объём перевозок нового вида транспорта. Качественный анализ результатов прогнозирования наглядно демонстрирует возможности увеличения суммарного пассажирооборота скоростных видов транспорта и, как следствие, значительного увеличения ёмкости рынков скоростных перевозок и скоростных транспортных средств.

Далее необходим более подробный инженерно-экономический анализ реализуемости того или иного набора параметров НВТС — крейсерской скорости и километрового тарифа — в рамках различных концепций. В пространстве этих параметров определяется область значений, достижимых на практике при данном уровне развития технологий. Далее в этой области возможен поиск оптимальной точки, доставляющей максимум выбранной целевой функции. Описанный здесь подход позволяет решать разнообразные задачи оптимизации проектных параметров перспективных видов транспорта. Однако в условиях, когда отечественной авиационной промышленности необходимо найти новые рыночные ниши, важнейшим показателем является, по нашему мнению, именно их ёмкость, определяемая прежде всего пассажирооборотом нового вида транспорта.

Литература

1. Клочков В.В., Ниженник М.В., Русанова А.Л. Прогнозирование экономической эффективности создания новых видов скоростного пассажирского транспорта // Проблемы прогнозирования. — 2009. — № 3. — С. 58–76.

С.В. Чуканов

chukanov47@mail.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Нестационарная модель мировой экономической динамики

Понимание явлений экономической динамики в настоящее время невозможно без учёта глобальных взаимозависимостей в мировой экономике. Настоящая работа является прямым продолжением модельных исследований нестационарной экономической динамики [1],¹ в том числе и на базе динамических аналогов равновесных конструкций [2]. В настоящей работе представлена модель мировой экономической динамики, разработанной в духе равновесия Вальраса [3]. Мировая экономика описывается системой взаимодействующих национальных экономик. Производственная деятельность на уровне государств представлена традиционными производственными функциями, зависящими от наличия производственных фондов x_k , привлекаемых природных ρ_k трудовых ресурсов l_k , инфраструктурных расходов со стороны государства g_k технологической обеспеченности θ_k . Технологическая поддержка производства в виде консалтинга, технической документации предоставляется со стороны сферы услуг. Услуги производятся только за счёт привлечения человеческого труда и могут торговаться на мировом рынке. (Это простейшая попытка на модельном макроэкономическом уровне учесть сферу услуг, не требующих или почти не требующих оборудования и ресурсов, но играющую важную роль в современной экономике.) На уровне национальных экономик присутствуют строительные фирмы (отрасли) по созданию производственных и отдельно непроизводственных фондов (недвижимости или товаров длительного пользования). Динамика фондов описы-

¹Нестационарные модели с трудом поддаются теоретическим и аналитическим методам исследования. Приходится в полной мере опираться на возможности вычислительной техники и численные эксперименты. Предлагаемые модели разной прикладной ориентации и детализации реализуются (в среде Maple) и исследуются без привязки к экономической конкретике. Внимание акцентируется на методологических, содержательно-экономических, вычислительных аспектах моделей, на возможностях их использования в исследовательских и образовательных целях, в предпроектном анализе прикладных задач.

вается традиционно с учётом их выбытия. Целевая установка в рамках национальной экономики определяется критерием общественного благосостояния населения, описываемым интегралом дисконтированной функции полезности. Функция полезности стандартным образом зависит от удельного потока текущего потребления c_k , трудовой нагрузки L_k , от объёма непроизводственных фондов n_k и инфраструктуры g_k .

В соответствии с идеологией равновесия Вальраса существуют равновесные цены (функции от времени) на конечную продукцию pV , ресурсы pR , услуги $pThet$, на труд s_k , на производственные qX_k и непроизводственные qn_k фонды, такие, что при рациональном поведении всех экономических агентов достигается рыночное равновесие. То есть на всех рынках достигается равенство спроса и предложения при условии, что производители стремятся к максимизации текущей прибыли, а население каждого из государств оптимизирует интегральный критерий собственного благосостояния в рамках (интегрального) финансового ограничения. Смысл последнего ограничения состоит в том, что приведённые будущие расходы на текущее потребление и приобретение товаров длительного пользования (недвижимости) не должны превосходить суммы текущих сбережений w_k и будущих доходов от трудовой деятельности. (Текущие сбережения населения на уровне государств и тем более на индивидуальном уровне могут оказаться отрицательными за счёт ипотечных и прочих заимствований.) Основным финансовым балансом в модели является равенство (в каждый момент времени) суммарной (по всему миру) стоимости всех производственных, добывающих и строительных фирм (отраслей) сумме всех сбережений населения. Согласно классическим представлениям цена фирмы (отрасли) складывается из текущей стоимости материальных активов, финансируемых за счёт (обеспеченных) банковских кредитов, и приведённой суммы будущих прибылей, оформленной в виде акционерного капитала. Тем самым получается трактовка, вполне согласующаяся с концепцией глобализации — национальные банки не обязаны ограничиваться кредитованием «своей» промышленности, а население любого государства имеет право аккумулировать сбережения в иностранных банках и акциях иностранных фирм. Как и следовало ожидать, для детерминированной модели эффективность вложений в банковский и акционерный капитал оказывается одинаковой.

На рис. 1 приведено графическое представление одного из расчётов (одного из вариантов) модели. Выделены три страны — с бога-

тым населением, с многочисленным бедным населением и страна с населением среднего достатка, богатая ресурсами. В качестве дополнительного макроэкономического субъекта выделена группа олигархов, проживающих в третьей из стран². Присутствует и строительная отрасль элитного жилья для олигархов. В качестве услуг (охраны, садовников, домработниц) олигархи могут эксплуатировать труд своих соплеменников. На трёх графиках в левом верхнем углу изображены экзогенные возмущения (события): кратковременный спад производительности в первой из стран, мобилизация потребительской активности в той же стране и кратковременный провал в численности N_4 олигархов (концентрация капитала). F_k — коэффициент при производственной функции, mU_k — при функции полезности. A и K — объёмы акционерного капитала и кредитных займов соответственно с индексами ff , ux и un — для основных производств и строительных фирм производственного и непромышленного назначения. Яркими тонкими линиями изображается динамика, а бледными — квазистационарные прогнозы, отвечающие стационарному состоянию (магистрала) модели при текущих значениях экзогенных параметров. Видно, что модель демонстрирует единство мировой экономики. События, происходящие в одной стране, имеют отклики в остальных. Причём реакции могут быть как солидарными (однаправленными), так и компенсаторными (разнонаправленными).

Несколько слов о вычислительной сложности модели. После исключения зависимых переменных в модели остаётся семь фазовых и семнадцать управляющих переменных. То есть приведённый расчёт динамики на сорок шагов по времени эквивалентен решению задачи нелинейного программирования примерно с тысячей переменных. Досчитывается динамика более полутора сотен переменных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00703), РГНФ (проект №07-02-00228) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ — 2982.2008.1).

²Введением класса олигархов хотелось без сильного усложнения модели продемонстрировать возможность учёта неоднородности населения, стратифицированного по тем или иным социально-экономическим признакам.

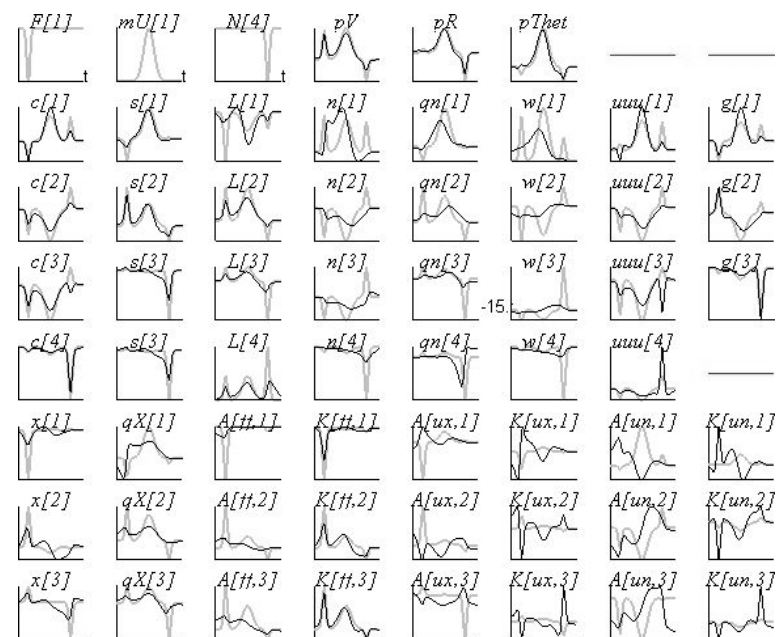


Рис. 1

Литература

1. Чуканов С.В. Переходные процессы в экономике и нестационарные модели экономической динамики. — М.: ВЦ РАН, 2006. — 46 с.
2. Чуканов С.В. Нестационарные процессы оптимальной экономической динамики // Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2008. — Т. 1. — С. 34–37.
3. Ашманов С.А. Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984. — 293 с.

С.В. Чуканов

chukanov47@mail.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

О динамической сложности оптимальной экономической динамики

Экономические модели, основанные на неоклассической парадигме рационального поведения участников (субъектов и агентов) экономической системы, являются весьма популярными и часто используются в теоретических и прикладных исследованиях. Динамические модели такого типа сводятся к достаточно сложному классу задач оптимального управления со смешанными ограничениями. Однако эта сложность уже достаточно осмыслена и привычна. В гораздо меньшей степени осознана проблематика динамической сложности решений этих задач. Исторически на первом этапе модели оптимальной экономической динамики радовали своими «хорошими» асимптотическими (магистральными) свойствами [1], вселяя надежды на «плановое и пропорциональное» развитие экономики. Позднее выяснилось, что «хорошими» асимптотики бывают лишь в ограниченной области значений параметров. Вне области устойчивости в качестве аттрактора оптимальных траекторий может получить автомодельные колебания [2] или даже хаотическую динамику [3]. Эти результаты носили чисто теоретический характер. Вопрос о том, какое отношение динамические свойства абстрактных моделей имеют к реальной экономике, представляется достаточно туманным. Однако вопрос о свойствах, используемых в приложениях моделей, является вполне осмысленным.

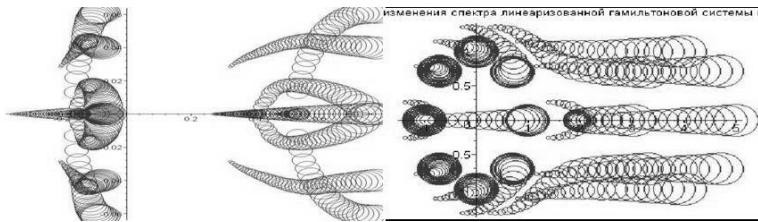


Рис. 1. Изменения спектра матрицы Якоби гамильтоновой системы

Проблема определения границы области устойчивости решается относительно просто. Она определяется моментом первой бифуркации стационарного решения и характеризуется переходом через мнимую ось одного или пары собственных значений матрицы Якоби гамильтоновой системы уравнений линеаризованной в окрестности стационара. На этом построена методика, используемая для анализа содержательных моделей³. На рис. 1 приведены изменения спектров указанных матриц двух содержательных моделей экономической динамики. (Пузыри увеличиваются по мере роста параметра дисконтирования.)

Если определение момента и характера первой бифуркации укладывается в рамки стандартной теории, то анализ высших бифуркаций весьма проблематичен как в теоретическом, так и в вычислительном плане. Естественный способ сведения обсуждаемых моделей к динамическим системам оптимального синтеза упирается в наше неумение решать уравнение Беллмана. В качестве паллиативного подхода удаётся построить богатый класс параметризованных семейств моделей, допускающих аналитическое сведение к задачам с функцией Беллмана простого вида. Получающиеся при этом уравнения оптимального синтеза оказываются родственными системам связанных осцилляторов Ван дер Поля. Параметр дисконтирования соответствует интенсивности подкачки энергии. При отсутствии перекрёстных связей по мере роста дисконтирования осцилляторы «оживают», демонстрируя рождение устойчивых инвариантных торов⁴. Более сложные метаморфозы деформации и разрушения инвариантных торов по мере усиления перекрёстных связей приходится исследовать численно. Этот подход обсуждался ранее [5]. Позднее был проведён большой объём численных исследований в этом направлении. Исследовались возмущения четырёхмерных инвариантных торов в девятимерном

³В прикладном плане важно понимать, что уже по мере приближения к границе устойчивости не только усложняется динамика переходных процессов спровоцированных экзогенными возмущениями, но и резко увеличиваются вычислительные трудности.

⁴Помимо серии бифуркаций Хопфа в моделях возможны более простые бифуркации типа вилки и их комбинации. Здесь внимание концентрируется на сценарии Рюэлля–Тakens–Ньюхауса в чистом виде. В содержательном плане бифуркация типа вилки также представляет определённый интерес. Пара рождающихся устойчивых равновесий имеет свои области притяжения. Соответственно, в зависимости от начального состояния экономика может пойти по разным путям развития. (Экономисты часто задаются вопросом: почему «развивающиеся» страны не могут догнать «развитые», ведь классическая магистральная теория предсказывает всем единообразный путь развития?)

пространстве. На рис. 2 приведена сводка иллюстраций к анализу динамики системы оптимального синтеза при одном из шестидесяти рассчитывавшихся значений параметра перекрёстных связей. В левом столбце изображена траектория системы в разных проекциях и представлениях, в среднем — инвариантные меры в тех же проекциях. На верхнем графике в правом столбце — инвариантная мера в сечении Пуанкаре, под ним картинка, иллюстрирующая «разбегание» траекторий из близких начальных точек, ниже — спектральные плотности для пары переменных. Судя по результатам исследований, по мере усиления перекрёстных связей аттрактор системы проходит различные фазы странного, хаотического и нехаотического характера.

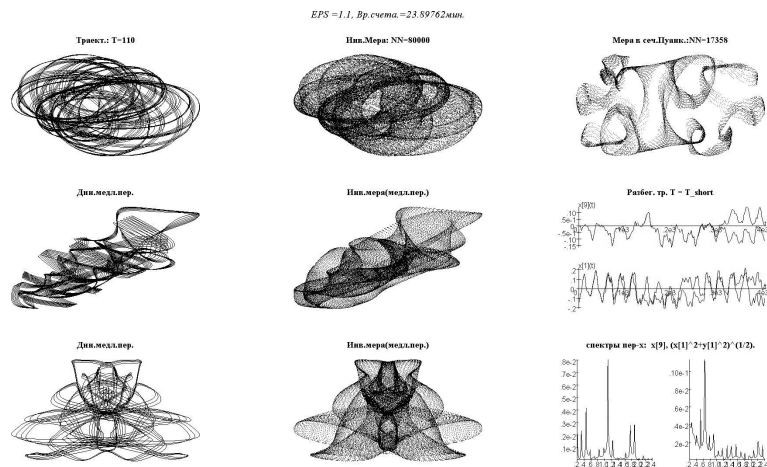


Рис. 2. Исследование динамики в задаче оптимального синтеза

Наиболее трудоемкими оказались расчёты (корреляционной) размерности аттрактора системы при разных значениях параметра связи, результаты которых приведены на рис. 3. Расчёт занял около ста шестидесяти часов машинного времени на двухядерном компьютере с частотой 2.16GHz и 4Gb оперативной памяти. В правую часть рисунка вынесен небольшой отрезок общего графика, на котором достигается максимальная синхронизация колебаний (вплоть до одномерных). При каждом значении параметра размерность рассчитывалась дважды при встроенном в процедуру расчёта случайном механизме, исключающем повторение. На графике можно видеть хорошее совпадение повторных расчётов. Полученная точность позволяет с большой долей уверенности утверждать, что график проходит в том

числе и через нецелочисленные значения. Косвенным подтверждением правильности подсчета размерности является и то, что целочисленным значениям отвечают «контрастные» картинки инвариантных мер, как на рис. 2. В основной массе расчётов траектории кажутся более запутанными, а инвариантные меры — размытыми и «расфокусированными».

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00703), РГНФ (проект №07-02-00228) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (проект № НШ — 2982.2008.1).

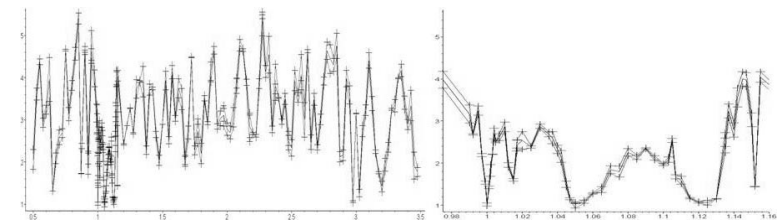


Рис. 3. Изменения размерности аттрактора по мере увеличения параметра

Литература

1. McKenzie L.W. Optimal Economic Growth and Turnpike Theorems // Handbooks of Mathematical Economics. Eds. K.J.Arrow, M.D.Intriligator. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1986. — V. 3. — P. 1282–1355.
2. Benhabib, J. and K.Nishimura. The Hopf Bifurcation and the Existence and Stability of Closed Orbits in Multisector Models of Optimal Economic Growth // Journal of Economic Theory. — 1979. — V. 21. — P. 421–444.
3. Boldrin, M. and L.Montrucchio. On the indeterminacy of capital accumulation paths // Journal of Economic Theory. — 1986. — V. 40. — P. 26–39.
4. Чуканов С.В. Нестационарные процессы оптимальной экономической динамики (эндогенная нестационарность: магистрали, бифуркации, хаос) // Труды 51-й научной конференции МФТИ. «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2008. — Т. 1. — С. 38–41.

Секция экспериментальной экономики

УДК 519.86, 519.254

Е.В. Гасникова¹, И.С. Меньшиков²

egasnikova@ya.ru, ivanmen@ccas.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Сегментация стабิโลграфических рядов с линейным трендом

Целью работы является анализ динамики психофизиологических характеристик участников лабораторных рынков в процессе принятия экономических решений и обобщение алгоритма сегментации (разработанного И.С. Меньшиковым и Е.В. Бурнаевым [1]) на случай линейного тренда.

В качестве показателей психофизиологических характеристик берутся данные со стабллокресел, используемые в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ. Стабллокресла выглядят так же, как и обычные офисные кресла, но в них вмонтированы высокочувствительные датчики для измерения в реальном времени динамики положения центра тяжести с частотой 50 раз в секунду. Данные о положении центра тяжести тела для психофизиологов считаются важной системной характеристикой функционального состояния человека.

Алгоритм сегментации, разработанный в [1], позволяет эффективно разбивать стабิโลграфические ряды на относительно однородные фрагменты. Идея данного алгоритма связана с построением скрытой марковской модели (СММ) по уровням. Предполагается, что процесс характеризуется случайными блужданиями вокруг некоторого уровня и малой вероятностью скачка на другой уровень. Моменты

скачков находим, максимизируя функцию правдоподобия. Доказана сходимость алгоритма. Его сложность составляет $O(N \cdot M^2)$, где $M \ll N$ -число скачков.

Применение данного алгоритма на уровне индивидуального принятия решений подтвердило гипотезу о согласовании моментов сегментации стабิโลграммы участника с моментами сигнальных действий (моменты значимых действий игрока) на лабораторном рынке. На уровне групповых решений был обнаружен эффект синхронизации стабิโลграфических рядов участников в момент кульминации торгов, связанный с выявлением приватной информации. Степень синхронизации оценивается с помощью показателя близости, вычисленного на основе специальным образом агрегированной канонической корреляции. Совокупность данных результатов позволила говорить о построении модели функционального состояния (ФС) участников. Подробнее о самом алгоритме и об анализе данных для серии экспериментов RE (Rational Expectations) можно прочитать в работе [1].

С помощью разработанного в [1] алгоритма проводилась сегментация различных рядов данных, в процессе чего была выявлена одна особенность. Алгоритм ищет участки, на которых данные достаточно однородны, внутри каждого участка идут колебания около некоторого среднего значения (локального постоянного уровня), но часто бывает так, что данные внутри сегмента колеблются не около константы, а скорее около некоторой линейной функции. Появилась идея несколько усовершенствовать алгоритм сегментации на случай линейных трендов. Необходимо было разработать алгоритм, который бы разбивал функциональный ряд на сегменты таким образом, чтобы данные внутри одного сегмента колебались бы уже около некоторой линейной функции. За основу был взят исходный алгоритм сегментации временного ряда и с помощью некоторых обобщений был получен новый алгоритм сегментации уже с учётом линейных трендов.

Для алгоритма с линейным трендом стала наблюдаться неустойчивость по начальному приближению. При одних начальных данных алгоритм вообще переставал сходиться, а при других на большом числе итераций он оставлял всего один или два сегмента из заданных в начале десяти. Частично побороть эту особенность удалось за счёт подбора начального приближения. В качестве начального приближения можно, например, подставлять координаты сегментов, полученных после применения исходного алгоритма с постоянными уровнями (и малым числом итераций).

В ходе применения нового алгоритма сегментации выявилась ещё одна особенность: при выполнении сегментации для различных рядов достаточно часто оказывалось, что координаты сегментов шли друг за другом. Для того чтобы избежать такой ситуации, потребовалось модифицировать сам алгоритм динамического программирования и рассматривать задачу с некоторым дополнительным условием на длину сегмента.

Таким образом, на основе алгоритма сегментации временного ряда (с локально постоянным уровнем) удалось построить алгоритм для сегментации рядов с линейным трендом, который может эффективно использоваться для исследования взаимосвязи процесса принятия решения и функционального состояния участников экономической ситуации. Помимо этого, данный алгоритм может быть применим в других областях, связанных с исследованием психофизиологических характеристик людей.

Литература

1. Бурнаев Е.В., Меньшиков И.С. Сегментация стабильнографических рядов участников лабораторных рынков // Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2008. — Т. 1. — С. 42–45.

УДК 519.86, 519.83

А.А. Голубцов

business2002@bk.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Стохастически устойчивые состояния игры SB

В работе изучается динамика стохастического процесса для игры SB. SB — это вариант двойного аукциона с неполной информацией с дискретными заявками и дискретными значениями частных параметров. Частные параметры — это выкупная стоимость для покупателя и затраты для продавца.

Стохастический процесс порождается этой игрой следующим образом. Исходная игра разыгрывается n раз. Игроки помнят только

данные m последних игр. Из этих данных они случайным образом выбирают k игр, на основе которых делают ход, который максимизирует их ожидаемый выигрыш. Случайные выборки — независимые и неповторные. Ожидаемый выигрыш рассчитывается в предположении, что другой игрок может с равной вероятностью сделать любой ход из этих k ходов. Таким образом, получается марковский процесс, который и является предметом исследования.

Для такого стохастического процесса существует понятие стохастически устойчивого равновесия, которое было введено Пейтоном Янгом [1]. Понятие было введено для игр без частной информации. В работе предлагается расширить это понятие на игры с частной информацией, записав байсовскую игру в матричной форме. Для некоторых классов игр SB небольшой размерности стохастически устойчивые состояния найдены аналитически.

Для изучения характера динамики был предложен следующий подход: наблюдать не действия игроков, а их пары стратегий. В каждый момент времени мы можем вычислить, как действовали бы игроки, при каждом значении частного параметра. Стратегией в текущей игре называется соответствие действий игрока значениям частного параметра. Наблюдаемой величиной процесса является пара стратегий (покупателя и продавца) в зависимости от номера повторения игры.

Такой подход позволяет сравнить результаты с равновесием Байеса–Нэша. Можно посмотреть, какие пары стратегий наблюдались чаще всего в вычислительном эксперименте. Показано, что пара с наибольшей частотой является равновесием Байеса–Нэша. Если равновесий Байеса–Нэша несколько, то в стохастическом процессе все они наблюдаются с положительной вероятностью.

Литература

1. Peyton Young H. The Evolution of Conventions // *Econometrica*. — 1993. — V. 61, N. 1. — P. 57–84.

УДК 330.16

М.А. Двуреченская, О.Р. Меньшикова

bukokk@gmail.com, olga@fastcenter.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками

На примере сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками STB [1] исследуется взаимосвязь поведения участников эксперимента с их психологическими характеристиками, выявленными с помощью теста Эннеаграмма. Работа продолжает исследования, начатые в [2–4].

В течение года студенты 5–6 курса ФУПМ принимают участие в различных социально-экономических экспериментах (свыше 25 видов), реализованных на сети компьютеров в Лаборатории экспериментальной экономики МФТИ. В начале обучения проводится психологическое тестирование. Для выявления устойчивости психологических характеристик оно может повторяться в конце курса. Все это даёт возможность наблюдать и анализировать поведение студентов, сопоставлять его с психологическими данными и находить различные закономерности. Пониманию мотивов поведения участников эксперимента способствуют впечатления, которые они пишут по завершении игры. Для каждого эксперимента выделяется свой набор поведенческих характеристик.

В лаборатории используется несколько тестов для психологических измерений: MBTI, Эннеаграмма, Структограмма, тест Белбина. По результатам тестирования подсчитываются главные компоненты, которые наделены определённым содержательным смыслом. В данной работе применяется тест Эннеаграмма. На карте главных компонент Эннеаграммы точками изображены участники эксперимента STB, проводившегося 20.03.2009 (рис. 1). В нем участвовало 15 человек и было проведено 30 однородных попыток.

Применяемый алгоритм иерархической кластеризации (АИК) автоматически разбивает всех участников на группы таким образом, что люди внутри одной группы имеют большую схожесть друг на друга, чем на людей из других групп. Схожесть мы измеряем коэффициентом корреляции между соответствующими векторами признаков.

На рис. 2 указаны три получившихся кластера для указанного эксперимента STB и отношение схожести между людьми внутри них. В каждом кластере есть пара людей (их имена заключены в овалы), которых мы называем ядром группы. Овалы соединены двусторонними стрелками. Имена тех людей, которые не образуют ядро, написаны в прямоугольниках, из которых исходят односторонние стрелки, указывая на кого похож рассматриваемый человек.

При движении от ядра по любым ребрам графа на рис. 2 коэффициент схожести убывает. В каждом кластере самым большим коэффициентом схожести обладают люди в ядре. Кластеры на рис. 2 пронумерованы сверху-вниз цифрами 1, 2, 3. Чем больше номер кластера, тем больше коэффициент схожести внутри ядра. Люди редких психологических типов расположены на периферии, и коэффициент их схожести с ближайшим человеком низкий.

На карте Эннеаграммы (рис. 1) приведены кластеры, полученные с помощью АИК и изображённые на рис. 2 с соответствующими отношениями схожести.

В эксперименте STB все участники в каждой попытке случайно разбиваются на тройки и получают роли продавца (S), транспортровщика (T) и покупателя (B). Участники одновременно и независимо друг от друга подают свои заявки в виде некоторого числа, зависящего от приватного параметра, имеющего смысл затрат. В качестве поведенческих характеристик были выбраны средние за весь эксперимент выигрыш, заявка и маржа для каждой из трёх ролей и для каждого участника. Целью работы был поиск поведенческих отличий в группах, выделяемых АИК. Выяснилось, что в кластере 2 заметно выше средний выигрыш, а представители кластера 3 более других тяготеют к искреннему поведению.

К девяти выбранным поведенческим характеристикам также был применен АИК. Получившиеся поведенческие кластеры имеют много общего с выделенными психологическими кластерами, что свидетельствует о несомненном влиянии психологических характеристик на поведение людей в эксперименте STB.

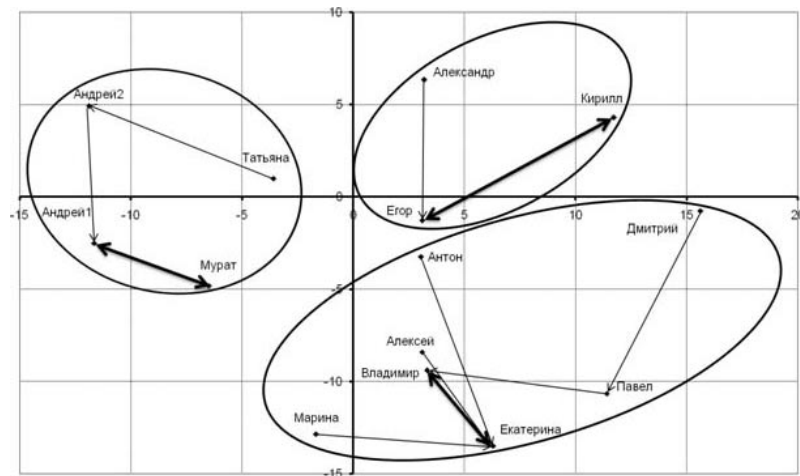


Рис. 1. Изображение участников эксперимента на карте Эннеграммы

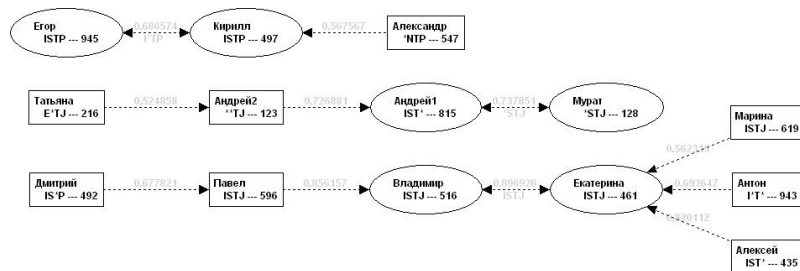


Рис. 2. Три психологических кластера, полученные с использованием АИК

Литература

1. Драновский Е.А. Количественная оценка поведения участников двойного и тройного аукционов // Труды 51-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2008. — Т. 1. — С. 50–52.
2. Кедрова А.В., Меньшикова О.Р. Психологические типы и стереотипы поведения участников лабораторных рынков // Труды 49-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2006. — Т. 1. — С. 128–129.
3. Лукинова Е.М., Меньшикова О.Р. Результативность участников лабораторных рынков в зависимости от их психологических ти-

пов // Модели и методы обработки информации: Сб. науч. тр. — М.: МФТИ, 2009. — С. 175–185.

4. Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И. Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах // Модели и методы обработки информации: Сб. науч. тр. — М.: МФТИ. — С. 161–174.

УДК 519.86

П.Е. Двуреченский

pavel.dvurechensky@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Двойной аукцион по единой цене с тремя единицами товара: теория и эксперимент

Работа посвящена сравнению теоретического конкурентного равновесия рынка с реальным поведением участников лабораторного рынка. Показано, что для двойного аукциона по единой цене конкурентное равновесие адекватно описывает агрегированное поведение участников рынка. Значит, нет смысла привлекать более сложные концепции теории игр, такие, как равновесие Байеса–Нэша [1] и их обобщения [2], как это необходимо в аукционах другого типа.

В работе использовались данные, полученные при проведении нескольких экспериментов в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ. Аукционы проводились на сети компьютеров в рамках курса «Экспериментальная экономика» для студентов ФУПМ.

В качестве основного варианта рассматривается двойной аукцион с закрытыми заявками на три единицы товара по единой цене. Участники аукциона автоматически случайным образом получают роли: продавца (Seller) или покупателя (Buyer). Каждый игрок обладает частной информацией о своих трёх единицах товара — себестоимости для продавца v_S или ценности для покупателя v_B . Относительно частных параметров остальных игроков известно только их распределение. Игроки одновременно и независимо друг от друга подают свои заявки на покупку или продажу трёх единиц товара. После

подачи всех заявок происходит их сортировка по цене, и определяется единая для всех сделок цена P и количество состоявшихся сделок. Выигрыш продавца от каждой совершенной сделки равен $P - v_S$, а покупателя $v_B - P$. Если по некоторой единице товара нет сделки, то выигрыш от этой единицы равен нулю. Эксперимент состоит из нескольких однородных попыток, причём роли каждый раз выбираются случайно и независимо от предыдущих попыток.

В работе проведено теоретическое рассмотрение такого рынка товаров. Найдены равновесная цена, по которой происходят сделки и равновесная доля сделок от общего числа товаров на рынке. Равновесные параметры задаются пересечением кривой спроса и предложения. При этом теоретические кривые спроса и предложения однозначно определяются параметрами равномерных распределений частных параметров покупателя и продавца соответственно. Аналогичные рассуждения были проведены и для рынка, имеющего место в эксперименте. Были построены кривые выявленного спроса и предложения, основанные на заявках участников. Каждый участник подавал заявку в соответствии со своей стратегией. Стратегия считается искренней, если заявка равна частному параметру. Было показано, что в предположении рационального поведения игроков, суммарный выигрыш всех игроков рынка, а также количество сделок не может превысить определённые пределы. Поэтому при рассмотрении теоретических и экспериментальных зависимостей можно использовать понятие эффективности рынка. В качестве меры эффективности экспериментального рынка по числу сделок можно рассматривать количество сделок в эксперименте по отношению к предельному теоретическому числу сделок. Аналогично в качестве меры эффективности по суммарному выигрышу можно рассматривать суммарный выигрыш в эксперименте по отношению к максимальному теоретическому выигрышу. Показано, что если бы все игроки на экспериментальном рынке использовали искренние стратегии, то рынок был бы эффективным как по суммарному выигрышу игроков, так и по количеству сделок. При этом рынок, на котором игроки не используют искренние стратегии, будет неэффективным.

В работе рассмотрена зависимость цены (теоретической и экспериментальной), по которой происходили сделки, от периода. В качестве теоретической цены рассматривалась равновесная цена при искренних стратегиях. Было обнаружено, что в 2009 году эксперимент сгладил колебания равновесной цены от периода к периоду. Следовательно, если бы все игроки использовали искренние стратегии, то

амплитуда колебаний цен была бы больше. Этот вывод был также подтвержден результатами эксперимента 2007 года.

Проанализирована зависимость от номера попытки числа сделок и суммарного выигрыша игроков. Обнаружено, что в 2009 году через 12 периодов из 20 рынок вышел на 100%-ю эффективность как по количеству сделок, так и по суммарному выигрышу. Данные 2007 года подтвердили вывод о выходе рынка на эффективность по суммарному выигрышу. Выводы о выходе рынка на эффективное количество сделок для этих данных не подтвердились. Значит, возможна ситуация, когда рынок неэффективен по количеству сделок, но эффективен по суммарному выигрышу (рис. 1).



Рис. 1. Зависимость суммарного выигрыша (объема торгов) игроков от периода в 2009 г.

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс. — 2007. — 207 с.
2. *Голубцов А.А., Меньшиков И.С.* Агрегированное равновесие лабораторных сетевых рынков. — М.: ВЦ РАН. — 2007. — 39 с.

А.В. Косьяненко

a.v.kosyanenko@gmail.com

Государственный университет Высшая школа экономики

Особенности численного решения задачи об оптимальной структуре сбережении населения

На протяжении последних нескольких лет, вплоть до осени 2008 года наблюдалась необычная тенденция. Несмотря на устойчивую отрицательную среднюю номинальную доходность долларов США объём вложения в них оставался для населения одним из основных способов сбережения. Формальное применение стандартных методов портфельного анализа даёт противоположный результат — как доминируемая альтернатива доллары должны быть исключены из портфеля. В предположении о рациональном поведении населения это явление может быть объяснено только каким-то дополнительным преимуществом, присущим этой валюте. По всей видимости, таким преимуществом может служить возможность резкого обесценивания активов, номинированных в рублях. Примеры таких событий наблюдались в 1998 и 2008–2009 годах.

Задача определения оптимальной структуры сбережений населения в условиях возможных, но относительно маловероятных, резких изменений стоимости активов мало исследована. Одной из первых работ на эту тему была попытка Ритцем [8] решения загадки Мехры–Прескотта [6]. В основе критики такого подхода лежали неправдоподобно высокие, по мнению большинства исследователей, субъективные вероятности кризисных событий, приписываемые участникам рынка. В работах Барро (см. например, [2]) демонстрируется, что такие значения субъективных вероятностей достаточно правдоподобны. Для исследователей российских финансовых рынков такой проблемы не стоит. Кризисные события, к сожалению, происходили в новейшей истории России достаточно часто, чтобы приписывать им субъективные вероятности необходимого порядка величины.

Естественным обобщением является использование Байесовского принципа для получения информации о параметрах распределения

доходностей активов. Примерами применения такого подхода являются работы [5] (однопериодная оптимизация функции полезности с постоянной относительной несклонностью к риску) и [3] (многопериодный аналог). Непосредственное применение Байесовских методов для большинства рассмотренных выше постановок задач, к сожалению, невозможно. Гевеке [4] доказывает, что в предположении об условном нормальном распределении доходностей активов и использовании стандартного сопряженного семейства распределений безусловное математическое ожидание функции полезности с постоянной относительной несклонностью к риску существует при единственном значении этого показателя. Витцман [9], рассматривая соответствующую модификацию модели Лукаса, приводит содержательную интерпретацию этого факта. В частности, он утверждает, что загадки фондового рынка не более чем артефакт модели, возникающей из-за предположения о точной информированности потребителя о параметрах распределения доходности актива.

Целью настоящей работы является развитие подхода, предложенного ранее в [1]. Основное внимание уделено формальному описанию задачи агента, использующему байесовский метод получения информации о состоянии рынка. Это в свою очередь требует обоснования возможности применения данного подхода в конкретной постановке. Кроме того, поставленная в [1] задача нелинейна. Хотя она и допускает сведение к задаче линейного программирования, такой подход не представляется продуктивным в силу высокой размерности получающейся задачи и необходимости численного получения значения целевой функции методом Монте-Карло на каждом шаге оптимизации.

Таким образом, важна также и процедура непосредственного получения решения оптимизационной задачи. Основываясь на содержательной интерпретации целевой функции за счёт переформулировки задачи и сведения к известному частному случаю, частично вычисление интеграла методом Монте-Карло было заменено аналитическим выражением, что позволило существенно повысить вычислительную эффективность метода. Кроме того, предложенная методика получения выборки из совместного распределения параметров распределения и наблюдаемых величин допускает непосредственное распараллеливание. За счёт применения этих двух инструментов стало возможным использование относительно медленно сходящегося метода Нелдера–Мида для решения нелинейной задачи об оптимальном портфеле.

Применение предложенного подхода особенно актуально при наличии кризисных явлений в экономике, когда изменение (как правило увеличение) субъективных вероятностей дефолтов по отдельным видам активов приводит к перераспределению средств в активы, менее подверженные таким явлениям. Для иллюстрации такого рода явлений приведены динамика доли вложений в доллары США, наблюдавшейся на протяжении 2003–2005 гг. и спрогнозированной при помощи предложенной процедуры. Резкое увеличение доли вложений в доллары летом 2004 года соответствует кризису ликвидности банковской системы России. Предложенный подход является универсальным и может быть применен к анализу аналогичных явлений за пределами Российской Федерации.

Литература

1. Косьяненко А.В. Определение оптимальной структуры сбережений населения // Труды 50-й научной конференции МФТИ: «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2007. — Т. 7. — С. 116–119.
2. Barro R.J. Rare disasters and asset markets in the twentieth century // The quarterly Journal of Economics. — 2006. — V. 121, N. 3. — P. 823–866.
3. Brennan M.J., Xia Y. Dynamic Asset Allocation under Inflation // The Journal of Finance. — 2002. — V. 77, N. 3. — P. 1201–1238.
4. Geweke J. A note on some limitations of CRRA utility // Economics Letters. — 2001. — V. 71. — P. 341–345.
5. Kandel S., Stambaugh R.F. On the Predictability of Stock Returns: An Asset Allocation Perspective // The Journal of Finance. — 1996. — V. 51. — P. 385–424.
6. Mehra R., Prescott E.C. The equity premium: a puzzle // Journal of Monetary Economics. — 1985. — V. 15. — P. 145–161.
7. Rietz T.A. The equity premium: a solution // Journal of Monetary Economics. — 1988. — V. 22. — P. 117–131.
8. Weitzman M.L. Subjective Expectations and Asset-Return Puzzles // The American Economic Review. — 2007. — V. 97, N. 4. — P. 1102–1130.

УДК 519.86

Е.Л. Кудрявцев

kegoru@mail.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Игровая модель явки на выборы: теория и эксперимент

Рассматривается одношаговая игра с неполной информацией. Есть две группы игроков в количестве N_A и N_B , $N_A < N_B$. У каждого игрока есть случайный приватный параметр (бонус), равномерно распределенный на отрезке $[0, V]$, реализация которого известна только ему. Игрок делает выбор: взять бонус или добавить одно очко к своей команде. Команда с большим количеством очков считается победителем. Другая команда считается проигравшей. Если команды набрали равное количество очков, то регистрируется ничья. Каждый игрок победившей команды получает выигрыш в размере H , а проигравшей команды — L ($L < H$), в случае ничьи все получают $(H + L)/2$. Дополнительно к выигрышу игрок получает бонус, если он согласился на него.

Игру можно трактовать как модель явки на выборы, где A и B — электорат меньшинства и большинства по повестке дня выборов, например, по избираемому кандидату. Величины H и L характеризуют выигрыш человека от победы и от проигрыша его кандидата. Величина бонуса показывает альтернативный выигрыш, который человек может получить от неявки на выборы. Например, человек может поехать на дачу в этот день.

В этой модели естественно искать равновесие Байеса–Нэша (РБН) [1] в симметричных пороговых стратегиях. Если бонус выше порога, то человек не идет на выборы, если ниже, то идет. С учетом размера групп и параметров L , H , V РБН определяет вероятности участия в выборах $P_A^* = P_A^*(N_A, N_B)$ и $P_B^* = P_B^*(N_A, N_B)$, которые мы будем называть явкой в группах A и B соответственно. Эти величины мы будем сравнивать с явкой $\hat{P}_A = \hat{P}_A(N_A, N_B)$ и $\hat{P}_B = \hat{P}_B(N_A, N_B)$ по результатам лабораторного эксперимента с участием добровольцев.

Эта игра была исследована профессором Палффри и его коллегами из лаборатории социально-экономических экспериментальных иссле-

дований Калифорнийского технологического института, США. В их работе [2] проверялся ряд гипотез относительно взаимосвязи теории и эксперимента. Например, утверждается, что \hat{P}_A и \hat{P}_B приблизительно равны P_A^* и P_B^* . Для тех экспериментов, в которых это не так, по крайней мере, \hat{P}_A и \hat{P}_B имеют зависимость от номера повторения такую, как если бы они двигались в сторону P_A^* и P_B^* . Сформулированы гипотезы, относительно соотношений между \hat{P}_A и \hat{P}_B в зависимости от параметров на основе теоретических зависимостей P_A^* и P_B^* . Например, если $N < M$, то

1) $\hat{P}_j(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}) > \hat{P}_j(\frac{M-1}{2}, \frac{M+1}{2}) \hat{P}_j(\frac{N}{3}, \frac{2N}{3}) > \hat{P}_j(\frac{M}{3}, \frac{2M}{3})$, $j = A, B$;

2) $\hat{P}_j(\frac{N-1}{2}, \frac{N+1}{2}) > \hat{P}_j(\frac{N}{3}, \frac{2N}{3})$, $j = A, B$; 3) для $N > 1$: $\hat{P}_A(N, M) > \hat{P}_B(N, M)$.

В сентябре 2009 года был проведён ряд экспериментов с игрой «Явка на выборы» на базе лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Полученные данные в основном подтверждают то, что в поведении игроков присутствуют тенденции, описанные в [2]. Например, в игре 18.09.2009 ($N_A = 1, N_B = 2, V = 100, H = 100, L = 20$) \hat{P}_A и \hat{P}_B с большой точностью равны P_A^* и P_B^* . В серии экспериментов 11.09.2009 выполняются соотношения $\hat{P}_A(5, 8) > \hat{P}_B(5, 8)$, $\hat{P}_A(6, 7) > \hat{P}_B(6, 7)$, $\hat{P}_A(5, 8) > \hat{P}_A(6, 7)$, $\hat{P}_B(5, 8) < \hat{P}_B(6, 7)$ (V, H, L как 18.09.2009), что соответствует аналогичным неравенствам для РБН.

Для поиска новых вариантов гипотез был проведён анализ зависимости $P_A^*(N_A, N_B, \frac{V}{H-L})$ и $P_B^*(N_A, N_B, \frac{V}{H-L})$. График зависимости P_A^* и P_B^* от $\frac{V}{H-L}$ для $N_A = 1, N_B = 2$ приведён на рис. 1.

Такое поведение графика в области малых $\frac{V}{H-L}$ можно трактовать как то, что при относительно небольшом бонусе явка группы B (большинства) больше, чем явка группы A (меньшинства). В области больших значений $\frac{V}{H-L}$ наоборот, явка A больше, чем явка B , хотя они обе уменьшаются с ростом бонуса. Это позволяет сформулировать ещё одну гипотезу, которая требует экспериментальной проверки.

Кроме того, по РБН явка должна падать с ростом N_A и N_B . Эксперименты показывают, что явка не так охотно падает. При этом, в отличие от [2], в связи с малым количеством экспериментов, мы не можем говорить о том, что была замечена динамика \hat{P}_A и \hat{P}_B в сторону P_A^* и P_B^* .

Для прояснения сходимости агрегированного поведения участников эксперимента к РБН, мы предложили класс роботов, которые

используют в повторениях игры простую адаптивную стратегию. Достаточно, чтобы роботы помнили результаты предыдущих повторений игры и делали следующий ход, используя пороговую стратегию $P = \frac{H-L}{2} \cdot (\frac{m}{N})$, где m — количество повторений, в которых игрок своим голосом мог изменить исход выборов, а N — количество сыгранных повторений игры. Эта стратегия максимизирует ожидаемый выигрыш на основе полученного опыта. Как показывают вычислительные эксперименты, такая популяция роботов сходится к РБН.

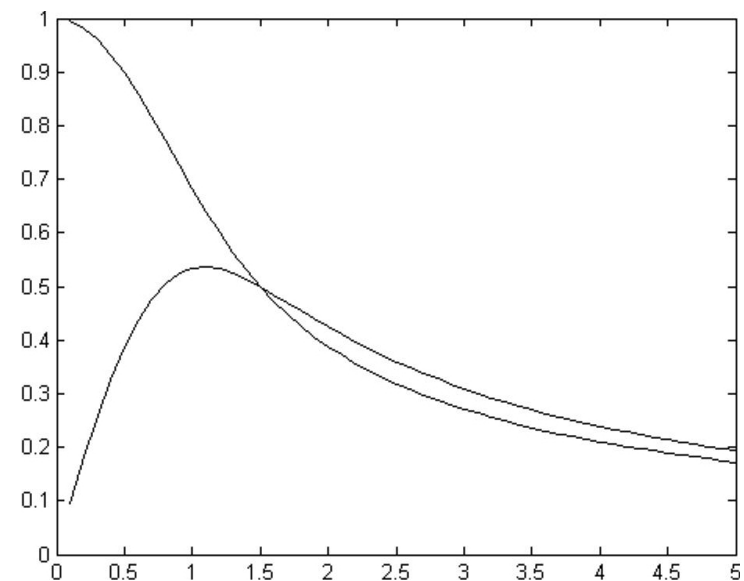


Рис. 1

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.
2. *Levine David K., Palfrey T.* The Paradox of Voter Participation? A Laboratory Study // American Political Science Review. — 2007. — V. 101. — P. 143–158.

К.В. Макаров

makar1988@ Rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Оптимальные смешанные стратегии для двойного аукциона с неполной информацией

Финансовая теория для описания эволюции цен на финансовых рынках часто использует случайные блуждания и их непрерывный аналог — броуновское движение. Возникновение случайных блужданий принято объяснять воздействием на процесс ценообразования многочисленных экзогенных факторов, подверженных случайным изменениям во времени. В недавней работе Де Мейера и Салей [1] предлагается иная «эндогенная» мотивировка возникновения броуновской компоненты в эволюции рыночных цен. Предполагается, что участники рынка имеют различную информацию о событиях, влияющих на цены. Биржевые агенты, имеющие дополнительную «инсайдерскую» информацию, при длительном взаимодействии «выдают» эту информацию другим участникам рынка через свои действия. Однако они не заинтересованы в немедленном обнаружении своей приватной информации. Это стремление «инсайдера» скрывать свою информацию понуждает его к стратегическому маневрированию, выражающемуся в рандомизации своих действий, которое приводит к сглаживанию резких скачков рыночных цен и влечет появление в их эволюции броуновской компоненты. В работе Крепс и Доманского [2] стратегическое происхождение броуновской компоненты в эволюции цен на финансовых рынках демонстрируется на примере упрощённой модели многошаговых биржевых торгов с асимметричной информацией. В этой модели два игрока с противоположными интересами ведут между собой многократные торги за однотипные «рисковые» ценные бумаги (акции).

Но ситуация, когда на рынке есть несколько инсайдеров, каждый из которых имеет свою собственную приватную информацию, ближе к существующей реальности. Поэтому в данной работе рассматрива-

ется задача, похожая на рассмотренную Крепс и Доманским, но в ней оба игрока имеют приватную информацию. Но при этом введены некоторые упрощения по сравнению с игрой RE0 из [3], где заявки выставляются многократно и в произвольные моменты времени.

Постановка задачи. Два игрока обладают деньгами и рисковыми активами. Истинная стоимость актива определяется после окончания торгов случайным и равновероятным выбором из трёх значений 30, 70 или 110. Оба игрока знают это. Каждому из игроков сообщается дополнительно один из сценариев, который точно не реализуется, причём им сообщают разные сценарии. Игроки знают об информированности друг друга, но, конечно, не знают, что именно сообщили другому игроку.

Игроки ведут между собой двухпериодные торги. В каждом периоде игроки независимо и одновременно делают ставки. Число допустимых различных ставок предполагается равным 3.

Игрок, назвавший большую цену, покупает единицу актива у того, кто назвал меньшую цену, заплатив партнеру по сделке заявленную цену. При равенстве цен заявок сделки не происходит. Игроки стремятся максимизировать стоимость своего итогового портфеля, состоящего из актива и денег.

Задача. Найти совершенное байесовское равновесие (СБР) в смешанных стратегиях [4] в данной торговой игре с неполной информацией.

Решение задачи. Описанная модель сводится к антагонистической игре с неполной информацией. Сначала можно найти решение для однопериодной игры, построив матричную форму байесовской игры. Нахождение равновесия Байеса–Нэша в антагонистическом случае сведётся к решению задачи линейного программирования. Для двухпериодной модели такой подход не применим из-за огромного количества вычислений (размер матрицы нормальной формы игры — $3^{27} \times 3^{27}$). Задача решается следующим образом: оптимальная стратегия каждого игрока в двухпериодной игре является композицией его оптимального первого хода и его оптимальной стратегии в оставшейся однопериодной игре. После наблюдения действия противника на первом шаге игрок, учитывая свою частную информацию и ход противника, переоценивает вероятность истинной стоимости актива.

Результаты. Первый период игры. Найдено допустимое множество возможных ставок, при которых нет равновесия Байеса–Нэша в чистых стратегиях, а значит, игроки должны применять смешанные стратегии. Найдена оптимальная стратегия для однопериодной игры.

Второй период игры. Второй период игры рассматривается как байесовская игра, в которой игрок пересчитывает вероятность истинной цены актива на основании ставки соперника в периоде 1. Таким образом, оптимальные стратегии периода 2 явно зависят от хода игроков в периоде 1. На основании этого построена нелинейная задача оптимизации, решением которой являются оптимальные стратегии игроков в описанной модели.

Планы. Основной целью последующей работы является решение нелинейной оптимизационной задачи и теоретическое обоснование найденных оптимальных стратегий.

Следующим этапом исследования будет организация и проведение эксперимента по этой торговой игре в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Планируется провести анализ согласованности оптимальных смешанных стратегий в данной игре с частотными характеристиками ставок участников эксперимента.

Литература

1. *De Meyer B., Moussa Saley H.* On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance // *Int. Journal of Game Theory.* — 2002. — V. 31. — P. 285–319.
2. *Доманский В.К., Кренс В.Л.* Повторяющиеся игры с асимметричной информацией и случайные блуждания цен на финансовых рынках // *Обзорные прикладной и промышленной математики.* — 2005. — Т. 12, № 4. — С. 950–952.
3. *Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р.* Лабораторные исследования информационной эффективности рынков. — М.: ВЦ РАН, 2006. — 52 с.
4. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.

УДК 519.86, 330.16

О.Р. Меньшикова¹, И.С. Меньшиков²
olga@fastcenter.ru, i.menshikov@gmail.com

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Должность в администрации города и психологический тип сотрудника: экспериментальное исследование

На основе проведённых в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН исследований было установлено [1], что каждому психологическому типу человека в предъявленной ситуации соответствует характерный тип поведения, причём это общее утверждение можно в каждом случае наполнить конкретным количественным содержанием. Этот подход может быть с успехом использован в прикладных проектах по управлению кадрами.

В 2009 году был проведён анализ кадровой структуры администрации одного из городов Сибири на основе тестирования 700 сотрудников администрации по 8 тестам с помощью системы тестирования «Экселенс менеджмент» (www.excellence.ru), разработанной в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Базовыми тестами для выявления психологического типа сотрудников были тесты МВТИ и Эннеаграмма [2]. Тестирование послужило основой для формирования кадрового резерва. Был предложен метод поиска кандидата на любую освободившуюся должность, который мог бы продолжить дело своего предшественника.

В результате анализа результатов тестирования были обнаружены важные особенности данного коллектива.

— Выявилась психологическая однородность коллектива (на 2 типа из 16 типов МВТИ приходится 80% тестируемых).

— Самыми сильными качествами в данном коллективе являются перфекционизм (1), миротворчество (9) и желание помогать другим (2); средними — честолюбие (3), лояльность (6), лидерство (8); наименее выражены наблюдательность (5), артистизм (4), энтузиазм (7).

— Коллектив амбивертен (экстраверсия (E) и интроверсия (T) сбалансированы), у большинства выражены сенсорика (S), логика (T) и организованность (J). Сильной стороной большинства сотрудников является организация конкретной работы. Нововведения и изменения пугают истораживают.

— Практически отсутствуют интуитивные люди (N), обладающие стратегическим мышлением, которые хорошо предвидят последствия принимаемых решений. В связи с этим у коллектива могут возникнуть проблемы с принятием стратегических решений, инновациями, оценкой долгосрочной перспективы.

— Мало людей научно-исследовательского типа (NT). Повышение доли таких людей может позволить, например, более рационально организовать делопроизводство за счёт введения новых информационных технологий.

— Повышена доля людей линейно-напористого темперамента (EJ), что может послужить причиной увеличения числа конфликтных ситуаций, которые чаще всего возникают именно в таких коллективах.

— Практически нет людей, обеспечивающих коллективу психологический комфорт (NF — катализаторы групповой активности). Недостаток типов NF может привести к неэффективности взаимодействия между структурными подразделениями, неполному использованию кадрового потенциала, ухудшению психологического климата в подразделениях.

— Существенно повышена доля людей, которых привлекает только престиж и статус (ES). Половина людей главным стимулом имеет благосостояние (IS) (высокая зарплата, хороший компьютер на работе, удобное рабочее место и пр.). Совсем немного людей, которых привлекает уникальность выполняемой ими работы (EN — 5%) и которые творчески относятся ко всем заданиям (IN — 4%). Последним — главное не мешать, не навязывать готовые формы, а предоставить действовать самостоятельно.

— Выявлены типичные представители коллектива и аутсайдеры (представители редких психологических типов) в каждом из 28-ми подразделений.

— Предложено графическое изображение психологических типов сотрудников на карте всего коллектива и каждого из 28-ми подразделений.

На рис. 1 на карте главных компонент Эннеграммы [2] точками изображены усреднённые психологические характеристики по пред-

ставителям одной должности. Интересно отметить, как соотносятся психологические типы представителей высоких должностей (директор департамента, начальник управления) и их заместителей. Заместители всегда более интровертны, и у них менее выражены волевые качества. На рис. 1 это соответствует сдвигу вниз и вправо. Оказалось, что группа вице-мэров обладает наиболее выраженными волевыми качествами по сравнению со всеми остальными группами, что, впрочем, и ожидалось. Средние психологические характеристики всех наиболее высоких должностей расположены в III квадранте.

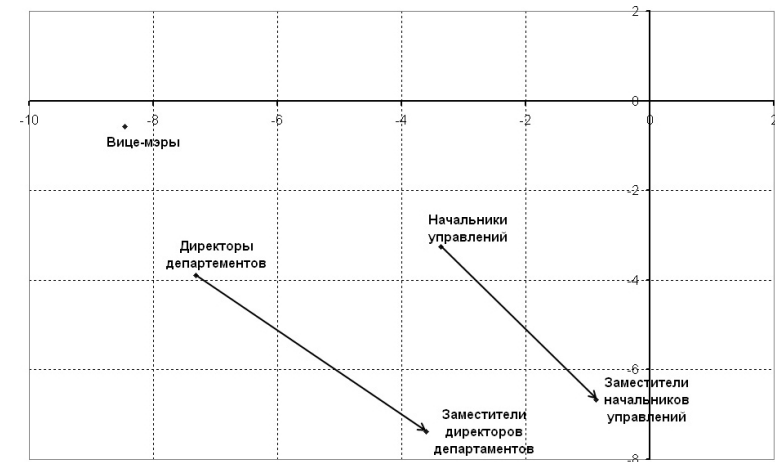


Рис. 1. Психологические характеристики должностей на карте главных компонент Эннеграммы

Литература

1. *Меньшикова О.Р., Мороз И.И., Талачева Е.И.* Влияние психологического типа участника лабораторных рынков на его поведение в социально-экономических экспериментах // Модели и методы обработки информации: Сб. науч. тр. — М.: МФТИ. — С. 161–174.

2. *Кедрова А.В., Меньшикова О.Р.* Психологические типы и стереотипы поведения участников лабораторных рынков // Труды 49-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2006. — Т. 1. — С. 128–129.

УДК 519.86

Д.А. Мингалиев, И.С. Меньшиков

d.mingaliev@gmail.com, i.menshikov@gmail.com

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Экспериментальный анализ торговой игры с информированным участником

Цель работы состоит в сравнении поведения людей в эксперименте с теорией антагонистических игр с асимметричной информацией. В [1] найдено решение игры, которое служит моделью многошаговых торгов с асимметричной информацией. В этой игре два игрока обладают деньгами и рискован активом. Истинная стоимость актива определяется случайным образом, причём эта стоимость принимает значение H с вероятностью p и значение L с вероятностью $1 - p$. Оба игрока знают вероятность p . Игрок 1 знает, какой вариант реализовался, игрок 2 не знает. Игрок 2 знает об информированности игрока 1.

Затем игроки ведут между собой двухшаговые торги. На каждом шаге торгов оба игрока одновременно и независимо друг от друга выставляют ставки. Тот, кто поставил большую ставку, получает товар и платит другому цену, равную своей ставке. При равенстве ставок сделки не происходит. Игроки стремятся максимизировать стоимость своего итогового портфеля.

На основе программной оболочки z-Tree [2] в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН реализована сетевая торговая игра между инсайдером и аутсайдером и проведена серия экспериментов для сравнения полученных результатов с теорией.

Данная модель описывается антагонистической повторяющейся игрой с неполной информацией, в которой совершенное байесовское равновесие (СБР) [3] существует, как правило, в смешанных стратегиях.

Первый эксперимент был проведён 17.04.09 (18 студентов МФТИ, 81 игра). Второй эксперимент был проведён 24.04.09 (14 студентов МФТИ, 70 игр).

Приведём анализ экспериментальных данных. Начнём с выигрышей инсайдера. На рис. 1 изображены выигрыши инсайдера за шаг

1 в зависимости от вероятности высокой стоимости, которая случайным образом определялась в начале игры.

Выигрыш инсайдера на шаге 1 в эксперименте 24.04.2009 был больше, чем в эксперименте 17.04.2009 и чем в теории. Это связано с тем, что во втором эксперименте участниками были те же самые студенты. Они уже меньше делали случайных ошибок, лучше понимали цель и правила игры. Как мы видим, их стратегии «зарабатывали» больше, чем теоретические. Удивительно, что 17.04.2009 инсайдер, зная дополнительную приватную информацию, при $p \in [0,1,0,3]$ играл «в минус». Это означает, что инсайдер вел себя «жадно», пытался много обманывать. Он делал ставки 1 и 2 при $p \leq 0,3$ и цене актива, равной 0.

На шаге 2 (рис. 2) инсайдер выигрывал меньше, чем мог бы, если бы играл по теоретическим стратегиям. Но тем не менее он играл «в плюс». Интересно, что в эксперименте 24.04.2009 на шаге 1 и на шаге 2 линия выигрыша растёт с ростом p . А в эксперименте 17.04.2009 на шаге 1 она растёт, но на шаге 2 медленно убывает.

В итоге за оба шага (рис. 3) инсайдер во втором эксперименте заработал больше, чем если бы он играл по теории при $p \geq 0,5$ и, наоборот, меньше при $p < 0,5$. В первом эксперименте инсайдер заработал меньше. Все-таки знание игры во втором эксперименте сказывается на выигрыше. Но это может быть связано и с тем, что люди один раз уже играли друг с другом и знают примерно общее поведение группы.

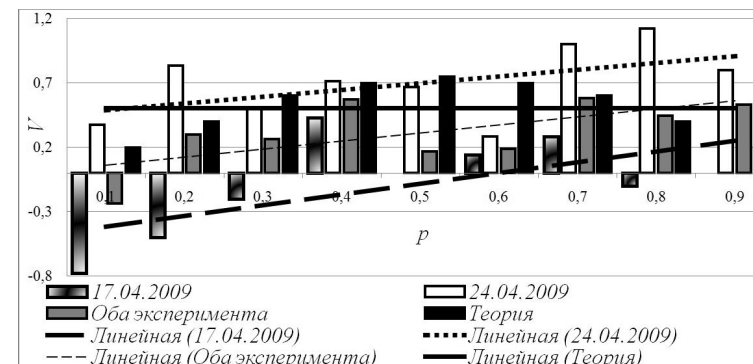


Рис. 1

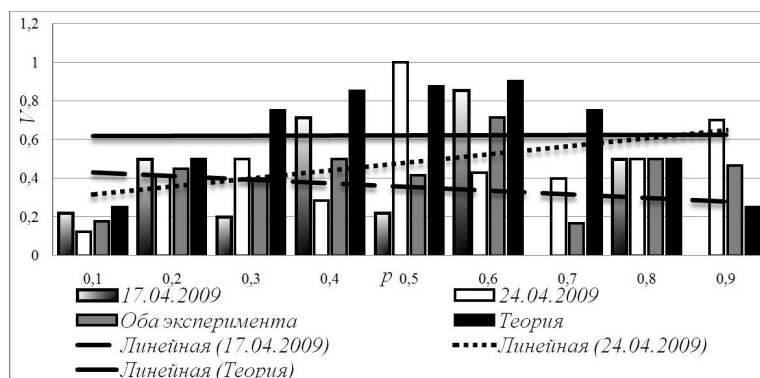


Рис. 2

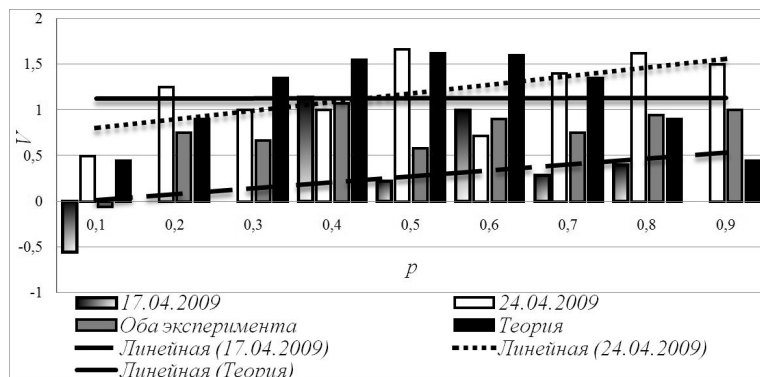


Рис. 3

Результаты работы. 1) Стратегия поведения игроков в эксперименте схожа с той, что описана в теории. Но инсайдер пытается дополнительно пойти на риск и «заработать» больше, чем теоретический максимальный гарантированный выигрыш.

2) Следует более детально проанализировать эффект роста выигрышей от первого эксперимента ко второму.

Выигрыши за шаг 1 в зависимости от вероятности высокой стоимости.

Выигрыши инсайдера за шаг 2 в зависимости от вероятности высокой стоимости.

Суммарный выигрыш инсайдера за оба шага в зависимости от вероятности высокой стоимости.

Литература

1. *Крепс В.Л.* Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2009. — № 4. — С. 75–86.
2. *Fischbacher U.* z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // Experimental Economics. — 2007. — P. 171–178.
3. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208с.

УДК 519.86

В.В. Платонов

vplatonov@list.ru

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

Экспериментальная экономика как инструмент анализа экономических процессов

Экспериментальной экономикой называют способ исследования экономических процессов, явлений и задач с помощью проведения лабораторных экспериментов. При этом под экспериментом в данном случае понимается моделирование исследуемой экономической ситуации в контролируемых условиях лаборатории, где роли экономических агентов играют добровольцы, мотивированные каким-либо способом.

Данная работа содержит краткий обзор методологии экспериментальной экономики. В работе проводится исторический обзор литературы, посвященной исследованиям экономических проблем с помощью лабораторных экспериментов, рассматриваются основные цели проведения экспериментов, приводится их классификация. Также рассматриваются структура и особенности проведения современных лабораторных исследований.

Лабораторные экономические эксперименты приобретают популярность в 50-х–60-х годах XX века, при этом в большинстве опубли-

кованных в данный период работ основной целью проведения экспериментов была верификация существующих экономических теорий. По мере развития экспериментальной экономики цели лабораторных исследований существенно расширились [1]: эксперименты стали применяться также для сравнительного анализа различных теорий; установления эмпирических закономерностей, на основе которых разрабатывались новые теории; анализа экономических институтов (например, фондовых бирж и аукционов); решения разного рода прикладных задач (таких как: дерегулирование рынка электроэнергии, создание механизмов рыночной торговли энергоносителями, механизмов распределения земельных участков, распределение загрузки космических аппаратов) и т. д.

Одним из популярных способов классификации экономических экспериментов является классификация по объекту исследования. Часто выделяют три основных направления [2]: эксперименты по исследованию теорий индивидуального выбора, эксперименты по изучению теоретико-игровых гипотез, исследование рыночных взаимодействий и моделей равновесия.

В настоящее время экономические эксперименты по сути являются междисциплинарными научными исследованиями. Например, для подбора участников, проведения экспериментов и обработки их результатов широко используются компьютерные технологии. Для анализа полученных данных и сопоставления их с теоретическими предсказаниями могут применяться различные математические инструменты, такие, как методы распознавания и классификации, теории игр, матэкономического моделирования, оптимизации и другие. Иногда при постановке или анализе эксперимента возникает необходимость дополнительного проведения так называемых «вычислительных экспериментов», в которых в роли участников выступают специально созданные программы- «роботы», моделирующие ключевые особенности поведения людей.

Одним из сравнительно новых подходов к постановке и проведению лабораторных экономических экспериментов является анализ психофизиологического состояния участников [3]: различные физиологические показатели могут сниматься с участников, как в их обычном состоянии, так и в процессе проведения эксперимента в режиме онлайн с помощью томографического или стабิโลграфического оборудования.

Литература

1. *Смит В.* Экспериментальная экономика. — М.: ИРИСЭН, 2008.
2. *The Handbook of Experimental Economics / ed. by J.H. Kagel, A.E. Roth.* — Princeton University Press, 2007.
3. *Меньшиков И.С., Меньшикова О.Р.* Лабораторный анализ процесса принятия экономических решений на основе комплекса стабิโลграфических кресел // Известия ЮФУ. Технические науки. — 2008. — № 6. — С. 162–165.

УДК 519.86

А.Е. Утемов

alexut@yandex.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Стратегии обучения в одной динамической игре голосования

В работе рассматривается динамическая игра голосования в комитете с полной информацией с условным названием «три сенатора». Сенаторы A , B и C участвуют в работе комитета, определяющего ставку налога $\tau \in [0; 1]$. Голосование по поводу принятия ставки налога τ проходит в течение нескольких дней, пока не будет принято решение. Каждый день приводит к уменьшению выигрышей всех игроков пропорционально коэффициенту δ ($0 < \delta < 1$).

У каждого свой идеал ставки. Сенатор A — борец за отмену налогов. Его выигрыш от принятия ставки налога τ в день t равен $\delta^t (1 - \tau^2)$, Сенатор B — центрист: его выигрыш от принятия ставки налога τ в день t равен $\delta^t (1 - (T - \tau)^2)$, где $0 < T < 1$ является идеальной для него ставкой. Сенатор C стремится к максимальной ставке: его выигрыш от принятия ставки налога τ в день t равен $\delta^t (1 - (1 - \tau)^2)$.

Каждый день один из игроков (активный) по жребию получает право выдвинуть ставку налога. Активный игрок выдвигает ставку

τ , а двое остальных голосуют «Да» или «Нет». Если хотя бы один из голосующих скажет «Да», то игра завершается принятием ставки налога τ . Если оба игрока говорят «Нет», то игра продолжается на следующий день.

В этой динамической игре совершенное по подыграм равновесие Нэша [1] (СПРН) находится в явном виде, но при этом ответ получается в виде достаточно сложной формулы, к тому же «сенаторы» могут быть не в курсе, что такое СПРН. В связи с этим целью работы было проведение лабораторного эксперимента с добровольными участниками, чтобы выяснить, насколько их интуитивное поведение согласуется с найденным СПРН.

Эксперименты проводились в лаборатории экспериментальной экономики МФТИ и ВЦ РАН. Для организации экспериментов с помощью специализированной оболочки Z-tree (университет Цюриха, Швейцария [2]) была написана компьютерная программа. Участниками экспериментов были студенты МФТИ.

Поведение участников экспериментов сопоставлялось с теоретически найденным СПРН. Были выявлены как существенные отличия, так и качественная близость результатов экспериментов. В частности, при резком уменьшении коэффициента δ , согласно теоретически найденному СПРН, можно прогнозировать приближение ставки активного игрока к его идеалу при принятии решения в первый же день. Результаты эксперимента подтвердили этот прогноз на 90%.

Для моделирования эффекта сходимости к СПРН достаточно простого адаптивного поведения были проведены численные эксперименты с популяцией игроков-роботов. Обучение роботов происходило во время процесса многократного повторения игры. Изначально простая и незамысловатая стратегия обучения, как показали численные эксперименты, приводит к теоретическому СПРН, причём в довольно широком диапазоне параметров стратегии обучения.

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.
2. *Fischbacher U.* z-Tree: Zurich toolbox for ready-made economic experiments // *Experimental Economics*. — 2007. — P. 171–178.

УДК 519.833.2

Р.И. Яминов

yaminov@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Свойства модифицированного равновесия

Рассмотрим игру в нормальной форме $G = \{N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\}$, в которой множества чистых стратегий $C_i \subseteq R^k$ — непустые выпуклые компакты. Введём дополнительно семейство независимых непрерывных векторных случайных величин $\xi_{m_i}^{d_i}$ с дисперсией d_i и матожиданием m_i такое, что их распределения непрерывно зависят от дисперсии и матожидания.

Назовём модифицированными выигрышами игроков величины $\tilde{u}_i(a) = M u_i(a_1 + \xi_{m_1}^{d_1}, \dots, a_i, \dots, a_N + \xi_{m_N}^{d_N})$, где матожидание берётся по ξ_m^d .

Определение. Для игры в нормальной форме $G = \{N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\}$ модифицированной игрой будем называть игру $G_m^d = \{N, (C_i)_{i \in N}, (\tilde{u}_i)_{i \in N}\}$.

Определение. Профиль стратегий S будем называть модифицированным равновесием для игры G , если существуют равновесия Нэша $S(m, d) = (s_1(m, d), \dots, s_2(m, d))$ для игр G_m^d такие, что $\lim_{m \rightarrow 0, d \rightarrow 0} S(m, d) = S$.

Теорема 1. Если для игры $G = \{N, (C_i)_{i \in N}, (u_i)_{i \in N}\}$ для функции выигрыша $u_i(\cdot)$ каждого игрока выполнены условия

- 1) $u_i(\cdot)$ для $\forall x \in C$ либо непрерывна в точке x , либо полунепрерывна сверху;
- 2) функция $u_i(\cdot)$ такая, что для всех точек x , для любого $\varepsilon > 0$, найдётся $\tau \in C_i$: $u_i(\cdot)$ — непрерывна в точке (x_{-i}, τ) и $|u_i(x) - u_i(x_{-i}, \tau)| < \varepsilon$, то любое модифицированное равновесие в игре G является равновесием Нэша.

Пример. В игре $N = \{1; 2\}$, $a_i \in R$,

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} -(a_1^2 + a_2^2), & \text{если } a_1 \neq 1, a_2 \neq 0 \\ 1, & \text{если } a_1 = 1, a_2 = 0 \end{cases},$$

а $u_2(a_1, a_2) = -(a_1^2 + a_2^2)$ не выполнены условия предыдущей теоремы. В результате получаем:

— существует единственное равновесие Нэша: $a_1^* = 1, a_2^* = 0$,
 — существует единственное модифицированное равновесие (отличное от равновесия Нэша): $\tilde{a}_1 = 0, \tilde{a}_2 = 0$.

Теорема 3. Если для некоторого семейства ξ_m^d для каждой модифицированной игры (при любых m, d) существует равновесие Нэша, то тогда в данной игре существует модифицированное равновесие.

Теорема 4. Для следующего класса игр двух лиц: $N = \{1; 2\}$,

$$u_i(a) = \begin{cases} u_i^+(a), & \text{если } a_{-i} > g_i(a_i) \\ u_i^-(a), & \text{если } a_{-i} < g_i(a_i) \\ \max(u_i^+(a), u_i^-(a)), & \text{если } a_{-i} = g_i(a_i) \end{cases},$$

если выполнены все ниже перечисленные условия

- $u_i^+(a)$ и $u_i^-(a)$ непрерывные функции,
- $g_i(a_i)$ — дифференцируемая монотонная функция,
- $C_i = [a_i^{\min}, a_i^{\max}] \subset R$ — множество чистых стратегий игрока,
- $g_i'(a_i) \geq 0$,
- функция $g_i'(a_i) \cdot u_i^+(a_i, g_i(a_i))$ не убывает, $g_i'(a_i) \cdot u_i^-(a_i, g_i(a_i))$

не возрастает,

— выполнены неравенства

$$\frac{\partial u_i^+(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i} \geq 0, \quad \frac{\partial^2 u_i^+(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i \cdot \partial a_i} \leq 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial u_i^+(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i} \leq \frac{\partial u_i^+(a_i, g_i(a_i))}{\partial a_i}, \quad \frac{\partial u_i^-(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u_i^-(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i \cdot \partial a_i} \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\frac{\partial u_i^-(a_i, a_{-i} + \tau)}{\partial a_i} \leq \frac{\partial u_i^-(a_i, g_i(a_i))}{\partial a_i},$$

— для плотности вероятности $f_{\xi_m^d}(\tau)$ при $\tau > t$ выполнено

$$k(\tau) := \frac{f_{\xi_m^d}(\tau)}{f_{\xi_m^d}'(\tau)} < 0 \quad \text{и} \quad k'(\tau) > 0,$$

то в данной игре существует модифицированное равновесие.

Теорема 5. Рассмотрим игру «двойной аукцион» [1]:
 $N = \{1; 2\}$ $a_i \in [0; 1]$,

$$u_1(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 > a_2 \\ \frac{a_1 + a_2}{2}, & \text{если } a_1 \leq a_2 \end{cases},$$

а

$$u_2(a_1, a_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 > a_2 \\ 1 - \frac{a_1 + a_2}{2}, & \text{если } a_1 \leq a_2 \end{cases}.$$

Если ξ_m^d — нормальные случайные величины, то модифицированное равновесие существует и единственно.

Если $m_1 + m_2 = o(d_1)$, а $d_2 = k \cdot d_1$, где $1 - \frac{o(1)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}\right)} \leq k \leq 1 + \frac{o(1)}{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{d_1}}\right)}$, то тогда равновесие в модифицированной игре имеет следующий вид:

$$a_1 = \frac{1 - \sqrt{2d_1 \ln \sqrt{\frac{1}{2\pi d_1}}} - O(\sqrt{d_1})}{2},$$

$$a_2 = \frac{1 + \sqrt{2d_1 \ln \sqrt{\frac{1}{2\pi d_1}}} + O(\sqrt{d_1})}{2}.$$

В пределе получается модифицированное равновесие $a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}$.

Литература

1. *Меньшиков И.С.* Лекции по теории игр и экономическому моделированию. — М.: МЗ Пресс, 2007. — 208 с.

Секция математических основ управления

УДК 519.248

Е.В. Бурнаев^{1,2}, *Д.С. Никоненко*^{1,3}
drazil@list.ru, keyje@yandex.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

³ ООО «Яндекс»

Поиск момента разладки в потоке событий

За последние несколько лет существенно возросла потребность в решении ряда практических задач, таких, как автоматическое обнаружение неисправностей (разладок, сбоев и т. п.), обслуживание оборудования на основе автоматического контроля его состояния, обеспечение безопасности сложных технических и информационных систем (самолётов, судов, ракет, различных интернет-сервисов и т. д.), автоматический контроль качества выпускаемой продукции.

Основная черта вышеперечисленных задач состоит в том, что, по сути, все они сводятся к выявлению момента резкого изменения (разладки) некоторых характеристик рассматриваемого объекта на основе статистических данных о других характеристиках этого объекта.

Задача о разладке бывает двух видов: поиск разладки в режиме реального времени и апостериорный поиск разладки (поиск точки излома). Существует много методов обнаружения разладки для обеих постановок задачи ([1, 2, 3]). Все эти методы получены, вообще говоря, при разных вероятностных предположениях о процессе, порождающем данные, и обладают разными теоретическими свойствами, при этом методы содержат свободные параметры, которые ещё надо «настроить» по обучающей выборке.

Таким образом, для реального применения методов скорейшего обнаружения разладки в заданном потоке событий необходимо уметь

выбрать наилучший в некотором смысле для этого потока событий метод обнаружения, а также настроить параметры метода. Следовательно, возникает задача автоматизации построения системы обнаружения разладки, позволяющая автоматически генерировать процедуры обнаружения разладки по данным, размеченным экспертом.

Предлагаемый в работе метод создания такой системы состоит из следующих шагов.

1. Создается обучающая выборка, размеченная экспертом. В данной выборке для каждого потока известно есть разладка или нет, и если есть, то в какой момент времени она произошла.

2. Определяется набор методов, позволяющих определить разладку в потоке заданного типа.

3. Каждый из методов определения разладки «настраивается» по обучающей выборке: определяются параметры метода, для которых вероятность правильного определения разладки больше заданного значения, а ошибка определения момента разладки минимальна.

4. Обнаружение разладки в новых данных проводится на основе оптимальным образом сконструированного ансамбля методов обнаружения разладки, «настроенных» на предыдущем шаге.

Разработанная методика была успешно применена при построении системы обнаружения разладки в работе интернет-сервиса. Построенная система обладает следующие характеристики: вероятность правильного определения факта о наличии/отсутствии разладки имеет порядок 93%, а средняя ошибка определения момента разладки имеет порядок 10%.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука. Физматлит, 1976. — 272 с.

2. *Клиниге Н., Телькснис Л.* Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов (обзор) // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 10. — С. 5–56.

3. *Никифоров И.В.* Последовательное обнаружение изменения свойств временных рядов. — М.: Наука, 1983.

УДК 681.5.015

А.Н. Грачев, А.В. Лукашенко, А.А. Фомичев
 ga150161@tsu.tula.ru, lukashen@uic.tula.ru, fom@uic.tula.ru

Тулский государственный университет

Моделирование и идентификация электротермических процессов в физическом базисе для целей управления

Электротермические процессы (ЭТП) широко применяются в различных отраслях промышленности для получения ферросплавов, стали, фосфора, карбидов и других материалов. Сложность получения текущей информации о преобразовании и распределении энергии в ЭТП, о внутренних, недоступных для непосредственного контроля параметрах и переменных обусловлена высокой температурой и агрессивной средой в зонах плавления, невозможностью прямого измерения электроэнергетических и технологических характеристик. Существующие методы и системы контроля позволяют получать информацию только о внешних интегральных энергетических показателях, что явно не достаточно для организации качественного управления.

Предлагается на основе системного подхода строить обобщённую иерархическую математическую модель ЭТП для целей идентификации и управления. Основными компонентами такой обобщённой модели являются модели электроэнергетических и технологических процессов в физическом базисе, разделение на которые стало возможно благодаря их существенной разноинерционности. При этом модели электроэнергетических процессов предлагается строить на базе нелинейных схем замещения токопроводящей среды электропечей, а модели технологических процессов — с использованием методов динамического моделирования в пространстве состояний.

Электроэнергетические процессы представляются в виде схемных моделей, образованных соединением простейших элементов как линейных, так и нелинейных. Внешним проявлением параметров и характеристик отдельных элементов являются временные функции и спектральный состав токов и напряжений на электродах, через которые осуществляется подвод электрической энергии. Наличие нели-

нейности в цепи приводит к несинусоидальности рабочих токов и напряжений. Линейные и нелинейные элементы цепи проявляют свои свойства в форме периодических функций мгновенных значений тока и напряжения в соотношении их спектральных составляющих. Это позволяет использовать спектральные составляющие в качестве источника информации при идентификации нелинейных схемных моделей [1].

Для возможности практического решения задачи идентификации проводится параметризация нелинейных характеристик. При этом они представляются в виде разложения по известным базисным функциям $\varphi_k(x)$ на основе степенных функций, функций Лежандра и Чебышева с неизвестными коэффициентами r_k и l_k . Уравнение одномерной модели принимает вид [1]:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k \frac{d\varphi_k(x)}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} r_k \varphi_k(x) = y(t).$$

Задача идентификации нелинейных характеристик становится параметрической и сводится к определению неизвестных параметров r_k и l_k . Показано, что параметризованные модели при периодических входных и выходных сигналах обладают свойством идентифицируемости. Это даёт возможность однозначного определения параметров и характеристик схемных моделей.

Модель технологических процессов в физическом базисе с точностью до неизвестного вектора параметров θ формируется в пространстве состояний на основе априорной информации об объекте с использованием известных законов физики, химии, электротехники и т. п.:

$$x(k+1) = \Phi(\theta)x(k) + \Gamma(\theta)u(k) + \omega(k); \quad (1)$$

$$y(k) = H(\theta)x(k) + v(k), \quad (2)$$

где $x(k) \in R^n$, $u(k) \in R^p$, $y(k) \in R^m$, $\Phi \in R^{n \times n}$, $\Gamma \in R^{n \times p}$, $H \in R^{m \times n}$ — векторы и матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно; $\omega(k) \in R^n$, $v(k) \in R^m$ — белые случайные последовательности с нулевыми математическими ожиданиями и известными ковариационными матрицами: V_ω , V_v .

Проверка структурной идентифицируемости детерминированной части модели (1)–(2) осложняется высокими размерностями векторов состояния, управления и наблюдения, характерными для электротермических объектов. Наиболее эффективным и универсальным методом анализа структурной идентифицируемости линейных моделей в

пространстве состояний является метод преобразований подобия, на основе которого была разработана и реализована в математическом пакете символьной алгебры Maple полностью формализованная методика [2].

В качестве процедуры совместного оценивания параметров и состояния модели (1)–(2) с учётом её высокого порядка предлагается использовать высокоэффективные в вычислительном смысле итерационные алгоритмы [3] на основе известных методов нелинейной фильтрации, таких, как метод инвариантного погружения, расширенный или ансцентный фильтры Калмана и т. п. При этом процедура оценивания производит n вычислительных итераций, обрабатывая каждое полученное в момент времени k измерение. На каждой такой итерации оценивается расширенный вектор состояния, включающий в себя поочередно все неизвестные элементы строк матриц состояния и управления, а также столбцов матрицы наблюдения. После завершения каждой итерации производится обновление матриц параметров: состояния и управления — по строкам, наблюдения — по столбцам. В качестве текущей оценки вектора состояния $x(k)$ берется оценка, полученная на последней итерации.

Литература

1. Лукашенко А.В., Фомичев А.А. Методы идентификации нелинейных схемных моделей электродуговых процессов. — Тула: ТулГУ, 2004. — 228 с.
2. Грачев А.Н., Фомичев А.А., Шурыгин С.В. Проверка параметрической идентифицируемости линейных динамических моделей высокого порядка // Труды 50-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2007. — Т. 2. — С. 149–151.
3. Грачев А.Н., Шурыгин С.В. Методика синтеза итерационных алгоритмов совместного оценивания параметров и состояния линейных дискретных систем // Труды VII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08, 2008. — С. 204–219.

УДК 681.5.07

А.Н. Грачев, С.В. Шурыгин, С.И. Агафонов
ga150161@tsu.tula.ru, agafonov.sergey@gmail.com

Тульский государственный университет

Сравнение двух методов проверки структурной идентифицируемости линейных моделей в пространстве состояний

Одним из наиболее распространенных способов построения математических моделей различных объектов и технологических процессов для целей управления является их экспериментальная идентификация, которая обычно состоит из двух этапов.

На первом этапе, называемом структурной идентификацией, исходя из имеющейся априорной информации, производится выбор структуры модели задаваемой уравнениями в пространстве состояний следующего вида:

$$M(\theta) : \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t), \\ y(t) = C(\theta)x(t); \quad x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

где $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times l}$ и $C \in R^{m \times n}$ — матрицы состояния, управления и наблюдения соответственно, $x \in R^n$ — вектор состояния, $u \in R^l$ — вектор управления, $y \in R^m$ — вектор наблюдения, $\theta \in \Omega \subset R^q$ — вектор неизвестных параметров, $t \in R^+$ — время.

Такая структура содержит неизвестные параметры θ и фактически описывает множество моделей, в котором каждому конкретному значению параметров соответствует некоторая модель.

На втором этапе, называемом параметрической идентификацией, осуществляется выбор оптимальной модели из данного множества моделей, функция отклика которой наиболее близка к реально измеренной функции отклика объекта.

Существенной проблемой на этом этапе может стать неидентифицируемость параметров θ , означающая, по сути, неединственность выбора такой оптимальной модели. Очевидно, структурная неидентифицируемость связана с отсутствием согласия между сложностью заданной априорно структуры и количеством информации, которую

можно в принципе извлечь из эксперимента [1]. Таким образом, задачу проверки структурной идентифицируемости можно рассматривать как важнейшую завершающую задачу этапа структурной идентификации.

Наиболее эффективным методом анализа структурной идентифицируемости моделей вида (1) является метод преобразований подобия. Согласно такому методу предполагается, что существует некоторая модель, имеющая структуру, аналогичную модели (1), и неразличимая с ней по входу и выходу. Известно, что в предположении управляемости и наблюдаемости этих моделей их векторы состояния x и x^* связаны невырожденным преобразованием подобия: $x^* = Tx$, где $T \in \{T : \det T \neq 0\}$. Причём матрица преобразований T и вектор параметров θ^* данной модели определяются следующей системой нелинейных матричных уравнений:

$$\begin{cases} B(\theta^*) - TB(\theta) = 0; \\ C(\theta^*)T - C(\theta) = 0; \\ A(\theta^*)T - TA(\theta) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Очевидно, что число решений системы (2) относительно переменных (T, θ^*) определяет число таких моделей, неразличимых с исходной моделью (1). Таким образом, если система (2) имеет только единственное тривиальное решение ($T = I, \theta^* = \theta$), то рассматриваемая модельная структура является глобально идентифицируемой. Если имеется континуальное множество решений, то модельная структура глобально и локально неидентифицируема. Наконец, если имеется несколько решений, являющихся изолированными точками в параметрическом пространстве, то модельная структура идентифицируема локально, но глобально неидентифицируема.

Существуют два различных подхода к анализу структурной идентифицируемости моделей вида (1) методом преобразований подобия [1].

Первый подход заключается в непосредственном решении системы уравнений (2). Однако такое решение, например, средствами математического пакета Maple при размерности $n > 4$, как правило, бывает невозможно [2]. Объясняется это тем, что Maple решает нелинейную систему уравнений (2) в символьном виде универсальным методом с использованием базисов Грёбнера, что требует астрономически большого количества оперативной памяти даже при относительно небольших размерностях.

Второй подход основывается на применении ранговых критериев идентифицируемости [1], позволяющих установить факт наличия у модели (1) свойств глобальной или локальной идентифицируемости без непосредственного решения системы уравнений (2). На первый взгляд второй подход кажется более эффективным и удобным с точки зрения автоматизации процедуры проверки структурной идентифицируемости [3]. Однако и в этом случае возникают серьёзные проблемы вычислительного характера особенно при факторизации в символьном виде детерминанта матрицы глобальной идентифицируемости [1], которая, как правило, имеет очень высокую размерность. Использование в данной ситуации разложения Бине–Коши [1] также не всегда позволяет решить проблему, так как при определённых условиях такое разложение будет содержать астрономически большое количество членов.

В докладе на простом примере системы третьего порядка, а также на модели реального объекта [4] показаны достоинства и недостатки обоих подходов и сделан вывод о необходимости алгоритмизации метода ручного решения системы уравнений (2), учитывающего особенности их структуры.

Литература

1. Авдеев Т.В., Горский В.Г. Построение динамических моделей в пространстве состояний. Анализ структурной идентифицируемости. — Новосибирск: НГТУ, 2007. — 285 с.
2. Van den Hof J.M. Structural identifiability from input-output observations. Report BS-R9514, CWI. — Amsterdam, 1995. — 35 p.
3. Грачев А.Н., Фомичев А.А., Шурыгин С.В. Проверка параметрической идентифицируемости линейных динамических моделей высокого порядка // Труды 50-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук». — 2007. — Т. 2. — С. 149–151.
4. Грачев А.Н., Шурыгин С.В., Агафонов С.И. Анализ параметрической идентифицируемости модели фосфорной рудно-термической электропечи // Труды XXII Международной научной конференции «Математические методы в технике и технологиях (ММТТ-22)». — 2009. — Т. 10. — С. 183–186.

УДК 519.175.3

М.И. Исаев

Adept42@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)**Асимптотическое число эйлеровых циклов
в полном двудольном графе**

Полным двудольным графом D_{2n} называется граф из $2n$ вершин, разбитых на две компоненты из n вершин каждая. Ребрами соединены любые две вершины из разных компонент. Вершины из одной компоненты несмежные.

Эйлеровым циклом называется цикл, в котором присутствуют все ребра графа ровно один раз. Два эйлеровых цикла считаются одинаковыми, если они переходят друг в друга при циклическом сдвиге.

Турниром называется ориентированный граф, в котором любые две вершины соединены не более одним ребром. Турнир называется регулярным, если для любой вершины количество входящих рёбер равно количеству выходящих. Каждый эйлеров путь индуцирует в D_{2n} (полный двудольный граф) регулярный турнир, если взять ориентацию на каждом ребре в соответствии с направлением обхода этого ребра в эйлеровом пути.

Очевидно, $Eul(D_{2n}) = 0$ для нечетных n . Будет определено асимптотическое значение $Eul(D_{2n})$ для $n \rightarrow \infty$ и четных n . Далее, используя формулу Коши, будет получено $Eul(D_{2n})$ в виде $2n$ -мерного интеграла. Затем будет получена асимптотическая оценка значения интеграла.

Деревом, направленным в вершину v , называется связный ориентированный граф T такой, что для вершины $v \in VT$ все ребра входящие, а для любой другой вершины ровно одно выходящее ребро. Другими словами, T — это дерево, у которого все ребра направлены в сторону v .

Пусть D — связный ориентированный граф с n вершинами и пусть $v \in VD$. Остовным деревом, направленным в вершину v , называется подграф с n вершинами, который является деревом, направленным в вершину v .

Далее следует знаменитая теорема, которая иногда называется BEST THEOREM (Bruijn, van Aardenne-Ehrenfest [2], Smith and Tutte [3]).

Теорема 1. Пусть D — ориентированный граф с вершинами v_0, v_1, \dots, v_n . Допустим, что существуют такие числа d_0, d_1, \dots, d_n , что для любого $1 \leq i \leq n$ количество входящих рёбер и количество выходящих рёбер вершины v_i равны d_i . Пусть $t_i = t_i(D)$ — число остовных деревьев D , направленных в v_i . Тогда t_i не зависит от i , и

$$Eul(D) = t_i \prod_{j=1}^n (d_j - 1)!$$

Пусть T_n — множество всех деревьев в D_{2n} . При выбранной вершине v_{2n} существует единственная ориентация рёбер, чтобы получилось дерево, направленное в вершину v_{2n} . Для $T \in T_n$ определим $RT(T)$ -число регулярных турниров в D_{2n} , которые содержат T .

Из теоремы 1 для регулярного турнира R и чётного n :

$$Eul(R) = (n/2 - 1)!^{2n} t_n(R).$$

Пусть R_n — множество всех регулярных турниров в D_{2n} . Тогда

$$Eul(D_{2n}) = \sum_{R \in R_n} Eul(R) = (n/2 - 1)!^{2n} \sum_{R \in R_n} t_n(R)$$

Преобразовав сумму, получаем

$$Eul(D_{2n}) = (n/2 - 1)!^{2n} \sum_{T \in T_n} RT(T).$$

Для $n \geq 1$ и $x \geq 0$ определим $U_n(x) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid |x_i| < x \text{ при всех } i\}$. Значение $RT(T)$ равно в точности константе в разложении:

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} (x_j^{-1} x_k + x_k^{-1} x_j) \prod_{jk \in ET} \frac{x_j x_k^{-1}}{(x_j^{-1} x_k + x_k^{-1} x_j)}.$$

Эту константу получим с помощью теоремы Коши, используя единичный круг как контур для каждой переменной. Сделав замену $x_j = e^{i\theta_j}$, для каждого j получаем

$$Eul(D_{2n}) = (n/2 - 1)!^{2n} 2^{n^2 - 2n + 1} \pi^{-2n} S,$$

где

$$S = \int_{U_{2n}(\pi/2)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \cos \Delta_{jk} \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \prod_{jk \in ET} (1 + i \tan \Delta_{jk}) d\theta.$$

Здесь $\Delta_{jk} = \theta_j - \theta_k$, и используется тот факт, что подинтегральная функция остаётся неизменной при замене $\theta_j \rightarrow \theta_j + \pi$ для четных n .

Далее интеграл будет оценен первым приближением в области, которая будет давать асимптотически наибольший вклад.

Пусть $V_0 = \{\theta \in U_{2n}(\pi/2) \mid |\Delta_{j2n}| \leq n^{-1/2+\varepsilon} \text{ для } j = 1, \dots, 2n-1\}$ и пусть S_0 — вклад в S при интегрировании. Поскольку подинтегральная функция инвариантна относительно одновременного сдвига всех θ_j на один угол, мы можем взять $\theta_{2n} = 0$ и разделить на π .

Итак, имеем

$$S_0 = \pi \cdot \int_{U_{2n-1}(n^{-1/2+\varepsilon})} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \cos \Delta_{jk} \times \\ \times \sum_{T \in \mathcal{T}_n} \prod_{jk \in ET} (1 + i \tan \Delta_{jk}) d\theta',$$

где $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n-1})$ и $\theta_{2n} = 0$.

Сумма по \mathcal{T}_n в интеграле может быть посчитано с помощью определителя, как это показал Tutte [3].

Теорема 2. Пусть w_{jk} ($1 \leq j < k \leq n$, $j \neq k$) заданы произвольно. Определим $n \times n$ -матрицу A следующим образом:

$$A_{jk} = \begin{cases} -w_{jk}, \text{ если } k \neq j, \\ \sum_{r \neq j} w_{jr}, \text{ если } k = j, \end{cases}$$

где сумма берется по $1 \leq r \leq n$, $r \neq j$. Для любого r $1 \leq r \leq n$, $r \neq j$, пусть M_r — минор, образованный удалением строки и столбца под номером r . Тогда

$$\det(M_r) = \sum_T \prod_{jk \in ET} w_{jk},$$

где сумма берется по всем деревьям T с $VT = \{1, 2, \dots, n\}$, направленным в вершину r .

Лемма 2. Пусть $\theta \in U_{2n-1}(n^{-1/2+\varepsilon})$,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_n} \prod_{jk \in ET} (1 + i \tan \Delta_{jk}) = \\ = n^{2n-1} \exp\left(\frac{1}{2n} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \Delta_{jk}^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2n} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \theta_j^- \sum_{n+1 \leq k \leq 2n} \theta_k^2 + O(n^{-1/2+3\varepsilon}) \right) \right).$$

Теорема 3.

$$S_0 = \pi^{n+1/2} n^{n-1} 2^{n-1/2} (1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})).$$

Теорема 4.

$$Eul(D_{2n}) = (n/2 - 1)! 2^n 2^{n^2-n+1/2} \pi^{-n+1/2} n^{n-1} (1 + O(n^{-1/2+\varepsilon})).$$

Литература

1. McKay D., Robinson W. Asymptotic enumeration of eulerian circuits in the complete graph // *Combinatorica*. — 1995. — V. 10, N. 4. — P. 367–377.
2. van Aardenne-Ehrenfest T., de Bruijn N.G. Circuits and trees in oriented linear graphs // *Simon Stevin*. — 1951. — V. 28. — P. 203–217.
3. Tutte W.T. The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1948. — V. 44. — P. 463–482.

УДК 519.6

А.В. Колногоров

kolnogorov53@mail.ru

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого

О теоретико-игровом подходе к асимптотической оценке минимаксного риска в стационарной среде

Рассматривается задача адаптивного управления в стационарной случайной среде [1], известная также как задача о двуруком бандите [2], в следующей постановке. Пусть ξ_n , $n = 1, \dots, N$, есть управляемый случайный процесс, значения которого интерпретируются как доходы, зависят только от выбираемых в текущие моменты времени вариантов y_n и имеют нормальные распределения с плотностями

$$f(x|m_\ell) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-(x - m_\ell)^2/2),$$

если $y_n = \ell$ ($\ell = 1, 2$). Такая среда полностью описывается векторным параметром $\theta = (m_1, m_2)$. Предполагается, что известно только допустимое множество значений параметра $\Theta = \{(m_1, m_2) : |m_1 - m_2| \leq 2c_1, |m_1 + m_2| \leq 2c_2\}$, где $c_1, c_2 < \infty$. Для управления используется стратегия σ , которая в момент времени n является функцией предыстории процесса, то есть полученных откликов $x^{n-1} = x_1, \dots, x_{n-1}$ на выбранные варианты $y^{n-1} = y_1, \dots, y_{n-1}$. Множество стратегий обозначим Σ .

Сформулируем минимаксную и байесовскую цели управления. Если бы параметр θ был известен, то всегда следовало бы применять вариант, которому соответствует большая из величин m_1, m_2 , и полный ожидаемый доход равен в этом случае $N(m_1 \vee m_2)$. Если же параметр неизвестен, то функция

$$L_N(\sigma, \theta) = E_{\sigma, \theta} \left(\sum_{n=1}^N ((m_1 \vee m_2) - \xi_n) \right)$$

характеризует потери ожидаемого дохода вследствие неполноты информации. Здесь $E_{\sigma, \theta}$ обозначает математическое ожидание по мере, порожденной стратегией σ и параметром θ . При минимаксном подходе

де величина максимальных потерь на множестве параметров Θ минимизируется по множеству стратегий Σ , соответствующая величина

$$R_N^M(\Theta) = \inf_{\Sigma} \sup_{\Theta} L_N(\sigma, \theta)$$

называется минимаксным риском, а обеспечивающая её значение стратегия — минимаксной стратегией. При байесовском подходе следует минимизировать значение функции потерь, усреднённое относительно априорного распределения Λ . Соответствующее значение

$$R_N(\Lambda) = \inf_{\Sigma} \int_{\Theta} L_N(\sigma, \theta) \Lambda(d\theta)$$

называется байесовским риском, обеспечивающая её стратегия — байесовской. Связь между минимаксным и байесовским подходами устанавливает основная теорема теории игр, которая в нашем случае имеет вид теоремы, представленной ниже.

Теорема. На множествах Σ, Θ можно определить метрики $\rho_{\Sigma}, \rho_{\Theta}$, которые превращают их в компактные метрические пространства. Функция потерь $L_N(\sigma, \theta)$ непрерывна по σ, θ в этих метриках. Множество Σ содержит смешанные стратегии. В этом случае минимаксная стратегия σ^0 существует и совпадает с байесовской на наихудшем априорном распределении Λ^0 , то есть

$$R_N^M(\Theta) = \sup_{\Theta} L_N(\sigma^0, \theta) = R_N(\Lambda^0) = \sup_{\{\Lambda\}} R_N(\Lambda).$$

Кроме того, априорные распределения можно сколь угодно точно приблизить распределениями, имеющими плотность. Байесовский риск является непрерывной и выпуклой вверх функцией априорного распределения, то есть для любых плотностей λ_1, λ_2 и положительных чисел α_1, α_2 , таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, справедливо неравенство $R_N(\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2) \geq \alpha_1 R_N(\lambda_1) + \alpha_2 R_N(\lambda_2)$.

Нормальная плотность распределения доходов позволяет выделить такие преобразования λ априорной плотности распределения λ , которые не меняют байесовский риск, то есть $R_N(\lambda) = R_N(\tilde{\lambda})$. Ими являются: $\tilde{\lambda}(m_1, m_2) = \lambda(m_2, m_1)$ и $\tilde{\lambda}(m_1, m_2) = \lambda(m_1 + x, m_2 + x)$ (для любых m_1, m_2 и любого фиксированного x).

Плотности распределения из последовательности λ_N , для которых выполнено условие $R_N(\lambda_N) \sim \sup_{\{\lambda\}} R_N(\lambda)$, назовем асимптотически наихудшими. Если $\lambda^0(m_1, m_2)$ — плотность наихудшего априорного распределения, то (с учётом выпуклости байесовского риска)

$\lambda_N(m_1, m_2)$ можно также взять в виде

$$(4a)^{-1} \int_{-a}^a (\lambda^0(m_1 + x, m_2 + x) + \lambda^0(m_2 + x, m_1 + x)) dx,$$

при этом будем считать, что $a \gg c_2$. С учётом непрерывности байесовского риска такая плотность может быть сколь угодно точно приближена симметрической асимптотически однородной плотностью $\lambda_N(m_1, m_2) = \rho_N(|m_1 - m_2|) \cdot \nu_a(m_1 + m_2)$, где $\nu_a(\cdot)$ — плотность равномерного распределения на отрезке $|m_1 + m_2| \leq 2a$ для произвольного достаточно большого $a \gg c_2$.

Что касается множителя $\rho_N(|m_1 - m_2|)$, то результаты численного расчётов [3] показывают, что он сосредоточен на множестве параметров вида $\{\theta : m_1 - m_2 = \pm dN^{-1/2}\}$. Это подтверждает представленную в [4] асимптотическую оценку минимаксного риска $R_N^M(\Theta) \cdot N^{1/2}$.

Литература

1. *Срагович В.Г.* Адаптивное управление. — М.: Наука, 1981. — 384 с.
2. *Berry D.A., Fristedt B.* Bandit Problems: Sequential Allocation of Experiments. — London, New York: Chapman and Hall, 1985. — 275 p.
3. *Колногоров А.В.* Асимптотические оценки байесовского риска для одного класса стационарных сред // Третья международная конференция по проблемам управления. Пленарные доклады и избранные труды. — М.: ИПУ РАН. — 2006. — С. 241–248.
4. *Vogel W.* An asymptotic minimax theorem for the two-armed bandit problem // Ann. Math. Stat. — 1960. — V. 31. — P. 444–451.

УДК 519.248

Е.В. Бурнаев^{1,2}, *Д.С. Никоненко*^{1,3}
drazil@list.ru, keyje@yandex.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
³ ООО «Яндекс»

Предсказание моментов появления событий в потоке событий

Рассмотрим некоторые примеры потоков событий, встречающиеся на практике.

1. События в базах данных — добавление, удаление или изменение записей.
2. Модель страхового фонда — поступление средств от предприятий, страховые выплаты, выделение средств на социальные программы.
3. Брокерское кредитование — процесс поступления заявок от клиентов, выдача кредитов, процесс использования заемных средств, погашение кредита.

Как видно из примеров, потоки событий в каком-либо виде можно встретить в любой области человеческой деятельности. Изучение потоков событий помогает лучше осознать происходящие процессы, оптимизировать их и научиться ими управлять. Таким образом, актуальна задача моделирования потока событий, в частности, предсказания момента появления нового события.

В [1, 2] для моделирования активности событий используются лог-нормальное и двойное лог-нормальное распределения соответственно.

В [3] моделирование процесса появления новых событий проводится на основе конечного автомата, состояния которого соответствуют различной интенсивности появления событий.

Указанные методы являются параметрическими, поэтому точность предсказания момента появления нового события существенно зависит от достоверности вероятностных предположений о процессе, порождающем данные.

Авторами разработан непараметрический метод, позволяющий оценить момент появления нового событий t^* по имеющемуся кластеру близких в некотором смысле потоков событий.

Предположим, что мы хотим оценить момент появления нового события t^* после момента времени T (текущий момент времени) для некоторого заданного потока событий. Предложенный алгоритм состоит из следующих шагов.

1. Кластеризуем обучающую выборку потоков событий и подбираем кластер потоков событий, близких в некотором смысле к заданному потоку событий.

2. Пусть размер кластера потоков событий, похожих на данный поток событий, равен Q . Обозначим через W количество потоков ($W \leq Q$) из кластера, в которых после момента времени T появились новые события. Соответственно, у $Q-W$ потоков из кластера после времени T новых событий не появилось. Обозначим через t_1, \dots, t_W — моменты появления у каждого из W -потоков первых после времени T событий (на каждый поток по одному значению). Упорядочим эти моменты времени по возрастанию, получим вариационный ряд $t_{(1)}, \dots, t_{(W)}$.

3. Пусть для заданного параметра $\alpha \in (0,1)$ (параметр алгоритма) индекс $D = [\alpha Q]$, где — целая часть числа. Определим t^* по формуле

$$t^* = \begin{cases} t_{(D)}, D \leq W, \\ \infty, D > W. \end{cases} .$$

Если оказалось, что $t^* = \infty$, то считаем, что у заданного потока после момента времени T события больше не будут появляться.

Результаты работы предложенного метода сравнивались с детерминированным алгоритмом, используемым в некоторых практических приложениях. Суть детерминированного метода в следующем: для заданного потока и момента времени T проверяем появление нового события через промежутки времени: T_1, T_2, \dots, T_K . Если после последнего шага событие не появилось, то считаем, что у заданного потока после момента времени T события больше не будут появляться.

При работе с реальными данными удалось подобрать такие параметры метода, для которых задержка в определении момента появления нового события предложенным алгоритмом в 4–6 раз меньше задержки в определении момента появления нового события детерминированным алгоритмом.

Литература

1. *Kalterbrunner A., Gomez V., Moghnieh A. [et al.]*. Homogeneous temporal activity patterns in a large scale online communication space. In Proceedings of the BIS 2007 Workshop on Social Aspects of the Web (SAW 2007). — Poznan, Poland, 2007.

2. *Kalterbrunner A., Gomez V., Lopez V.* Description and Prediction on Slashdot Activity. In Proceedings of the 2007 Latin American Web Conference (LA-WEB 2007). — Santiago, Chile October 31–November 02 2007. — s.

3. *Araujo L., Merelo J.J.* A Genetic Algorithm for Dynamic Modelling and Prediction of Activity in Document Streams. In Genetic and Evolutionary Computation Conference. — London, UK, 2007.

УДК 519.85

А.А. Орлов

sashaorlov@gmail.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О численных методах решения задач полуопределённого программирования и примерах задач, для которых они являются неэффективными

Задачи полуопределённого программирования (SDP) возникают в результате обобщения задач линейного программирования (LP) на класс матричных переменных. Многие ключевые результаты, справедливые для задач LP, имеют аналоги для задач SDP. В частности, известные методы внутренней точки могут быть модифицированы для применения в задачах с матричными переменными.

Различают прямую:

$$\inf_X \{Tr(C \cdot X) | Tr(A_i \cdot X) = b_i, (i = 1, \dots, m), X \in S_+^n\}$$

и двойственную:

$$\sup_X \{b^T \cdot y \mid \sum_{i=1}^m y_i \cdot A_i + S = C, S \in S_+^n, y \in R^m\}$$

задачи SDP. Здесь симметричные матрицы A_i, S, C , а также числа b_i являются параметрами задачи.

Теоретическому изучению задач SDP и численным методам их решения в последнее время уделяется огромное внимание, в основном за рубежом. Связано это с тем, что задачи SDP имеют важные приложения в комбинаторной оптимизации, теории квазивыпуклого программирования и теории управления системами. К примеру, с помощью линейной релаксации могут быть получены эффективные приближённые способы решения задач MAX-CUT и MAX-SAT и всевозможных их модификаций.

Важной особенностью задач SDP является то, что методы внутренней точки позволяют получать приближённые решения этих задач с заданной точностью за полиномиальное время.

Ключевой результат, позволяющий строить численные методы решения задач SDP, состоит в том, что оптимальные решения прямой и двойственной задач SDP должны удовлетворять системе равенств [1]:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A_i \cdot X) &= b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \sum_{i=1}^m y_i \cdot A_i + S &= C, \\ X \cdot S &= 0. \end{aligned}$$

В настоящее время существует большое количество методов, которые позволяют численно решать данную систему с помощью последовательного движения вдоль так называемого центрального пути [1]. Все эти методы сталкиваются с существенной проблемой симметризации матрицы, задающей оптимальное направление на каждом шаге. Способы решения проблемы симметризации меняются от метода к методу и позволяют весьма эффективно численно искать решение во многих практических задачах. Однако в недавнее время в литературе появились примеры, показывающие, что даже для относительно простых задач SDP данная проблема может привести к тому, что стандартные алгоритмы будут сходиться к не оптимальному решению [2].

Литература

1. *de Klerk Etienne*. Aspects of Semidefinite Programming // Kluwer Academic Publishers. — 2004. — P. 21–58.
2. *Muramatsu M., Vanderbei R.* Primal-dual affine-scaling algorithms fail for semidefinite programming // Mathematics Subject Classification. — 2006.

УДК 517.9

М.С. Соболев

sobolev@competentum.ru

ООО «Компетентум Про»

Автоматные модели вычислений

Понятие вычисляемой функции занимает одно из центральных мест в теории алгоритмов. Интуитивно она определяется как функция, значения которой возможно получить при помощи некоторого алгоритма. Определенные классы вычисляемых функций могут быть получены при помощи вычислительных моделей (ВМ). Эти модели могут быть классифицированы по их вычислительным возможностям [1].

Основными из существующих ВМ являются (в порядке увеличения общности): конечный автомат, автомат с магазинной памятью и машина Тьюринга (МТ).

В данной работе приведён краткий обзор этих ВМ и введена концепция X -машины как обобщающей модели, эквивалентной по своим вычисляющим возможностям машине Тьюринга.

Определение X -машины расширяет определения КА и МП-автомата, добавляя память и выходную строку [2]. Как будет показано ниже, это существенно расширяет возможности X -машин по сравнению с этими автоматами.

Будет доказано следующее утверждение [3].

Теорема. Пусть Σ и Γ — два конечных алфавита, а $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ — частичная функция, вычисляемая МТ. Тогда существует X -машина, вычисляющая f .

Таким образом, X -машины представляют собой логическое усложнение концепций КА и МП-автоматов, эквивалентное по своим вычислительным возможностям машинам Тьюринга. К достоинствам X -машин по отношению к машинам Тьюринга можно отнести большую гибкость при моделировании реальных систем.

Литература

1. *Серебряков В.И.* Лекции по конструированию компиляторов. — М.: МГУ, 1997. — 171 с.
2. *Eilenberg S.* Automata, Languages and Machines. — V. A. — Academic Press, 1974.
3. *Соболев М.С.* Описание больших систем при помощи X -машин. Моделирование и обработка информации. — М.: МФТИ, 2008. — С. 236–245.

Секция математического моделирования и вычислительного эксперимента

УДК 519.632.4

П.А. Белов

pavelbelov@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный университет

Вычисление амплитуды развала в модельной задаче трёх тел

Работа посвящена численному исследованию граничной задачи, моделирующей трёхчастичный процесс рассеяния частицы на связанной паре частиц с последующим развалом пары. Данная задача возникает после разделения переменных в дифференциальном уравнении

$$(-\Delta + V(x) - E)\psi(X) = -V(x)(P^+ + P^-)\psi(X) \quad (1)$$

для компоненты волновой функции Фаддеева [1], где P^\pm — оператор циклической перестановки частиц. Исследуемая модельная задача, получающаяся из уравнения (1) после проецирования на состояния с нулевым орбитальным моментом во всех парах трёхчастичной системы, имеет вид [2]:

$$(-\Delta_{\rho,\theta} + V(\rho \cos \theta) - E)\psi(\rho,\theta) = Q(\rho,\theta). \quad (2)$$

Здесь $\Delta_{\rho,\theta} \equiv \partial_\rho^2 + (2\rho)^{-2} + \rho^{-2}\partial_\theta^2$. Асимптотические граничные условия при $\rho \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \psi(\rho,\theta) \sim \rho^{1/2}\varphi(x) (\sin qy + a_0(q) \exp i qy) + \\ + A(E,\theta) \exp i\sqrt{E}\rho, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $q^2 = E - \varepsilon$ вместе с нулевыми условиями: $\psi(\rho, 0) = \psi(\rho, \pi/2) = 0$ формируют граничную задачу в первом квадранте. Волновая функция связанной пары частиц $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(-\partial_x^2 + V(x)) \varphi(x) = \varepsilon \varphi(x). \quad (4)$$

Предполагается, что существует только одно квадратично-интегрируемое решение уравнения (4) с $\varepsilon < 0$. Функции $a_0(q)$ и $A(E, \theta)$ являются амплитудами упругого рассеяния и компонентой Фаддеева амплитуды развала соответственно. Асимптотическое представление (3) эквивалентно при $\rho \rightarrow \infty$ следующему уравнению:

$$\psi(\rho, \theta) \sim \varphi_0(\rho, \theta) (\sin q\rho + a_0(q) \exp iq\rho) + A(E, \theta, \rho) \exp i\sqrt{E}\rho,$$

где

$$A(E, \theta, \rho) = \sum_{k \geq 1} a_k(E) \varphi_k(\rho, \theta), \quad (5)$$

$a_k(\rho, \theta)$ — собственные функции оператора $-\rho^{-2} \partial_\theta^2 + V(\rho \cos \theta)$. Искомая амплитуда $A(E, \theta)$ даётся пределом с учётом $\varphi_k(\rho, \theta) \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 2k\theta$, $k = 1, 2, \dots$:

$$A(E, \theta) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(E, \theta, \rho) = \sum_{k \geq 1} a_k(E) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin 2k\theta. \quad (6)$$

Модель (2) фиксируется выбором потенциала Баргманна в качестве V и модельного источника в виде $Q = -V(x) \sqrt{\rho} \frac{\sqrt{3/4xy \exp(i\sqrt{E}y)}}{(\sqrt{3/4y+2})^{5/2}}$ [2].

Уравнение Шредингера (4) с выбранным потенциалом имеет единственное квадратично-интегрируемое на полуоси решение с энергией $\varepsilon = \hbar^2 \varepsilon / 2m = -2,22439$ МэВ. Вычислительная схема основывается на разложении решения по базису эрмитовых кубических сплайнов на сетке по переменной θ и использовании конечно-разностной аппроксимации второй производной на равномерной сетке по ρ . Данная аппроксимация порождает систему линейных уравнений с блочно трёхдиагональной матрицей. Эта система решается методом матричной прогонки [3]. Для решения уравнения (2) с асимптотическим условием (3) формировалась краевая задача для уравнения (2) с условием

$$\psi(\rho_m, \theta) = \varphi_0(\rho_m, \theta) (\sin q\rho_m + a_0(q) \exp iq\rho_m) +$$

$$+ A(E, \theta, \rho_m) \exp(i\sqrt{E}\rho_m)$$

при $\rho = \rho_m$. Решение данной задачи даёт набор коэффициентов $a_k(E, \rho_m)$, определяющих амплитуду $A(E, \theta, \rho_m)$ по формуле (5). Данный набор позволяет определить функцию

$$A(E, \theta, \rho_m, \rho) = \sum_{k \geq 1} a_k(E, \rho_m) \varphi_k(\rho, \theta), \quad (7)$$

которая в свою очередь даёт возможность вычислить предельную амплитуду развала по формуле (6):

$$A(E, \theta, \rho_m) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} A(E, \theta, \rho_m, \rho). \quad (8)$$

Предметом исследования являлось определение таких значений ρ_m , начиная с которых коэффициенты разложения $a_k(E, \rho_m)$ перестают зависеть от значения ρ_m . Найдено, что для $\rho \geq 200$ фм наблюдается стабилизация $a_k(E, \rho_m)$ с точностью порядка 1%. Вид допредельной амплитуды $A(E, \theta, \rho_m, \rho)$ при $\rho = \rho_m = 200$ фм приведён на рис. 1а. Предельное значение $A(E, \theta, \rho_m)$, отвечающее $\rho_m = 200$ фм и $\rho = \infty$, приведено на рис. 1б. Тем самым показано, что предельная амплитуда развала может быть с успехом вычислена с помощью коэффициентов $a_k(E, \rho_m)$ при $\rho \geq 200$ фм и хорошо согласуется с результатом [2].

Литература

1. Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. — М.: Наука, 1985. — 400 с.
2. Friar J.L., Gluckle W., Payne G.L. Boundary conditions for three-body scattering in configuration space // Phys. Rev C. — 2000. — V. 61. — P. 024005–1–024005–9.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 592 с.

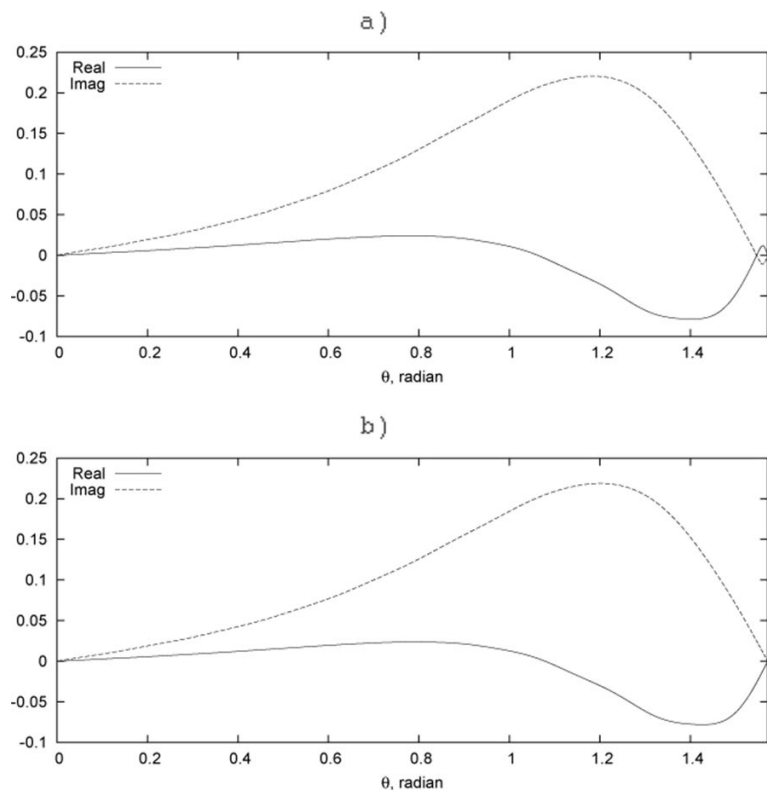


Рис. 1. Зависимость от угла θ : а) допредельной амплитуды развала $A(E, \theta, \rho_m, \rho)$ (7) при $\rho = \rho_m = 200$ фм; б) предельной амплитуды развала $A(E, \theta, \rho_m)$ (8) при $\rho_m = 200$ фм и $\rho = \infty$

УДК 537.87; 519.62

В.И. Буканина, Д.В. Диваков, А.А. Хохлов
 vibukanina@mail.ru, dvdivakov@mail.ruxoxlov@sci.pfu.edu.ru
 Российский университет дружбы народов

Моделирование роговицы человеческого глаза

По меньшей мере 12 миллионов человек во всем мире слепы из-за поврежденных или больных роговых оболочек глаза. До недавнего времени единственным способом помочь этим людям была пересадка роговицы — кератопластика, главным недостатком которой является дефицит донорской ткани.

Более универсальным методом, позволяющим устранить потребность в донорах, является кератопротезирование. Исследованиями в данной области занимаются следующие организации: Stanford University (США), Harvard University Medical School (США), Lions Eye Institute (Австралия), University of Ottawa Eye Institute (Канада), Paracelsus Medical University (Австрия), Wills Eye Hospital (США) и другие. Наиболее широко используемые в настоящее время кератопротезы — AlphaCor (Lions Eye Institute, Argus Biomedical Pty Ltd), Boston K-Pro (Harvard University Medical School), остео-одонто-кератопротезы Фальчинелли (San Camillo Hospital) — имеют стандартный дизайн: каждая модель включает пластиковую оптическую часть, а отличаются они в основном типом крепления к роговице. На практике кератопротезы, созданные из синтетических материалов, — крайнее средство для пациентов с роговичной слепотой, для лечения которых прочие возможности уже исчерпаны. Несмотря на большое количество потенциальных пациентов, в год проводится не более 300 имплантаций кератопротезов. Причинами этого являются не только строгий дифференцированный отбор пациентов, но и высокий процент отторжения протеза, его кератомалации и помутнения.

Человеческая роговица представляет собой многослойную структуру толщиной от 0,8–0,9 мм в центре и 1 мм на периферии. Макроскопически выделяют пять слоев, наибольший из которых — строма — в свою очередь состоит из тонких анизотропных коллагеновых плёнок. Таким образом, применительно к данной задаче коллаген является одним из наиболее перспективных биоматериалов, используе-

мых в мировой медицинской практике. В случае с моделью, созданной из волокон коллагена, можно добиться практически стопроцентной биологической совместимости, что позволит сократить сроки проведения операций и послеоперационной реабилитации до минимума, в то время как на данный момент срок восстановления зрения занимает от полугода до года. Также очевидным преимуществом является перспектива получения роговицы идеально выверенной формы, воспроизводящей биомеханические свойства настоящей роговицы и не накладывающей большого количества ограничений на потенциальных пациентов.

В рамках моделирования искусственной роговицы глаза решаются задачи подбора необходимого количества плёнок, углов, под которыми коллагеновые плёнки повернуты друг относительно друга, и ряд других параметров, позволяющих изготовить искусственную роговицу, максимально приближённую по оптическим свойствам к человеческой.

Коллагеновая плёнка представляет собой слой толщиной несколько десятков нанометров, оптически анизотропный. На толщину роговицы приходится до 40 плёнок. Одним из методов моделирования такого рода структур является 4×4 -метод Берремана [1]. Ниже описана его суть.

Рассматривается система уравнений Максвелла для немагнитных сред при отсутствии сторонних токов и зарядов. Если переписать эту систему для компонент векторов напряжённостей электрического и магнитного полей в определённой декартовой системе координат, то она будет состоять из 6 уравнений: четырёх дифференциальных и двух алгебраических. Полученная система в свою очередь сводится к системе из четырёх линейных ОДУ первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix} = \frac{i\omega}{c} \Delta \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ H_x \\ H_y \end{pmatrix},$$

где Δ — матрица коэффициентов дифференциального уравнения, полученная из элементов тензора диэлектрической проницаемости. Также в ней присутствует x -компонента волнового вектора падающей волны. Начальными условиями этой системы являются x — и y — компоненты падающей волны, в качестве решения получаем компоненты отражённой и прошедшей волн.

Будем считать, что характеристики моделируемого слоя постоянны, и решение для каждого слоя можно записать в виде матричной экспоненты. Для многослойной системы решение будет выглядеть следующим образом:

$$\Psi(h) = \prod_{i=1}^n P(h_i) \Psi(0),$$

где h — толщина всей системы, $P(h_i)$ — матрица Берремана для i -го слоя.

После нахождения переходной матрицы для всей моделируемой системы переходим к решению СЛАУ четвёртого порядка:

$$\Psi_T|_{\lambda, \alpha} = P(h)(\Psi_I + \Psi_R)|_{\lambda, \alpha},$$

где λ — длина волны, α — угол падения. Из этой системы находятся потоки энергии прошедшей и отражённой волн, с помощью которых можно найти энергетические коэффициенты R и T .

Используя результаты решения задачи в рамках модели Берремана, можно исследовать многослойные коллагеновые системы с целью оптимального подбора их оптических параметров для решения задачи проектирования искусственной роговицы [2]. В основе исследований лежат в основном методы условной и безусловной оптимизации с применением различных стабилизаторов, так как в общем случае решается некорректная задача.

Литература

1. *Berreman D.W.* Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4×4 -Matrix Formulation // Journal of the optical society of America. — 1972. — V. 62, N. 4. — P. 502–510.
2. *Ловецкий К.П., Жуков А.А.* Методы расчёта рефракционных индексов тонких кристаллических плёнок // Вестник РУДН. — Сер. Прикладная и компьютерная математика., 2005. — Т. 4, № 1. — С. 56–67.

М.Н. Геворкян

mngevorkyan@sci.pfu.edu.ru

Российский университет дружбы народов

Численное и аналитическое изучение параметрического возбуждения осцилляторов в зависимости от импеданса и частоты

В докладе рассматривается двумерный и одномерный гармонический осциллятор. Основываясь на [1], вводится понятие импеданса. В [1] показано, что именно модуляция импеданса (а не циклической частоты) приводит к резонансу осциллятора. В данной же работе это показывается непосредственным решением уравнений Гамильтона. Решение уравнений осуществляется двумя способами: численным и аналитическим. Рассмотрим лагранжиан следующего вида:

$$L(.,t) = -\frac{1}{2} \vec{x}^T \hat{K} \vec{x} + \frac{1}{2} \dot{\vec{M}} + \hat{\beta}.$$

Здесь \hat{K} — матрица упругости, \hat{M} — матрица масс, $\hat{\beta}$ — матрица поля магнитного типа.

Выразив все параметры в уравнениях Гамильтона через импеданс и частоту. Рассмотрим теперь два случая.

1. Частота терпит малые периодические возмущения, а импеданс остаётся постоянным.

2. Импеданс терпит малые параметрические возмущения, а частота остаётся постоянной.

Решаем получившуюся систему ОДУ численно. Полученное решение для двух случаев представим в графическом виде.

На основе полученных решений подтверждается вывод [1], что при модуляции частоты при постоянном импедансе не происходит параметрического резонанса. В свою очередь при модуляции импеданса даже при постоянной частоте происходит параметрический резонанс.

Систему для одномерного случая можно решить аналитически, пренебрегая членами второго порядка малости. Для этого исключим

из системы импульс или частоту. Получим следующее уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{Z_1}{Z_0} \sin(2\omega_0 t) \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

С помощью стандартного преобразования, указанного в [2], можно избавиться от члена, содержащего первую производную, и привести уравнение к более простому виду:

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \omega_0^2(1 + h \cos 2\omega_0 t)z(t) = 0 \quad h = 2\frac{Z_1}{Z_0} \ll 1.$$

Это линейное ОДУ второго порядка с переменными коэффициентами. Его можно решить методом вариации постоянных, поэтому ищем решение в виде

$$z(t) = a(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t.$$

Подставляя в уравнение, находим систему уравнений для коэффициентов:

$$\begin{cases} a''(t) + 2\omega_0 b'(t) - h\omega_0^2 a(t) = 0, \\ b''(t) - 2\omega_0 a'(t) + h\omega_0^2 b(t) = 0. \end{cases}$$

На следующем шаге получаем окончательное решение уравнения.

Полученные численное и аналитическое решения хорошо согласуются друг с другом. При численном решении использовано открытое программное средство для численных расчётов SciLab. На языке SciLab написана программа для решения систем ОДУ в одномерном и двухмерном случаях.

Литература

1. Зельдович Б.Я. Импеданс и параметрическое возбуждение осцилляторов // Успехи физических наук. — 2008. — Т. 178, № 5. — С. 489–510.
2. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. — М.: Физматгиз, 1958.

А.А. Егоров¹, А.В. Ставецев²

egorov@kapella.gpi.ru, astavtsev@gmail.com

¹ Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН

² Российский университет дружбы народов

Разработка методов и алгоритмов расчёта основных характеристик трёхмерных нерегулярных волноводов

В данной работе описаны методы и алгоритмы, позволяющие рассчитывать значения поля излучения вне нерегулярного интегрально-оптического волновода в системе визуального программирования Delphi.

Совершенствование и активное развитие теоретических и компьютерных методов исследования и быстрый технологический прогресс стимулировали интерес к разработке векторной теории распространения, а также рассеяния электромагнитного излучения в различных нерегулярных волноводах [1–6]. Одним из наиболее эффективных методов исследования в данной области является численное исследование построенной математической модели явления с накоплением и анализом большого количества статистических данных вычислительных экспериментов. В качестве основного инструмента решения поставленных задач мы выбрали язык Паскаль в системе визуального программирования Delphi [7], который обладает следующими достоинствами:

доступно множество компонент, позволяющих строить графики;
доступно множество математических библиотек;
в отличие, например, от C/C++ проверяет границы значений массивов;

удобная среда разработки и отладки;

доступна обширная русскоязычная документация по языку.

Основные соотношения и численный эксперимент. Поле излучения вне волновода в отсутствии шума задается следующей функцией, зависящей от переменных наблюдения (x, y, z) [2]:

$$E_s^{out}(x, y, z) = \frac{ik_0^2 \bar{n}_m^2}{2} \int dx' \int dy' \int dz' \int d\beta \exp[-i(\beta_{0y} - \beta)y'] \times$$

$$\times E_{\beta y}^*(x', z') E_{\beta y}(x', z') \beta^{-1} \times \\ \times \Delta n_m^2(x', y', z') E_{0y}(x', z') \sin(\beta_y y') / (\beta_y y'),$$

где функция $\Delta n_m^2(x', y', z')$ задает нерегулярность волноводного слоя в некоторой области.

В программе задаются основные характеристики волновода (показатели преломления $n_{c, f, s}$ сред, образующих волновод (покровный слой, плёнка и подложка)), длина волны излучения лазера λ_0 , функция E_{0y} (определяется выбором типа моды), пределы и параметры интегрирования, параметры участка нерегулярности и серия значений параметра β_y из заданного диапазона допустимых значений. Программа строит проекции диаграмм рассеяния по каждой из переменных наблюдения. Алгоритм работы программы следующий.

1. Для заданного значения толщины h волноводного слоя из дисперсионной зависимости $\gamma = \gamma(h)$ рассчитывается соответствующее значение коэффициента фазового замедления γ .

2. Вычисляются значения напряжённости полей $E_{\beta y}$, $E_{\beta y}^*$ излучательных ТЕ мод подложки [7]. Для излучательных мод отсутствует дисперсионное соотношение, которое приводит к дискретным значениям величины γ , поэтому в расчётах надо выбирать величину ρ_s в качестве независимой непрерывной переменной.

3. В случае, если аргумент x' попадает в ε -окрестность границы раздела двух сред, необходимо проверить выполнение граничных условий [7].

4. Далее производится последовательное численное интегрирование методом Симпсона по переменным $\{\beta; x', y', z'\}$.

Программа состоит из функций, которые можно поделить на следующие группы:

- 1) служебные функции;
- 2) функции, входящие в состав подынтегрального выражения;
- 3) функции вычисления интеграла.

Служебные функции определяют события, совершаемые графическими элементами управления программой, задают начальные значения параметров, управляют процессом отображения графиков и сохранением данных в файл. Основные служебные функции в программе «init_calc ()» и «draw ()». Функция «init_calc ()» задает начальные значения глобальных переменных, соответствующих параметрам основных характеристик волновода, пределов и параметров интегрирования, параметров участка нерегулярности волноводного слоя. Функция «draw ()» для каждого значения из серии значений

β_y получает значения поля и отображает точки на графическом компоненте.

Вторая группа функций — алгоритмизованное представление функций, входящих в состав подынтегрального выражения следующего 4-кратного повторного интеграла $I_{x,y,z;\beta} \equiv |E_s^{out}|$. Третья группа функций получает непосредственно численные значения 4-кратного повторного интеграла. При этом четырёхкратный повторный интеграл представлен как суперпозиция четырёх вложенных функций, зависящих от интервала промежутка интегрирования и значений аргументов от интегралов по $\{\beta; x', y', z'\}$.

Варьируя наборы параметров, мы провели серии численных экспериментов, получая различные проекции. Основная трудность в расчётах на данном этапе — необходимость в больших вычислительных ресурсах.

Результаты проведённых расчётов позволили выявить важные особенности влияния $n_{c,f,s}$, γ , положения и амплитуды локальной неоднородности показателя преломления волноводного слоя на вид диаграмм рассеяния в различных сечениях.

Литература

1. *Снайдер А., Лав Дж.* Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987.
2. *Егоров А.А.* Теория волноводного рассеяния света в интегрально-оптическом волноводе при наличии шума // Изв. Вузов. Радиофизика. — 2005. — Т. 48, № 1. — С. 63–75.
3. *Paulus M., Martin Oliver J.F.* A fully vectorial technique for scattering and propagation in three-dimensional stratified photonic structures // Optical and QE. — 2001. — V. 33. — P. 315–325.
4. *Сотский А.Б., Сотская Л.И.* Метод интегральных уравнений в теории микроструктурных оптических волокон // ЖТФ. — 2004. — Т. 74, № 2. — С. 32–40.
5. *Cowan A.R., Paddon P., Pacradouni V.* [et al.]. Resonant scattering and mode coupling in twodimensional textured planar waveguides // JOSA. A. — 2001. — V. 18, N. 5. — P. 2090–2101.
6. *Хансперджер Р.* Интегральная оптика. Теория и технология. — М.: Мир, 1985.
7. *Егоров А.А., Ставцев А.В.* Разработка и исследование комплекса программ для расчёта основных характеристик интегрально-оптических волноводов в системе визуального программирования Delphi и C++ // Журнал Радиоэлектроники. — 2009. — № 8. — С. 1–20.

УДК 519.713

И.Е. Еремин, О.В. Жилиндина

marinecops@mail.ru, marinecops@mail.ru

Амурский государственный университет

Моделирование частотных спектров диэлектрической проницаемости композиционных керамик

Существующая процедура выбора компонентного состава электротехнических керамик, призванного обеспечить их желаемые эксплуатационные характеристики, как правило, реализуется в рамках чрезвычайно сложной и многошаговой технологии. При этом анализ влияния физико-химических параметров, а также процентного содержания исходных компонентов на конечные свойства создаваемого композиционного образца обычно проводится на основании оценки результатов многочисленных и однообразных физических экспериментов, что вызывает излишние затраты как материальных, так и временных ресурсов. Сложившаяся ситуация может быть кардинально изменена за счёт реализации предварительного имитационного моделирования спектральных свойств виртуальных прототипов реально создаваемых материалов. Очевидно, что достоверность выявления взаимосвязи «состав-структура-свойства», прогнозируемой на базе проводимых расчётов, целиком определяется эффективностью используемых математических моделей.

В работе [1] было показано, что математическая модель упругой электронной поляризации простых кристаллических оксидов, вытекающая на базе квантово-механической трактовки электронной конфигурации атома, может быть представлена системой уравнений, описывающих колебания всех электронных пар, составляющих электронные оболочки частиц конкретного образца:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu_k}{dt^2} + 2\beta_k \frac{d\mu_k}{dt} + \omega_{0k}^2 \mu_k(t) &= \frac{2e^2}{m_e} E(t), k = \overline{1, K}; \\ E(t) &= E_0(t) - \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K \mu_i(t) N_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mu_k(t)$ — функции изменения дипольных моментов электронных пар; K — их общее количество, учитывающее, что первые пять пар принадлежат аниону кислорода; β_k и ω_{0k} — коэффициенты затуха-

ния и частоты собственных колебаний электронных пар; e и m_e — заряд и масса электрона; $E_0(t)$ и $E(t)$ — напряжённости внешнего и внутреннего полей; N_i — концентрации ионов; ε_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума.

В результате выполнения строгих математических преобразований, характерных для теории автоматизированного управления, непосредственно на основании исходных выражений вида (1) вытекают традиционные частотные уравнения комплексных поляризуемостей $\alpha_k(j\omega)$ отдельных электронных пар, а также оригинальная «кибернетическая модель» комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(j\omega)$ кристаллического образца:

$$\alpha_k(j\omega) = \frac{2e^2/m_e}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + j2\beta_k\omega}, k = \overline{1, K};$$

$$\varepsilon(j\omega) = 1 + \frac{2}{3\varepsilon_0} \sum_{i=1}^K \alpha_i(j\omega) N_i.$$

При этом в рамках классической теории поляризации динамические параметры рассматриваемых процессов могут быть рассчитаны по формулам

$$\omega_{0k}^2 = \frac{Q_k e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_k^3}; 2\beta_k = \frac{2e^2 \mu_0 \omega_{0k}^2}{6\pi c m_e},$$

где Q_k — эффективный заряд атомного остатка, влияющий на выделенную электронную пару; r_k — её радиус; μ_0 — магнитная проницаемость вакуума; c — скорость света в вакууме. Принимая во внимание обстоятельство того, что учёт внутреннего строения электронных оболочек частиц приводит к невозможности применения таблиц ионных радиусов, общепринятых в традиционных расчётах разбираемых характеристик, то для определения геометрических размеров каждой из электронных пар было предложено использовать формулу, основанную на уравнении первого боровского радиуса:

$$r_k = \frac{n_k^2 \hbar^2}{Q_k e^2 m_e},$$

где n_k — главное квантовое число соответствующей электронной оболочки; \hbar — постоянная Планка. Таким образом, единственным параметром, требующим дополнительного рассмотрения, оказывается величина эффективного заряда, влияющего на каждую электронную пару. Выделенная задача была решена на базе слэторовского описания атомных орбиталей многоэлектронных атомов, модифицированного авторами для внешних электронов аниона кислорода O^{-2} с учётом механизма его образования.

Проведённое моделирование диэлектрической проницаемости достаточно широкого набора чистых кристаллических оксидов подтвердило адекватность предлагаемых математических моделей, а также практическую эффективность авторской методики их параметрического синтеза. При этом был выявлен общий характер изменения экранирующих вкладов оптических электронов иона O^{-2} , находящийся в прямой взаимосвязи с периодическим законом изменения химических свойств атомов, соединённых с ним анионов.

Вторая часть описываемого исследования была направлена на поиск математической модели, позволяющей эффективно рассчитывать численные значения выделенного параметра. При этом объединение первичных результатов, а также их последующая аппроксимация выявили то, что разбираемые величины корректно описываются родственными линейными квадратичными функциями, аргументом которых служат номера рядов или же групп периодической таблицы химических элементов Д.И. Менделеева [2]. В рамках третьей части исследования было выполнено имитационное моделирование вещественных частотных характеристик комплексной диэлектрической проницаемости ряда промышленных образцов оксидных керамик, имеющих место в области установления упругой электронной поляризации частиц, а также их сравнение с данными физических измерений. Комплексный анализ полученных результатов показал, что предлагаемая совокупность структурных математических моделей и методик определения их параметров позволяет добиться вполне приемлемого соответствия моделируемых кривых контрольным точкам [3].

Литература

1. Еремин И.Е., Жиллиндина О.В. Моделирование упругой электронной поляризации композиционных электрокерамик. I // Информатика и системы управления. — 2008. — № 1(15). — С. 28–38.
2. Еремин И.Е., Жиллиндина О.В. Моделирование упругой электронной поляризации композиционных электрокерамик. II // Информатика и системы управления. — 2008. — № 3(17). — С. 27–33.
3. Еремин И.Е., Жиллиндина О.В. Моделирование упругой электронной поляризации композиционных электрокерамик. III // Информатика и системы управления. — 2008. — № 4(18). — С. 11–20.

Д.К. Колмогоров

dkolmogorov@yahoo.com

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Расчёт турбулентных течений вокруг обратных уступов и каверн в дозвуковом и сверхзвуковом режимах

Целями проведённой данной работы были освоение методов моделирования турбулентности на примере модели Спаларта–Аллмареса, проведение численных экспериментов для задачи об обратном уступе и каверне при разных числах Маха.

В рамках подхода моделирования турбулентности, основанного на осреднённых уравнениях Рейнольдса, существует большое количество моделей. Модель Спаларта–Аллмареса принадлежит к типу однопараметрических моделей с одним дифференциальным уравнением для турбулентной вязкости:

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \frac{1}{\sigma} [(\nabla \cdot ((\nu + \tilde{\nu}) \nabla \tilde{\nu})) + C_{b2} [(\nabla \tilde{\nu}) \cdot (\nabla \tilde{\nu})] + C_{b1}^S \tilde{\nu} - C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2].$$

Пространственная дискретизация уравнений Навье–Стокса вместе с замыкающей формулой для турбулентной вязкости проводится на треугольной сетке; используется смешанный метод аппроксимации, а именно члены конвективного переноса аппроксимируются с использованием метода конечных объёмов, а диффузная часть уравнений Навье–Стокса — методом конечных элементов. Аппроксимация по времени осуществляется неявным методом.

Постановка задач. В работе исследовались течения при дозвуковом и сверхзвуковом режимах. В задаче об уступе и каверне область до уступа (рис. 1) имеет длину, необходимую для образования развитого пограничного слоя перед срывом потока.

По физике явлений сверхзвуковое течение в отрывной зоне за уступом отличается от дозвукового наличием определённых областей, таких, как область разрежения, скачок разряжения, зона циркуляции и скачок отражения.

В задаче об обратном уступе в случае маломачового течения число Рейнольдса бралось равным $Re = 2,8 \cdot 10^4$, число Маха $M = 0,1$. В сверхзвуковом режиме число Рейнольдса равно $Re = 5,1 \cdot 10^5$ и число Маха $M = 2$. В задаче о каверне исследовалось течение в дозвуковом режиме при числе Маха 0.1 и числе Рейнольдса $Re = 4,8 \cdot 10^4$.

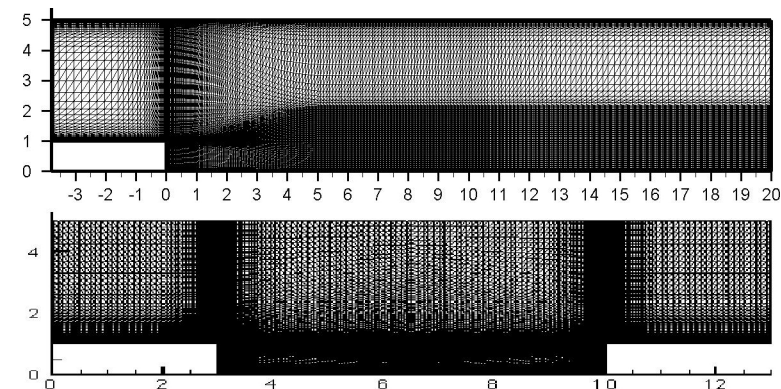


Рис. 1. Постановка задачи об обратном уступе и каверне

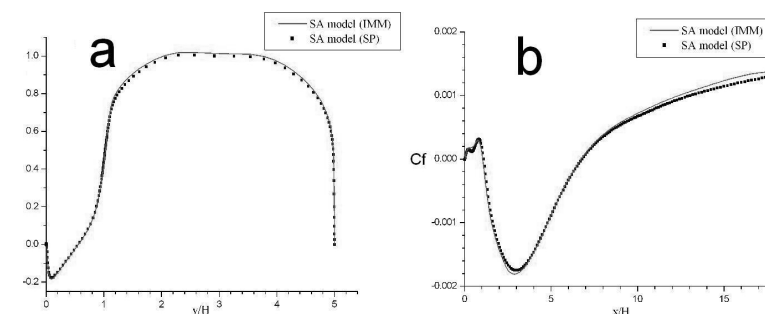


Рис. 2. Здесь *a* — продольная скорость в вертикальном сечении за уступом при числе маха $M = 0,1$, числе $Re = 2,8 \cdot 10^4$; *b* — коэффициент трения за уступом

Полученные результаты. Распределение коэффициента трения и профиль скорости за уступом (рис. 2) были сравнены с данными исследовательской группы кафедры гидродинамики СПбГПУ.

В задаче моделирования высокомахового течения за уступом (рис. 3) распределение поля скорости за уступом соответствует экспериментальному. Из рисунка видно, что область разрежения предшествует скачку разрежения, в нижней части за уступом присутствует

область циркуляции, длина которой соответствует экспериментальной и равна трём единицам высоты уступа.

Распределение коэффициента трения и давления в каверне при скорости течения, равной 0.1 числа Маха (рис. 4), качественно соответствует экспериментальным данным.

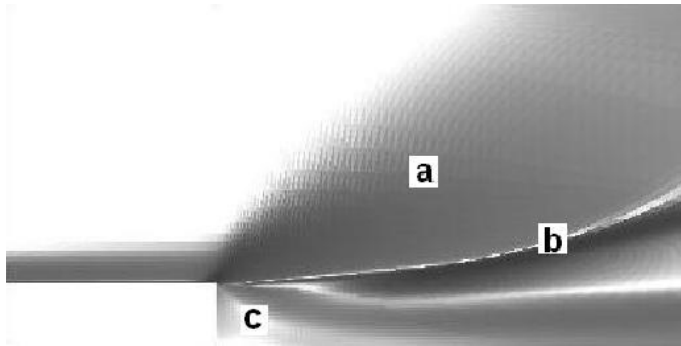


Рис. 3. Продольная скорость при числе Маха $M = 2$ и числе $Re = 5 \cdot 10^5$

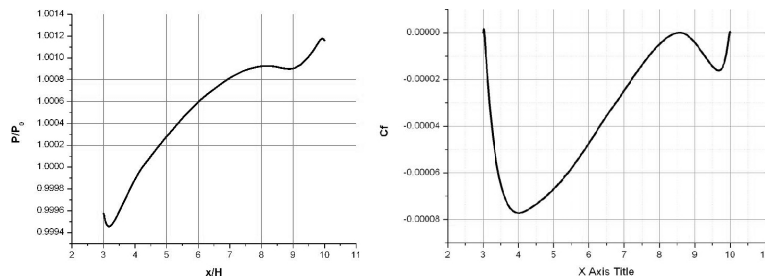


Рис. 4. Распределение коэффициента трения и давления в каверне

Литература

1. Tam C.K.W., Webb J.C. Boundary conditions // Journal of Computational Physics. — 1993. — 20 с.
2. Дородницын Л.В. Неотражающие граничные условия. — М.: МАКС, 2002. — 85 с.
3. Смирнов Е.М., Гарбарук А.В. Течения вязкой жидкости и модели турбулентности: методы расчёта турбулентных течений. — СПб.: Петербург, 2004. — 127 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

УДК 004.942

А.К. Лукьянов, М.Ю. Катаев, И.В. Бойченко

hyena116@mail.ru, kmy@asu.tusur.ru, biv@asu.tusur.ru

Томский государственный университет систем управления
и радиоэлектроники

Моделирование и обработка данных спутникового исследования атмосферы

В настоящее время существует обеспокоенность в связи с возможным глобальным потеплением. Одной из его причин считается увеличение количества парниковых газов атмосфере. В связи с этим важно установить источники выбросов парниковых газов и долю каждого источника, концентрацию в каждой точке атмосферы и их поведение. Замеры концентрации парниковых газов ведутся не везде, и картина плотности распределения их выбросов неполна. Исследование со спутника позволит охватить практически весь земной шар.

Методы изучения Земли из космоса относятся к высоким технологиям, так как используется сложная ракетная техника, оптикоэлектронные приборы, компьютеры, с одной стороны, а с другой — применяются сложные подходы к получению, обработке и интерпретации данных дистанционного зондирования. Становится очевидной задача разработки программного обеспечения, которое будет заниматься предварительной обработкой, анализом поступающих данных. Это и является основной целью научно-исследовательской работы — разработка инструментальной системы обработки данных дистанционного зондирования.

Основные характеристики системы RAD: 1) поддержка известных программно-аппаратных платформ: Win32-64, Linux32-64; 2) интеграция ранее разработанного прикладного программного обеспечения и библиотек; 3) возможность описания выполняемого задания на XML; 4) поддержка распространенных в мировом научном сообществе форматов данных netCDF, HDF, GRIB и др.; 5) возможность регистрации всех внутренних событий системы в специальных журналах.

Система RAD, разрабатывается с 2006 года, большей частью реализована на языке Java, что обеспечивает поддержку многих платформ. Архитектура системы предполагает возможность интеграции ранее созданного программного обеспечения на других языках про-

граммирования. В данном случае на языке Fortran были реализованы модули расчёта спутникового сигнала. Для интеграции этих модулей были созданы классы-оболочки на Java. В целом разрабатываемая программная система представляет собой специализированную систему пакетного запуска заданий, облегчающую проведение многоитерационных численных экспериментов.

Процесс расчёта (рис. 1) разбивается на три этапа: 1) моделирование траектории спутника; 2) расчёт характеристик отражённого солнечного излучения для каждой точки траектории из п. 1; 3) анализ и визуализация результатов расчёта. В п. 1 под траекторией понимается проекция координат спутника на поверхность Земли в заданные промежутки времени. Каждую точку траектории характеризует пара координат по широте и долготе, а также астрономическое время пролета аппарата над точкой. В зависимости от данных характеристик можно вычислить азимут и угол Солнца, что также необходимо для расчёта второго этапа.

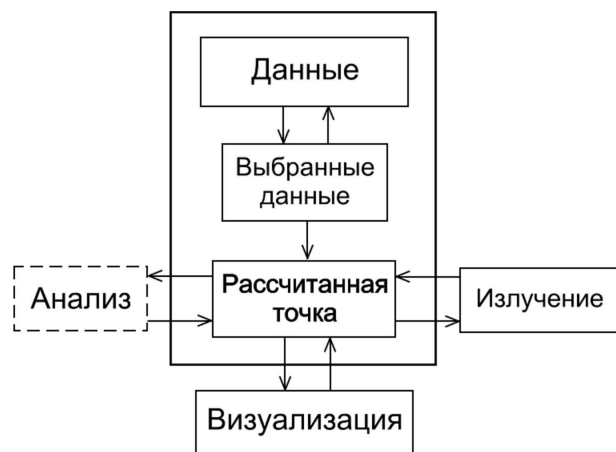


Рис. 1. Структура расчёта

Проблемы, с которыми пришлось столкнуться, — это большой объём исходных данных, а также большой объём вычислений. Проблему большого объёма исходных данных можно устранить, применив кластеризацию, ведь зачастую для расчётов требуются данные не для всего земного шара и не для всех времён года. Поэтому исходные базы данных можно разбить на небольшие базы для каждого региона и сезона.

Поскольку данный численный эксперимент является достаточно затратным с точки зрения времени и ресурсов, было принято решение о выполнении расчётов с применением высокопроизводительной вычислительной системы — кластера.

Особенностью задачи явилось то, что расчёт каждой точки траектории может осуществляться независимо от других точек. Поэтому мы имеем возможность параллельно вести моделирование нескольких точек одновременно в зависимости от количества вычислительных ядер в системе.

Литература

1. Катаев М.Ю., Бойченко И.В. Программная система моделирования отражённого от поверхности Земли солнечного излучения // Доклады ТУСУРа. — 2007. — № 1 (19), часть 1. — С. 88–95.

УДК 51-73.152

В.В. Семёнов

vladsmnv@gmail.com

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Модели клеточных автоматов транспортного потока для прогнозирования различного вида предзаторных и заторных ситуаций

Задача борьбы с заторами на перегруженных УДС актуально для всех крупных мегаполисов мира. Значение парадигмы сложности как новой парадигмы нелинейной динамики (синергетики) в настоящее время в полной мере осознается в ряде ведущих мировых и отечественных научных центров. Приложение методов синергетики к исследованию самой сложной практической проблемы — предсказанию и облегчению заторных явлений в необратимо развивающихся сложных транспортных системах — возможно благодаря развитию инструментарию мягкого моделирования и междисциплинарных подходов.

Прогнозирование возникновения возможных типов неустойчивостей в транспортном потоке — так называемых «индикаторов предзаторных состояний» (ИПС) — новый, сформулированный ad hoc научный термин для обозначения совокупности возможных методов, процедур и/или алгоритмов для определения, выявления и предсказания «транспортных заторов», «пробок» и предзаторных состояний на УДС современного мегаполиса.

Литература

1. Семенов В.В. Математическое моделирование транспортных потоков мегаполиса: препринт № 34 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2004.
2. Семенов В.В. Исследование характеристик транспортного потока в сужении // Проблемы управления безопасностью сложных систем: Труды XIII международной конференции. — М., декабрь 2005 г. — С. 435–436.
3. Семенов В.В. Математические методы моделирования транспортных потоков // Новое в Синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение: сб. ст. Ч. 1 / под ред. Г.Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — С. 341–359 (63–81).
4. Семенов В.В. Смена парадигмы в теории транспортных потоков: препринт № 46 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2006.
5. Семенов В.В., Мурашковский Ю.С. Новый подход к моделированию транспортных потоков // Нелинейный мир. — М.: Радиотехника, 2007. — № 6, Т. 5. — С. 358–365.
6. Семенов В.В. Математическое моделирование транспортного потока на нерегулируемом пересечении // Математическое моделирование, 2007 (принято к печати).
7. Семенов В.В. Математическое моделирование группового транспортного потока на нерегулируемом пересечении // Нелинейный мир. — 2008. — № 1.
8. Малинецкий Г.Г., Семенов В.В. Дорожное движение в контексте фундаментальных исследований: препринт № 64 Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2007.
9. Семенов В.В. Математические методы моделирования транспортных потоков // Новое в Синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение: сб. ст. Ч. 1 / под ред. Г.Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — С. 341–359 (63–81).

10. Семенов В.В. Смена парадигмы в теории транспортных потоков // М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2006. препринт № 46.

11. Семенов В.В. Транспортные заторы с точки зрения синергетики // Новое в Синергетике. Новая реальность, новые проблемы, новое поколение. Сб. ст. Ч. 2 / Под ред. Г.Г. Малинецкого. — М.: Радиотехника, 2006. — С. 88–94.

УДК 519.612: 519.615.5: 535.135: 621.372.2

А.Л. Севастьянов

alsevastyanov@gmail.com

Российский университет дружбы народов

Описание программы расчёта полей плавно нерегулярного четырёхслойного волновода

Программа позволяет производить расчёт дисперсионной зависимости коэффициента фазового замедления β от параметров и конфигурации трёх- и четырёхслойного волновода. В каждой точке рассчитанной дисперсионной зависимости для заданных параметров волновода вычисляются компоненты полей $E_z(x)$ и $H_y(x)$ для ТЕ-моды и $H_z(x)$ и $E_y(x)$ для ТМ-моды.

Конфигурация волновода. Волновод состоит из нескольких слоев. Подложка (s — substrate), на подложку нанесён основной волноведущий слой (f — film), затем наносится дополнительный волноведущий слой (l — layer), сверху волновод покрывают однородным диэлектриком или просто воздухом (c — coverage). Толщина основного волноведущего слоя обозначается d , а толщина дополнительного волноведущего слоя — h . Верхний слой диэлектрика и подложка в рассматриваемой модели имеет бесконечную толщину.

Конфигурация волновода определяется несколькими параметрами. Это показатели диэлектрической проницаемости каждого из слоёв волновода и координаты по оси Ox границ раздела сред с постоянным значением диэлектрической проницаемости.

Метод расчёта. Исходя из уравнений Максвелла и тангенциальных граничных условий мы получаем вид решения для компонент полей ТМ- и ТЕ-моды соответственно:

$$E_{z,k} = A_k^+ \exp(i\chi_k x) + A_k^- \exp(-i\chi_k x); \quad H_y = - \left(\frac{ik_0 \varepsilon}{\chi^2} \right) \frac{dE_z}{dx};$$

$$H_{z,k} = B_k^+ \exp(\gamma_k x) + B_k^- \exp(-\gamma_k x); \quad E_y = - \left(\frac{ik_0 \mu}{\chi^2} \right) \frac{dH_z}{dx}.$$

В этих обозначениях $\gamma_k = k_0 \sqrt{\beta^2 - n_k^2}$, $\chi_k = k_0 \sqrt{n_k^2 - \beta^2}$, n_k — показатель преломления k -й среды, индекс k — индекс диэлектрической среды, в которой описывается электромагнитное поле, то есть $k = [s, f, l, c]$.

Затем записываем граничные условия для тангенциальных компонент полей на границах раздела диэлектрических сред. Такие уравнения образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно амплитудных коэффициентов полей. Обозначим матрицу этой СЛАУ буквой M . Необходимым условием существования решения подобной системы является равенство нулю её определителя $\det M = 0$. Детерминант рассмотренной матрицы связывает между собой коэффициент фазового замедления β и толщины основного — d и дополнительного — h волноведущих слоев. Таким образом, вычисляя определитель указанной системы уравнений, мы можем получить дисперсионную зависимость коэффициента фазового замедления от конфигурации волновода.

Алгоритм работы программы. Задаем начальные значения толщин волноведущих слоёв h и d . Точка, в которой детерминант матрицы обращается в ноль, есть искомое значение коэффициента фазового замедления.

Для нахождения нуля определителя мы строим соответствующую целевую функцию. И затем с помощью метода Нелдера–Мида находим минимум этой целевой функции с двойной точностью. Следует отметить, что существует некоторая минимальная толщина основного волноведущего слоя d_{\min} .

Для построения дисперсионной зависимости задаются интервалы изменения толщин волноведущих слоев: $d \in [d_{\min}, d_{\max}]$ и $h \in [h_{\min}, h_{\max}]$. На каждом из таких интервалов строится расчётная сетка. В каждой точке этих сеток с помощью метода Нелдера–Мида находится минимум целевой функции — значение коэффициента фазового замедления.

Вместе с тем было экспериментально установлено, что нет критического значения толщины дополнительного волноводного слоя. Так, при задании достаточно больших максимальных толщин волноводных слоёв возникает следующий эффект. На переходном участке дисперсионной кривой (из основного волноведущего слоя в дополнительный) возникают «ступеньки» на кривой дисперсионной зависимости, то есть появляются дополнительные точки перегиба.

Для построения поля в каждом диэлектрическом слое нужно вычислить все амплитудные коэффициенты. Другими словами, найти решение однородной системы линейных алгебраических уравнений. Обозначим искомые амплитудные коэффициенты следующим вектором $\vec{A} = \{A_s, A_f^+, A_f^-, A_l^+, A_l^-, A_c\}$. Для решения этой задачи был применен метод минимизации невязки. То есть исходной задаче сопоставлена задача минимизации следующего функционала $F(\vec{A}) = \|\hat{M}\vec{A}\|^2$. Такой подход оказался неустойчивым. При малом изменении параметров (в соседних точках дисперсионной кривой) амплитудные коэффициенты сильно изменялись. Для построения устойчивого решения в функционал были добавлены следующие штрафные функции. Первая штрафная функция накладывает дополнительное условие на нормировку вектора решения. Физический смысл этого заключается в нормировке мощности полученного поля на мощность поля, входящего в волновод. Вторая штрафная функция накладывает условие на близость полученного решения к решению в предыдущей точке дисперсионной кривой. То есть делает решение устойчивым. Предложенный функционал имеет следующий вид:

$$F(\vec{A}) = \|\hat{M}\vec{A}\|^2 + \alpha_1 \left| \|\vec{A}\|^2 - 1 \right| + \alpha_2 \|\vec{A} - \vec{C}\|^2.$$

Здесь 1 — мощность входного излучения. Вектор \vec{C} — вектор решения в предыдущей точке дисперсионной кривой. Для поиска решения в первой точке необходимо задать начальное приближение.

Решение вычисляется с помощью метода Нелдера–Мида с двойной точностью. В соседних точках дисперсионной кривой получаются близкие поля. То есть решение является устойчивым.

Ю.Ю. Семкин

ysyomkin@sci.pfu.edu.ru

Российский университет дружбы народов

К вопросу о дискретизации модели маятника

В работе проведена проверка гипотезы о возможной корректной дискретизации модели физического осциллятора.

Физические осцилляторы являются в общем случае «носителями хаоса». При постановке задачи о моделировании физического осциллятора для расчётов требуется построить дискретную модель осциллятора. При использовании методов дискретизации «впрямую» таких систем возникают ошибки. Требуется найти метод дискретизации данных систем без ошибок.

В результате дискретизации уравнения маятника в простейшем случае получается решение с сингулярностями, которыми исходная система не обладает. Дискретный аналог уравнения движения маятника имеет области стохастичности при любом шаге дискретизации. Это, в частности, означает, что переход к дискретным уравнениям движения эквивалентен добавлению внешней периодической силы, обусловленной дискретизацией.

В окрестности сепаратрис влияние такой силы приводит к качественно новой динамике — стохастической неустойчивости. При высокой размерности решаемой задачи все фазовое пространство покрывается сеткой стохастических слоёв на месте разрушенных сепаратрис. Наличие такой сетки приводит к заметным отличиям дискретной задачи от непрерывной. Следовательно, метод прямой дискретизации даёт неудовлетворительные результаты и не подходит для решения поставленных задач.

Действительно, при применении методов дискретизации впрямую, даже простых систем осцилляторов, описываемых уравнением вида

$$\ddot{x} + \omega_0 \sin(x) = 0, \quad (1)$$

получающийся фазовый портрет, описываемый системой уравнений

$$\begin{cases} q_{k+1} = q_k + hp_k, \\ p_{k+1} = p_k - \frac{hg}{l} \sin(q_k), \end{cases} \quad (2)$$

не соответствует реальному.

В работе [1] высказано предположение, что для класса задач, описываемых уравнением (1), не существует методов дискретизации, удовлетворяющих требованиям. Данное утверждение представляется не верным. В работе [2] предложен метод вариационного дискретизатора, который, вероятно, позволяет решить поставленную задачу.

После применения данного метода получаем систему уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{p_k + 2Aq_k}{2} = \frac{Aq_k + q_{k-1}}{2} + B \sin\left(\frac{p_k + p_{k+1}}{2}\right), \\ p_{k+1} = A(q_{k-1} - q_k) - B \sin\left(\frac{p_k + p_{k+1}}{2}\right). \end{cases} \quad (3)$$

Решая уравнение (3) этой системы численным методом (использовался метод Пауэлла [3]), получаем фазовый портрет системы, соответствующий реально наблюдаемому.

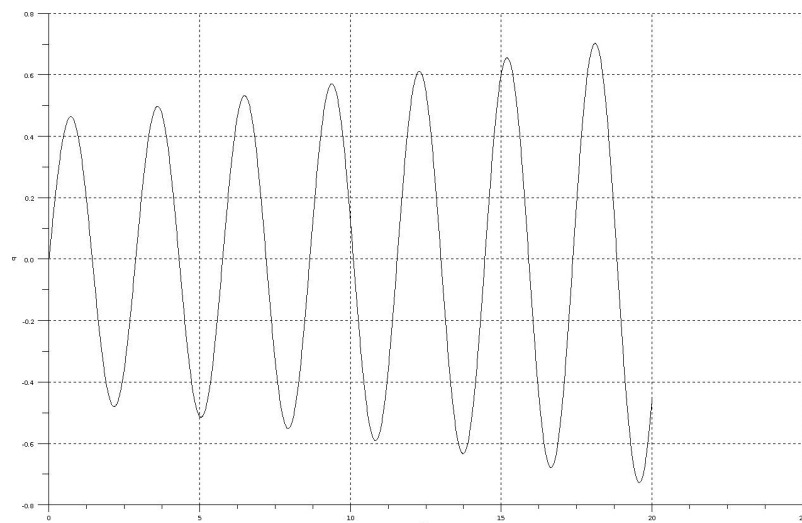
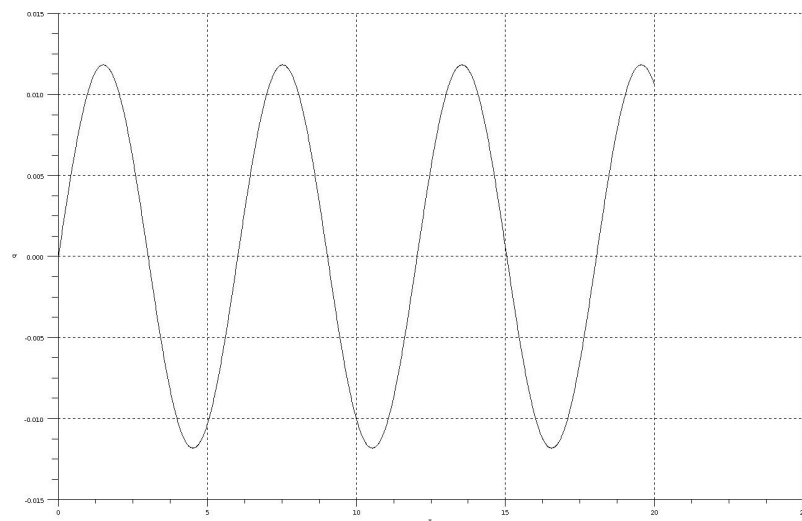
Таким образом целью работы являются:

- проверка утверждения о невозможности дискретизации впрямую;
- доказательство возможности дискретизации при применении метода вариационного интегратора.

Вычисления были проведены в среде вычислений с открытым исходным кодом Scilab [4] (рис. 1, 2).

Литература

1. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А. Слабый хаос и квазирегулярные структуры. — М.: Наука, 1991.
2. Stern A., Desbrun M. Discrete geometric mechanics for variational time integrators // SIGGRAPH 2006 Courses. — 2006. — С. 75–80.
3. Powell M.J.D. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives // The Computer Journal. — 1964. — № 7. — С. 155–162.
4. Scilab home page [Электронный ресурс]. URL: <http://www.scilab.org/>.

Рис. 1. Фазовый портрет в координатах (t, q) Рис. 2. Фазовый портрет в координатах (t, q)

УДК 519.6

Н.А. Тетерев

us_tet@mail.ru

Московский инженерно-физический институт (Национальный
исследовательский ядерный университет)

Трансляционное смещение и резонансная частота инкапсулированных пузырьков в ультразвуковом поле

Все шире в медицинской практике при ультразвуковых исследованиях используются контрастные агенты (КА) — инкапсулированные пузырьки. КА инжицируются в кровь для того, чтобы улучшить качество изображения посредством увеличения эхосигнала. Совершенствование технологий изготовления КА и применение все новых материалов для их оболочек привело к интенсивным экспериментальным и теоретическим исследованиям в этой области [1]. Однако до сих пор нет однозначного ответа, как оболочка влияет на трансляционное движение КА, резонансную частоту КА и т. п. Цель настоящей работы состоит в численном исследовании динамики КА с учётом реологических свойств оболочки в ультразвуковом поле.

При учете трансляционного движения КА и реологических свойств оболочки систему уравнений можно представить в виде

$$\dot{v} = F(R, \delta R, v, v_x, D_i, \dot{D}_i, X_n, Y_n, x, t), \quad v = \dot{R},$$

$$\dot{v}_x = F_x(R, \delta R, v, v_x, X_n, Y_n, t), \quad v_x = \dot{x}, \quad \dot{D}_i = F_i(D, R, v, v_x, X_n),$$

где v — радиальная скорость поверхности пузырька, R — радиус пузырька, X_n — набор параметров, описывающих свойства газа в пузырьке и окружающей его жидкости, Y_n — набор параметров, описывающих ультразвуковое поле, δR — толщина оболочки, v_x — скорость смещения контрастного агента, D_i — функция, определяющая реологическое поведение i -й среды, x — смещение КА.

Для решения подобного рода задач использовалась одномерная численная модель [2]. В качестве основной модели релей-плессетского типа была выбрана модель Дойникова [3]. Реологические свойства оболочки описывались моделями Максвелла, Фойхта или Олдройда.

Рассмотрим результаты численного исследования трансляционно-го смещения КА в зависимости от частоты ультразвукового поля. На рис. 1 изображены трансляционные смещения КА в зависимости от его начального радиуса для пяти фиксированных частот.

Каждая точка на кривых соответствует расчёту по модели Дойникова с трёхпараметрической реологической моделью Олдройда для материала оболочки, толщина которой предполагалась постоянной и составляла 2 нм. Продолжительность действия ультразвукового поля составляла 20 периодов с амплитудой 0,2 МПа. Отметим, что частоты, соответствующие максимальным трансляционным смещениям, близки по своим значениям к резонансным частотам КА, которые можно определить по рассчитанной осцилляционной функции мощности, определяемой выражением

$$W(f, R_0) = 1/T \int_0^T (R(t)/R_0 - 1)^2 dt,$$

где T — длительность ультразвукового воздействия. На рис. 2 изображены зависимости резонансной частоты КА от его радиуса по описанным способам. Здесь же приведена резонансная кривая для свободного пузырька.

То, что резонансные частоты, определённые по максимальным трансляционным смещениям, находятся между приведёнными кривыми резонансных частот свободного и инкапсулированного пузырька, означает возможность этого способа претендовать на роль индикатора резонансной частоты.

Описанная модель является удобным и гибким инструментом по моделированию различных задач по динамике КА как в слабых, так и в сильных ультразвуковых полях. В частности, численное исследование трансляционного смещения КА позволило найти новый способ определения их резонансной частоты.

Литература

1. *Doinikov A.A.* (ed). *Bubble and Particle Dynamics in Acoustic Fields: Modern Trends and Applications*. — India, Kerala: Research Signpost, 2005. — 345p.

2. *Тетерев Н.А., Тетерев А.В.* Модель динамики инкапсулированных и свободных пузырьков в ультразвуковом поле // Науч. сессия МИФИ / сб. науч. тр. в 15 т. — М.: МИФИ, 2008. — Т. 9. — С. 71–72.

3. *Doinikov A.A., Dayton P.A.* Nonlinear dynamics of lipid-shelled ultrasound microbubble contrast agents // *Computational methods in multiphase flow IV*, WIT. — Boston: Press Southampton. — 2007. — P. 261–270.

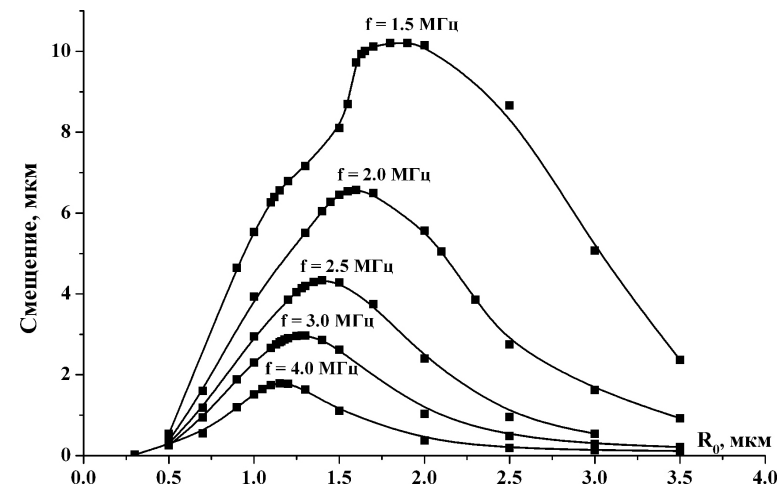


Рис. 1. Трансляционное смещение в зависимости от начального радиуса КА

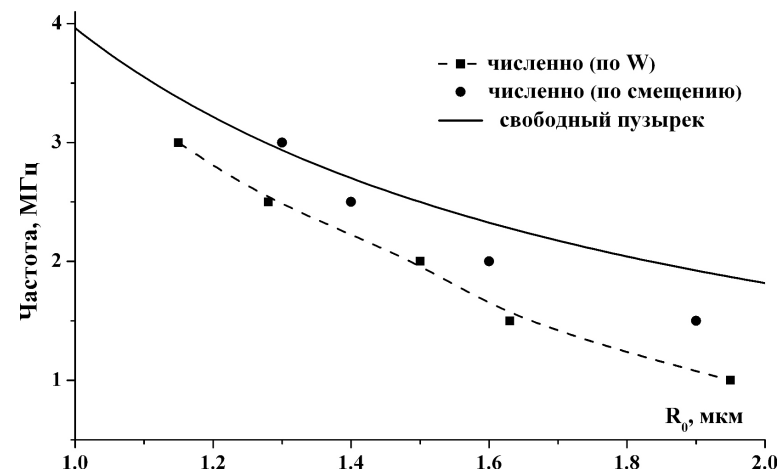


Рис. 2. Зависимость резонансной частоты от начального радиуса

А.А. Хохлов

xoxlov@sci.pfu.edu.ru

Российский университет дружбы народов

Синтез субволновых оптических структур

В настоящее время задачи моделирования и синтеза различных оптических структур, характерные размеры которых сравнимы с длиной волны оптического диапазона, являются особенно актуальными. Среди применений таких структур можно отметить покрытия для солнечных батарей, позволяющие увеличить их эффективность, миниатюрные зеркала с отражением, близким к 100%, для использования в лазерной технике (в том числе в современных DVD и Blu-ray приводах), искусственные коллагеновые роговицы глаза человека, дизайн современных дисплеев, энергосберегающие технологии и другие. Основу таких устройств обычно составляет набор из некоторого количества тонких (100–1000 нм) слоёв из различных материалов. Каждый слой может быть изготовлен либо из однородного материала, либо представлять собой некоторую периодическую структуру — решётку.

Для исследования и проектирования таких структур обычно решается два типа задач. Сначала решается задача взаимодействия электромагнитной волны с оптической системой, исходными данными являются информация о падающем излучении и самой структуре. В результате решения задачи можно получить информацию об отражённом и прошедшем излучении и энергетические коэффициенты пропускания и отражения. Такие задачи называют «прямыми» задачами. Если же требуется спроектировать структуру с заданными свойствами либо диагностировать свойства уже имеющейся, необходимо подобрать параметры оптической системы — материал слоёв, их количество, толщину, расположение и другие для получения заданных свойств. Эти задачи называют «обратными».

Для решения прямых задач используются уравнения Максвелла, которые описывают распространение электромагнитных волн в среде, а также граничные условия [1], необходимые для «сшивания» электромагнитных полей на границах между слоями. При решении современных актуальных задач аналитические методы неприменимы

ввиду огромной вычислительной сложности, и необходимо использовать различные численные методы для построения решений, обычно реализуемые в виде компьютерных программ. Если необходимо описать взаимодействие световой волны с многослойной тонкопленочной структурой в отсутствие среды слоёв решёток, целесообразно использовать модель Берремана [2]. Эта модель достаточно хорошо изучена, в том числе и автором. К преимуществам можно отнести её универсальность — можно анализировать многослойные сложные структуры с разными свойствами. В настоящее время основные усилия автора направлены на улучшение устойчивости и скорости используемых численных методов. Также в процессе глубокого анализа появились ещё несколько задач, требующих отдельного изучения, — задачи на собственные значения дифференциальных операторов, задачи усреднения фазового сдвига волны при прохождении через толстые слои и другие. Суть модели Берремана заключается в нахождении так называемой матрицы Берремана, которая определяет изменение параметров волны при прохождении между слоями оптической структуры. Матрица Берремана входит в систему уравнений для соблюдения граничных условий непрерывности тангенциальных компонент электрического и магнитного полей при переходе из слоя в слой, это и определяет универсальность схемы для любых структур, слоями которых могут являться совершенно разные материалы.

Обратные задачи в общем случае некорректны, и для их решения необходимо использовать регуляризованные методы с использованием многопараметрической оптимизации с различного рода стабилизаторами. В частности, предлагается использование тихоновской регуляризации с дисперсионными соотношениями Крамерса–Кронига в качестве стабилизатора. В процессе минимизации необходимо многократно решать прямую задачу, что требует больших вычислительных затрат, и на первый план выступает скорость используемых численных методов. Очевидно, что лучше использовать многопараметрические методы оптимизации первого и второго порядков, однако в связи со сложной структурой функционала и стабилизатора, пока удалось достичь конечных результатов только с использованием методов нулевого порядка, например, метода Нелдера–Мида.

Значительных результатов можно достичь при использовании дифракционных решёток, период которых сравним с длиной волны оптического диапазона, это позволяет заметно уменьшить размеры проектируемых устройств. Например, специалистами из университета Беркли (США) было разработано зеркало для использования в лазе-

рах VCSEL. Раньше в этих устройствах использовались Брэгговские отражатели (DBR, Distributed Bragg Reflectors), которые представляют собой многослойную структуру общей толщиной не менее 5 мкм. Разработанное зеркало получило название HCG (High-index contrast sub-wavelength grating) и оно имеет толщину, примерно в 20 раз меньшую по сравнению с DBR зеркалами. HCG состоит всего из двух слоёв — пластины арсенида алюминия-галлия и обычного воздуха, на поверхности полупроводника выгравированы параллельные канавки, ширина которых меньше длины волны света.

Одним из первых методов для моделирования решёток являлся метод FDTD (Finite Difference Time Domain — метод конечных разностей), основанный на дискретизации уравнений Максвелла по времени и пространству. Метод является «сеточным», он использует разностную аппроксимацию по времени и координатам [3]. С одной стороны, это делает его универсальным при решении задач взаимодействия электромагнитных волн с веществом, с другой стороны, в некоторых случаях данное делает его неустойчивым. В настоящее время активно развивается и используется другой метод — RCWA (Rigorous Coupled Wave Analysis — устойчивый метод связанных волн), основанный на представлении полей вне решётки в виде разложения Рэлея и удовлетворении уравнения Гельмгольца внутри модулируемой области [4]. Помимо этого, безусловно, учитывается выполнение граничных условий между средами. Автором производится работа по анализу и эффективной реализации метода RCWA применительно к многослойным, в общем случае анизотропным, решёткам.

На данный момент задача реализации универсального алгоритма построения моделей многослойных оптических структур, включающих в себя анизотропные дифракционные решётки, в общем случае ещё не решена. Также мало изучены «обратные» задачи синтеза таких структур.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 1982. — 651 с.
2. Berreman D.W. Optics in Stratified and Anisotropic Media: 4 × 4-Matrix Formulation // Journal of the optical society of America. — 1972. — V. 62, № 4. — P. 502–510.
3. Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Методы дифференциальных разностей расчёта оптических покрытий. — М.: РУДН, 2008. — 161 с.

4. Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А., Паукитто М.В. [и др.]. Методы связанных волн расчёта оптических покрытий. — М.: РУДН, 2008. — 144 с.

Секция синергетики и вычислительной нанофизики

УДК 51-77

И.В. Десятов

divjan@gmail.com

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Методология оценки региональной эффективности программы по изменению вектора показателей региона

Для того чтобы оценивать инвестиционный проект или программу с региональной точки зрения её нужно оценить не локально, как на уровне фирмы или банка, а глобально — как реализация данной программы повлияет на все важнейшие макроэкономические показатели региона и какие альтернативные издержки реализации этого проекта вместо другого. Эта задача намного более обширна, чем обычный расчёт эффективности и прибыльности инвестиций.

Предлагается оценивать региональную эффективность с помощью вектора показателей региона и опорной и возмущённой траектории.

Пусть $\{x_i\}$ — набор выбранных социально-экономических показателей региона, где i меняется от 1 до N — их количества.

$$A = \{x_i\}$$

A — это вектор социально-экономических показателей региона, или просто, вектор показателей. Поскольку каждый показатель за разные годы имеет разные значения, то вектор A также меняется в зависимости от года и имеет свой индекс — j , который будет указывать год. Таким образом, получаем набор векторов — $\{A_j\}$.

Пусть также t_0 — текущий момент времени. Тогда A_j при $j = t_0$, есть текущие значения показателей, при $j < t_0$ — отчётные показатели за предыдущие годы, при $j > t_0$ — прогнозные показатели. Если наблюдение ведётся начиная с момента t_1 , а заканчивается прогнозом до момента t_2 , то набор таких векторов A_j при $j: t_1 \leq j \leq t_2$ назовем траекторией.

Назовём опорной траекторией такую траекторию векторов A_j , которые соответствуют отчётным данным (то есть при $j \leq t_0$) за отчётный период и инерционному прогнозу развития показателей без учёта региональных программ при $j > t_0$.

А возмущённой назовем траекторию векторов, соответствующую отчётным данным за отчётный период и прогнозу развития, который учитывает проведение региональной программы за прогнозный период.

Будем различать эти траектории индексами:

A_j^O — с индексом O — опорная траектория;

A_j^B — с индексом B — возмущённая.

Векторы

$$B_j = A_j^B - A_j^O$$

есть векторы, состоящие из приращений региональных показателей при реализации программы (они имеют смысл только при $j > t_0$, так как остальные значения будут равны 0). Если есть несколько альтернативных программ, на которые можно выделить ресурсы, то для каждой можно составить такие векторы B_j .

Каждый из векторов приращений B_j состоит из экономических и социальных показателей, они все отличаются по размерности и значению; так как показателей очень много, то невозможно оценить относительное преимущество одной программы по отношению к другой без выделения наиболее важных показателей. Поэтому, чтобы оценить региональную эффективность нескольких альтернативных программ, нужно сделать свёртку таких приращений с различными коэффициентами — большими для более важных показателей и меньшими для менее важных.

Пусть вектор $K = \{k_i\}$ будет вектором этих коэффициентов. Тогда, составив произведение векторов:

$$B_j \times K = (A_j^B - A_j^O) \times K = \sum_i (x_{ij}^B - x_{ij}^O) \times k_i,$$

получим свёртку (разную за каждый год) вектора приращений для каждой программы. Вектор K должен быть составлен таким об-

разом, чтобы выделять приоритет одних показателей над другими это вектор весовых показателей региона. Тогда такое произведение $B_j \times K$ есть региональный эффект проводимой программы. Это уже скаляр (в каждый отдельный год) и для каждой программы имеет одинаковую размерность.

Затраты реализации обычно рассчитываются как сумма капитальных затрат в начале и текущих ежегодных затрат. Обозначим C — все эти затраты для одной программы. Тогда по определению эффективности, эффективность региональной программы логично оценить как отношение полезного эффекта её реализации за все время программы $\sum_j B_j \times K$, где j меняется от момента начала программы до её конца, к затратам C на эту программу.

То есть эффективность региональной программы будет равна

$$E = \frac{\sum_j B_j \times K}{C}.$$

Рассчитав построенную эффективность для каждой альтернативной программы, можно составить список убывающих по эффективности E программ.

Такая методология оценки эффективности региональных программ является первым приближением региональной эффективности, в которой можно учесть не только экономическую, но и социальную составляющую.

Литература

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. — М.: 2001.
2. Инвестиционные проекты регионов России. <http://www.investinginrussia.ru/rus/>.
3. Новожилков В.В. Проблемы измерения затрат и результатов при оптимальном планировании. — М.: Экономика, 1967.
4. Методология Госкомстата по сбору региональной статистики. <http://www.gks.ru/metod/metod.html>.
5. Система показателей социально-экономического развития субъекта Российской Федерации. http://www.gks.ru/metod/sys_pok.zip.
6. Антипов В.И., Пащенко Ф.Ф. Р 1–4 К. — модель воспроизводства ВВП России (материальный аспект). — М.: 2009.

УДК 519.688

А.В. Закиров¹, В.Д. Левченко²

zakirovandrey@gmail.com, vadimlevchenko@mail.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Трёхмерное моделирование эволюции во времени электромагнитного поля в актуальных задачах нанооптики

Современные искусственные оптические устройства и материалы (например, фотонные кристаллы, метаматериалы, скрывающие покрытия, суперлинзы [1]), как правило, имеют очень сложную структуру. Аналитические расчеты распространения электромагнитных волн в таких средах обычно возможны лишь в простейших случаях. При использовании же численного моделирования сложности возникают из-за больших размеров счётной области. Это приводит к необходимости использования эффективных алгоритмов, задействующих максимально возможным образом ресурсы вычислительных систем. В работе представлена реализация такого алгоритма для моделирования уравнений Максвелла.

В общем случае производится полное прямое трёхмерное численное моделирование эволюции во времени электромагнитного поля, описываемого уравнениями Максвелла в ограниченной счётной области с различными граничными условиями. С помощью материальных уравнений задается соответствующая модель среды.

Электромагнитное поле описывается с помощью значений векторов электрического (E , D) и магнитного (B , H) полей, известных в определённые моменты времени. Изменение этих значений описывается с помощью явной разностной схемы FDTD (Finite-Difference Time-Domain) [2].

Варианты используемых граничных условий:

- периодические;
- отражающие;
- предопределённые значения;

— смешанные (комбинация 2-х предыдущих, позволяют моделировать источник необходимых в данной задаче волн на заданной границе);

— поглощающие граничные условия PML (Perfectly Matched Layer) [3].

Для достижения максимальной эффективности расчётов (отношение теоретического времени, исходя из количества тактов процессора, необходимого для одного расчёта и его тактовой частоты к реально получившемуся времени счета) используется локально-рекурсивный нелокально-асинхронный алгоритм [4]. Проведённый анализ показал, что во всех случаях эффективность алгоритма более 40% [5].

Различные среды можно моделировать соответствующими вариациями материальных уравнений. Именно они фактически определяют возможности применимости разработанного программного кода. Ниже приведены возможные модели среды, которые на данный момент реализованы.

Модель дисперсионного диэлектрика. Диэлектрическая и магнитная проницаемости зависят только от координаты точки.

Диэлектрики с дисперсией. В качестве модели дисперсии выступает модель Друде с использованием вектора поляризации.

Проводники. Идеальные проводники можно описывать в виде следствия модели Друде.

Метаматериалы. Под метаматериалами понимаются материалы, имеющие отрицательную диэлектрическую и магнитную проницаемости [6]. Это приводит к отрицательному показателю преломления и существенной частотной дисперсии магнитной и диэлектрической проницаемостей, которую в свою очередь можно также моделировать с помощью модели Друде.

Анизотропные материалы. Анизотропия как диэлектрической, так и магнитной проницаемостей, которая позволяет моделировать обтекаемые поверхности.

В качестве примера ниже показано моделирование преломления электромагнитной волны при падении на призму с отрицательным показателем преломления. На рис. 1 слева показано сечение призмы, в центре — одна из компонент падающего волнового пакета в определённый момент времени в том же сечении, а справа — сечение распределения по пространству этой же компоненты спустя некоторое время. Падающая волна не является строго монохроматической, тем не менее хорошо виден эффект отрицательного преломления.

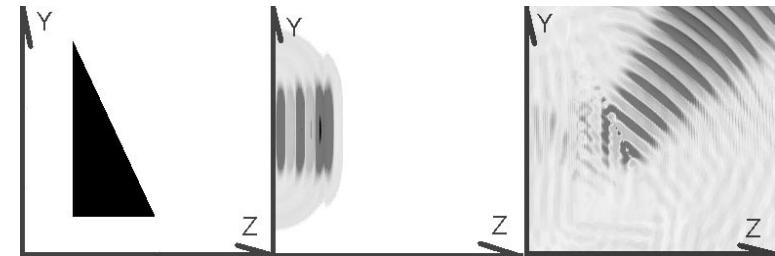


Рис. 1

Литература

1. Pendry J.B. Negative refraction makes a perfect lens // Phys. Rev. Lett. — 2000. — V. 85, N. 18. — P. 3966.
2. Allen Taflove. Advances in Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method. — 1998.
3. Berenger J.-P. Three-Dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves // Journal of Computational Physics. — 1996. — V. 127. — P. 363–379.
4. Левченко В.Д. Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений // Информационные технологии и вычислительные системы. — 2005. — № 1.
5. Закиров А.В., Левченко В.Д. Реализация высокоэффективного кода для трёхмерного моделирования эволюции электромагнитного поля в актуальных задачах электродинамики: / препринт / ИМП им. М.В. Келдыша. — М., 2009. — № 28.
6. Веселаго В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ϵ и μ // УФН. — 1967. — Т. 92, № 3. — С. 517–526.

УДК 519.254

М.Ю. Кудрявцев¹, И.В. Кузнецов²

kmisha@email.ru, ikuz@mitp.ru

¹ Московский физико-технический институт
(государственный университет)² Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН

Алгоритм прогноза сильных падений финансового индекса Dow Jones Industrial Average

Задача прогнозирования в финансовом мире вообще и на рынках акций в частности, всегда была одной из самых острых. Для её решения было разработано множество методов. Поэтому проблема прогноза редких, но очень сильных потрясений на рынках акций представляет собой интересную и актуальную, особенно в свете последних событий, задачу.

В работах [1–2] подробно изучены статистические свойства распределения изменений цен акций на основных рынках ценных бумаг США (NYSE, AMEX, NASDAQ) и индекса S&P500. Установлено, что для редких событий (больших абсолютных значений доходности) имеет место степенное распределение. Поэтому интересен перенос методов прогноза сильных землетрясений на поведение рынка ценных бумаг. Развитие сильных событий, таких, как сильные землетрясения, в иерархических системах подготавливается предварительной активизацией на предшествующих иерархических уровнях. Соответствующее изменение формы распределения успешно используется не только при прогнозе сильных землетрясений [3], но и при прогнозе скачков тяжёлой преступности [4]. Попыткой использовать аналогичный подход и является данная работа.

Объектом изучения является временной ряд дневных цен закрытия индекса DJIA с 1 июля 1997 года по настоящее время.

Рассмотрим величину $\nu_i = \frac{p_i - \langle p_{i-1} \rangle_m}{\langle p_{i-1} \rangle_m}$, (1) где p_i — значение цены закрытия индекса, а $\langle p_i \rangle_m$ — среднее величин p_{i-m+1}, \dots, p_i , а m выбирается таким образом, чтобы охватить временной период порядка полутора месяцев.

Сильным событием назовем день, когда соответствующая ему $\nu_i < -0,08$. Иными словами, в этот день цена закрытия индекса будет меньше среднего значения цен закрытия последних m дней на 8%. Сильные события часто идут подряд одно за другим. Такую группировку сильных событий назовем объектом.

Для построения прогнозных функционалов используется выборочная функция распределения (ВФР) величины ν_i , но уже для $m = 7$ (см. (1)), посчитанная по предыдущим 2,5 месяцам наблюдений.

Составляются два функционала, $F1$ и $F2$, которые следят за изменением формы ВФР. $F1$ рассчитывается по относительному числу больших отрицательных событий с учётом дисперсии отрицательной части ВФР и медианы. $F2$ корректирует работу функционала $F1$, рассчитывая ширину гистограммы ν_i по квартилям.

По превышению $F1$ и $F2$ выбранных порогов объявляется тревога. Результат работы функционалов можно видеть на рис. 1.

Сильные события составили 1,6% от числа всех отсчётов за 11 последних лет, наблюдалось 10 объектов, которые соответствуют таким кризисам американского фондового рынка, как «чёрный вторник» 1997 года, кризис августа 1998 года, падение после 11 сентября 2001 и др.

В данной работе был предложен алгоритм прогноза сильных падений индекса DJIA и доказана его математическая и экономическая нетривиальность. Проведены тесты чувствительности характеристик работы алгоритма по отношению к изменению входящих в него параметров, проведена проверка на материале, не входящем в материал обучения. Алгоритм оказался способен предсказывать все объекты (параметры были выбраны по первым восьми) и прошёл верификацию, правильно определив последние три резких снижения значений индекса.

Литература

1. *Gopikrishnan P., Meyer M., Amaral L.A.N., Stanley H.E.* Inverse cubic law for the distribution of stock price variation // *Eur. Phys. J. B.* — 1998. — V. 3. — P. 139–140.
2. *Mantegna R.N., Stanley H.E.* Scaling behavior in the dynamics of an economic index // *Nature.* — 1995. — V. 376. — P. 46–49.
3. *Nonlinear Dynamics of the Lithosphere and Earthquake Prediction* / ed. by Keilis-Borok V.I., Soloviev A.A. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003.

4. Кузнецов И.В., Родкин М.В., Серебряков Д.В., Урядов О.Б. Иерархический подход к динамике преступности // Новое в синергетике: новая реальность, новые проблемы, новое поколение. Часть 1. — М.: Радиотехника, 2006. — С. 103–118.

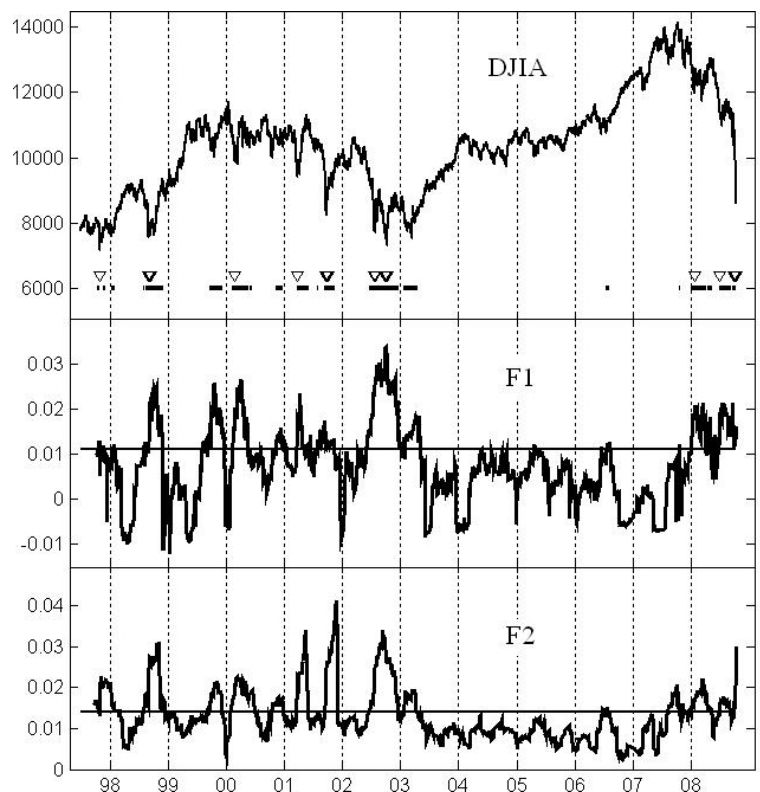


Рис. 1. График работы функционалов. Отмечены значения индекса DJIA и функционалов $F1$ и $F2$ в течение всего времени (горизонтальная ось) прогноза. Под индексом сплошными линиями обозначено время тревоги и треугольниками — объекты. На графиках функционалов горизонтальными прямыми обозначены пороги, по одновременному превышению которых объявляется тревога

УДК 519.688

И.С. Миргородский

auresult@mail.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Применение бинарных ARMA моделей для одновременного анализа нескольких временных рядов

Построение прогнозов занимает ключевую роль в современном анализе временных рядов. При этом результат существенным образом зависит от характера исследуемых данных. В данном обзоре внимание сконцентрировано на анализе финансовых рядов.

В статье [1] выдвигается и обосновывается гипотеза о том, что ряды для доходностей финансовых инструментов плохо предсказуемы, тогда как знаки доходностей, то есть периоды роста и падения цен, а также амплитуды (волатильности) доходностей, предсказуемы хорошо. Автор использует эту гипотезу в качестве базовой для построения моделей предсказания знаков временных рядов.

В статье [2] обосновывается утверждение о том, что классические методы моделирования бинарных временных рядов, такие, как марковские модели, не отражают поведения реальных данных. С помощью анализа функций автопостоянства делается вывод о том, что бинарные модели авторегрессии и скользящего среднего (ARMA) гораздо лучше справляются с этой задачей. На основании этого аргумента автор настоящего обзора использует бинарные ARMA модели для построения прогнозов исследуемых временных рядов.

Однако большая часть современных работ на данную тематику посвящена одномерному моделированию и прогнозированию. Автор стремится к преодолению этой трудности с помощью идей, почерпнутых в статьях [3, 4, 5]. Многомерный анализ зачастую сопряжен с повышенными вычислительными трудностями в связи с большим числом параметров в моделях. В работе с помощью упомянутых идей удаётся обойти эту проблему путём построения модели из нескольких независимых составляющих — таким образом, прогнозирование

многомерных рядов сводится к прогнозированию нескольких обособленных моделей.

Естественным способом проверки качества методов прогнозирования для этого класса данных является построение торговых стратегий, предписывающих приобретение актива, если его цена низка и ожидается её рост, и продажу, если цена высока и ожидается падение. Прибыльность стратегии является свидетельством эффективности метода прогнозирования.

В практической части работы рассматривается случай двух активов сначала при нулевом, затем при не нулевом уровне транзакционных издержек. Из полученных результатов можно сделать вывод, что предложенный многомерный подход даёт значимое улучшение прогнозов по сравнению с одномерными моделями. Пример приведён на рис. 1: жирной линией изображен результат стратегии, основанной на авторской модели (двумерной), тонкой и пунктирной линиями изображен результат для тестовых стратегий (одномерных). В нижней части графика изображены решения, принимаемые двумерной стратегией.

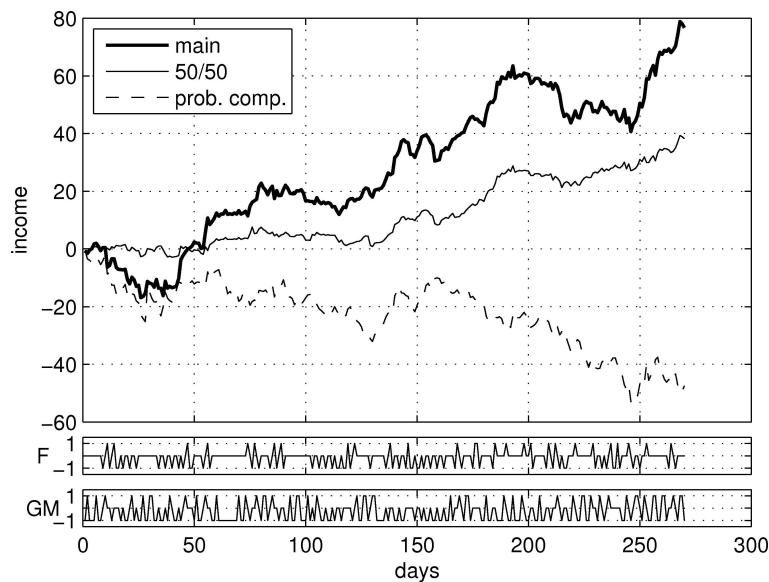


Рис. 1

Литература

1. *Christoffersen P.F., Diebold F.X.* Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics // *Management Science*. — 2006. — N. 52. — P. 1273–1288.
2. *Startz R.* Binomial Autoregressive Moving Average Models With an Application to U.S. Recessions // *Journal of Business & Economic Statistics*. — 2008.
3. *Ekholm A., Smith P.W.F., McDonald J.W.* Marginal regression analysis of a multivariate binary response // *Biometrika*. — 1995. — N. 82. — P. 847–854.
4. *Ekholm A., McDonald J.W., Smith P.W.F.* Association Models for a Multivariate Binary Response // *Biometrics*. — 2000. — N. 56. — P. 712–718.
5. *Anatolyev S.* Multi-market direction-of-change modeling using dependence ratios // *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 2009. — V. 13.

УДК 517.9

П.А. Покаташкин

P.A.Pokatashkin@gmail.com

Московский инженерно-физический институт (Национальный исследовательский ядерный университет)

Численное моделирование блистеринга в металлических зеркалах

При обработке поверхностей плазмой в приборах или устройствах, когда плазма граничит с поверхностями, возникают явления, изменяющие её структуру и физические характеристики. В связи с тем, что лабораторно-технические эксперименты затруднены из-за малых масштабов и времен, активно развиваются методы численного моделирования процессов.

Поскольку процесс образования гелиевых пузырьков при облучении поверхности образца приводит к нежелательным изменениям

свойств материалов (охлаждению, изменению оптических, электро-механических, пластических и других свойств), он постоянно изучается с тех пор, как гелиевые пузырьки были обнаружены экспериментально. В численном эксперименте исследуются физические процессы взаимодействия плазмы с поверхностью. Например, активно моделируется фазовый переход 1-го рода на нелинейной стадии, когда возникают зародыши пузырьков газовой фазы в кристаллической решётке при воздействии потока ионов на образец.

Для моделирования процесса блистеринга использовалось кинетическое уравнение математической физики в частных производных для эволюции функции распределения $f(g, r, t)$ по координатам и размерам блистеров [1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_r(g,t)}{\partial t} = \frac{\partial [D_g(g,t) \frac{\partial f_r(g,t)}{\partial g}]}{\partial g} + \frac{1}{kT} \frac{\partial [D_g(g,t) f_r(g,t) \frac{\partial (\Delta\Phi(g, \vec{r}, t))}{\partial g}]}{\partial g} + S_{He}, \\ f_r(g,0) = f_{0g}, \frac{\partial f_r(g,t)}{\partial g} \Big|_{g=2} = 0, f_r(g,t) \Big|_{g < 3} = 0, \end{cases}$$

где D_g — коэффициент диффузии, g — количество атомов в блистере, r — его радиус-вектор, T — температура, k — постоянная Больцмана. S_{He} — интенсивность источника гелия.

Стохастическое уравнение Ито в форме Стратоновича кинетического уравнения для изменения в пространстве размеров [1] имеет вид [2]

$$\frac{dg}{dt} = -\frac{1}{kT} D_g(g,t) \frac{\partial \Delta\Phi(g,t)}{\partial g} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_g(g,t)}{\partial g} + \sqrt{2D_g(g,t)} \xi(t),$$

$$t_0 \leq t \leq T_{finish}, g(t_0) = g_0 \in [g_{min}, g_{max}], g(t) > 2.$$

Аналогично выглядит уравнение для изменения в пространстве координат.

Блистеры взаимодействуют с поверхностями слоёв многослойного зеркала, при этом теоретически выведенные формулы для потенциала косвенного упругого взаимодействия (через возмущение акустических фононов и фриделевских осцилляций электронной плотности кристаллической решётки) имеют вид [3]

$$U(z) = \sum m \left(\frac{0,2b}{|z - z_0|^3} + \frac{a \cos(c(z - z_0))}{|z - z_0|^3} \right),$$

где a, b, c — параметры границы, m — её эффективная масса, z_0 — её координата.

При решении поставленной задачи применен метод расщепления по физическим процессам и метод стохастического аналога.

Наблюдается нелинейный характер зависимости среднего размера блистера от времени. Моделировался фрагмент многослойного технологического зеркала, состоящего из 5 слоёв Si и 5 слоёв Mo. Посчитаны напряжения в слоях (рис. 1) по формуле [4] (см. 1)

$$\sigma^p = \sigma_0 \sum_{i=1}^N \frac{\frac{1}{3} \ln(g_i) + 0,4}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} g_i^{2/3}.$$

На момент завершения расчёта напряжение в образце, посчитанное по вышеприведённой формуле, имело вид представленный на рис. 1.

Автор выражает благодарность научному руководителю Змиевской Г.И., а также Бондаревой А.Л. и Иванову А.В. за плодотворное творческое сотрудничество.

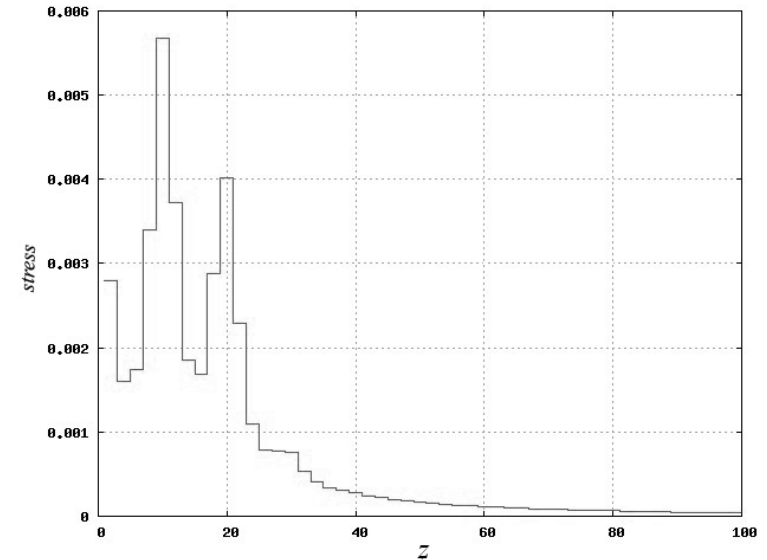


Рис. 1. График зависимости напряжений в образце на момент окончания расчёта

Н.Н. Попеску

nic2k@list.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Стохастический резонанс в системе монодоменных ферромагнитных микрочастиц

Одним из наиболее ярких и относительно простых примеров поведения нелинейных систем при воздействии шума является эффект стохастического резонанса (СР). Стохастический резонанс — немонотонная зависимость отклика системы от интенсивности шума (температуры) на внешнее периодическое воздействие. Исследования последних лет показали, что в нелинейных системах воздействие шума может индуцировать новые более упорядоченные режимы, вызывать рост усиления и увеличение отношения сигнал/шум и т. д. Например, в статье Калмыкова [3] получены аналитические выражения для времени релаксации намагниченности для однодоменных ферромагнитных частиц с кубической анизотропией типа легкая ось в присутствии постоянного поперечного поля. Вывод выражений основан на использовании метода расчёта скорости выхода броуновской частицы из потенциальной ямы, применимого при различных значениях коэффициента затухания.

В задаче рассматривается ансамбль монодоменных ферромагнитных невзаимодействующих микрочастиц. Частицы находятся во внешнем магнитном поле, состоящем из двух компонент: постоянная часть, направленная по оси Z : $\overline{H}_0 = (0, 0, H_0)$, и переменная часть, направленная по оси X . Переменное поле изменяется по закону гармонических колебаний $\overline{H} = (A \sin \Omega t, 0, 0)$, где A — амплитуда переменного магнитного поля. Энергию анизотропии, удерживающей вектор магнитного момента частиц в направлении минимума энергии, раскладываем в ряд по степеням магнитного момента. Движение одной частицы с магнитным моментом m_i описывается уравнением

Ландау–Лифшица:

$$\frac{\partial \overline{m}_i}{\partial t} = \alpha \left[\overline{m}_i \times \overline{H}_i^{eff} \right] - \gamma \left[\overline{m}_i \times \left[\overline{m}_i \times \overline{H}_i^{eff} \right] \right],$$

где \overline{H}_i^{eff} — вектор эффективного магнитного поля, которое выражается через полную энергию системы следующим образом: $\overline{H}_i^{eff} = -\frac{\partial W}{\partial \overline{m}_i}$.

При этом в эффективном поле мы учитываем взаимодействие с внешним полем и анизотропию:

$$\overline{H}_i^{eff} = \overline{H}_i^{anis} + \overline{H}^{ext},$$

$$\overline{H}_i^{anis} = K(am_i)^3 \overline{a}.$$

В энергии анизотропии учитываем только коэффициент при третьей степени магнитного момента. Это даёт более выраженный эффект, чем учёт коэффициента при первой степени. Первоначально полагаем, что ось анизотропии у всех частиц одинакова и направлена соответственно $\overline{a} \parallel \overline{H}_0$. Ансамбль частиц описывается функцией распределения, для эволюции которой используется уравнение Фоккера–Планка, предложенное ещё Брауном в 1963 году:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f(\overline{m}_i, t)}{\partial t} + \alpha \left[\overline{m}_i \times \overline{H}_i^{eff} \right] \nabla_m f = \\ & = \gamma \nabla_m \left(\left[\overline{m}_i \times \left[\overline{m}_i \times (\overline{H}_i^{eff} - T \nabla_m) \right] \right] f \right), \end{aligned}$$

где T — шум (температура), f — функция распределения, а \overline{m}_i — трёхмерный вектор магнитного момента частицы. Для численного решения уравнения Фоккера–Планка используется метод стохастического аналога. Расчёты проводятся при следующих параметрах: количество частиц системы $N = 1000$, коэффициент при скорости изменения магнитного момента частицы в уравнении Ландау–Лифшица (ЛЛ) $\alpha = 1$, коэффициент диссипации из уравнения ЛЛ — эффекта, заставляющего разворачиваться магнитные моменты по направлению постоянного магнитного поля, — равен $\gamma = 0,05$. Диапазон изменения температуры системы T от 0.2 до 1.4 единицы измерения температуры $\Delta_T = \Delta_m \Delta_H$, где $\Delta_m = 1$, а $\Delta_H = |H_0|$. Диапазон варьирования частоты переменного поля Ω от 0.1 до 10 значения обратной величины единицы измерения времени $\Delta_t = \frac{1}{\alpha \Delta_H}$. Усреднение

проводится с помощью функции распределения по времени и по всем частицам в выделенном объёме. Под откликом системы I понимаем значение интеграла Фурье усреднённых магнитных моментов частиц, вращающихся на частоте внешнего переменного поля Ω , отнесенного к амплитуде A :

$$I = 2 \frac{\sqrt{\left(\int_0^{t_{\max}} \langle m \rangle \sin \Omega t dt\right)^2 + \left(\int_0^{t_{\max}} \langle m \rangle \cos \Omega t dt\right)^2}}{A}.$$

Система уравнений решается численно на массиве траекторий частиц. Численные схемы реализованы в виде производительного кода на языках C++ и Python. Для управления расчётами используется пакет RACS (Results and Algorithm Control Systems) [1]. Этот пакет берет на себя всю черную работу по реализации интерфейса, упорядоченного хранения и поиска информации. На первом этапе нашего моделирования рассматривается идеализированный случай, когда направление осей анизотропии частиц совпадают с направлением внешнего магнитного поля $a \parallel H_0$. Далее учитываем характер случайности распределения осей анизотропии по всевозможным направлениям и проводим усреднение по углам φ и θ , которые меняются соответственно в пределах $[0, 2\pi]$ и $[0, \pi]$. В обоих случаях имеет место эффект стохастического резонанса, но при учете произвольности направления осей анизотропии эффект менее выражен.

Явление стохастического резонанса, будучи по существу фундаментальным свойством магнитных систем в определённых условиях, может в дальнейшем составить основу метода исследования большого класса магнитных материалов, результата их обработки, процессов их деградации и т. д.

На рис. 1 $\bar{H}_0 = 1$, $K = 2$. При больших температурах резонансный отклик наблюдается на частоте $\Omega \cong 1$ — величина амплитуды постоянного магнитного поля. При малых температурах существенный вклад в отклик системы дают частицы с магнитным моментом, развернутым по полю $\Omega \cong 1 + 2$.

Литература

1. *Иванов А.В.* Кинетическое моделирование динамики магнетиков // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 10. — С. 89–104.

2. *Исаев А.Г.* Стохастический резонанс в мелкодисперсных магнетиках: механизм подбарьерного перемагничивания // Физика твёрдого тела. — 2001. — Т. 43, № 7. — С. 1216–1219.

3. *Кальмыков Ю.П., Коффи В.Т., Титов С.В.* О зависимости времени релаксации намагниченности однодоменных ферромагнитных частиц от коэффициента затухания в модели Брауна // Физика твёрдого тела. — 2005. — Т. 47, № 2. — С. 260–267.

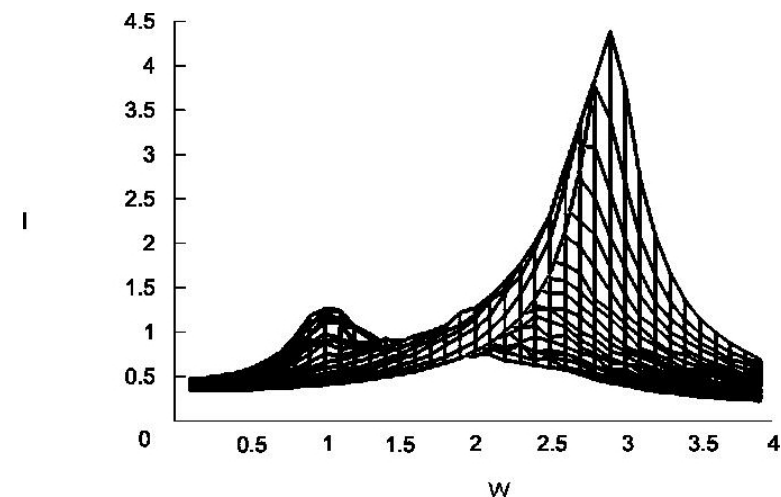


Рис. 1. Двухмный потенциал, где проявляются два максимума $I(\Omega)$

УДК 519.233.5

А.А. Румянцев

rumyantsev_aa@mail.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Прогнозирование электропотребления в условиях российского рынка электроэнергии

Новая структура энергетики. После реформирования РАО ЕЭС России в 2005–2006 гг. и разделения региональных энергетических компаний на генерирующие, сетевые и сбытовые компании последним пришлось решать задачу ежедневного прогнозирования почасового потребления. Данный прогноз необходим для покупки электроэнергии на оптовом рынке электроэнергии и мощности (ОРЭМ).

Регламентами работы на ОРЭМ к точности прогнозирования потребления электроэнергии предъявляются следующие требования:

- ошибка прогноза, которую сбытовая компания может транслировать в виде тарифа на конечного потребителя, не должна превышать 3%;

- количество часов в году, когда ошибка прогнозирования потребления электроэнергии превысила 15%, не должно превышать 200, иначе компанию могут лишиться статуса участника ОРЭМ, что в свою очередь означает потерю возможности покупки электроэнергии и фактическую ликвидацию компании.

Задача разработки эффективного алгоритма прогнозирования электропотребления имеет исключительную важность не только для участников рынка электроэнергии, но и для всего государства, так как от успешности её решения зависит общая эффективность всей энергосистемы.

Работы по разработке подобных алгоритмов ведутся во многих странах мира, однако для российского рынка необходим свой метод, который будет учитывать особенности функционирования этого рынка.

Рассматриваемый ряд $c(t)$ характеризуется следующими параметрами. Среднее значение за весь рассматриваемый период равно

$$\bar{p} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N c(t) = 845,57,$$

Относительное среднеквадратичное отклонение (ОСО или вариация):

$$\sigma = \frac{1}{\bar{p}} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (c(t) - \bar{p})^2} \cdot 100\% = 9,31\%.$$

Среднесуточные значения ряда $c(t)$ в среднем за месяц и за весь период наблюдений показывают также наличие и недельной структуры.

Методика прогнозирования. На основании корреляционного анализа была получена следующая формула для прогноза значений ряда:

$P_t = (P_{t-25} \cdot r_1 + P_{t-23} \cdot r_2) \cdot a + P_{t-24} \cdot (1 - a)$, где r_1, r_2 — коэффициенты регрессии значения ряда в зависимости от предыдущего и последующего значений;

a — коэффициент сглаживания, который определяется по результатам прогнозирования значений на предыдущие сутки.

Для прогнозирования значения ряда P_t в момент времени t рассчитываются коэффициенты регрессии для данного часа и соседних часов. После этого они складываются с учётом весов со значением ряда в данный час предыдущих суток. Сложение происходит со взвешиванием через коэффициент a , который рассчитывается на основании прогноза и факта предыдущих суток. Пробирая значения коэффициента от 0 до 1 включительно с шагом 0,01 мы выбираем то значение коэффициента, при котором прогноз на сутки ранее оказался наилучшим.

Результаты прогнозирования. В результате прогнозирования предложенным методом получены следующие результаты:

- средняя ошибка прогноза — 2,49%;
- количество часов с ошибкой прогноза более 15% — 15 за 6 месяцев.

Достиженные результаты полностью соответствуют поставленной задаче, однако, вероятно, могут быть улучшены (рис. 1, 2).



Рис. 1. Часть исходного ряда данных (4 недели)



Рис. 2. Результаты прогнозирования (пунктирная линия — прогноз, сплошная линия — фактическое потребление)

УДК 519.254:004.9:614

А.В. Целиков

atselikov@gmail.com

Московский государственный индустриальный университет

Методика обработки пропусков и некорректных данных в области анализа сведений о заболеваемости

Проблема полноты и достоверности исходных данных является одной из ключевых для систем поддержки принятия решений. Задачи определения характеристик, имеющих некорректные значения, а также их исправления зачастую могут быть решены только с учётом особенностей предметной области.

Спецификой большинства показателей заболеваемости является отсутствие нормального распределения [1], вследствие чего ряд методов заполнения пробелов в данных, такие как метод ближайших соседей, метод Бака, метод Барлетта, не могут напрямую быть применены в рассматриваемой области [2]. Кроме того, особенностями медико-статистических данных является наличие для ЛПУ (лечебно-профилактического учреждения) сведений по разным отчётным годам, которые также целесообразно учитывать для обработки пропусков и некорректных данных.

В работе представлена модель проверки корректности значений с использованием метода самоорганизующихся карт Кохонена, позволяющего не только разбивать исследуемую совокупность объектов на небольшое количество однородных групп, но и проводить разведочный анализ данных, а также проецировать исходное многомерное пространство характеристик в пространство с более низкой размерностью [3, 4].

Обучение карты состоит из последовательности коррекций векторов-нейронов, для модификации весовых коэффициентов которых используется следующая формула:

$$w_i(l+1) = w_i(l) + h_{ci}(l)(x(l) - w(l)),$$

где w — нейрон (сегмент, составляющий карту), l — номер эпохи, вектор $x(l)$ — выбирается случайно из обучающей выборки на итера-

ции l , функция $h(l)$ — функция соседства нейронов, которая является невозрастающей зависимостью от времени и расстояния между нейроном — победителем и соседними нейронами в сетке.

При этом наличие объектов, характеризующихся параметрами, имеющими достаточно отдаленные значения от значений других объектов, оценивается по матрице расстояний и соответствующей ей раскраски результирующей карты. Большое значение говорит о сильном отличии нейрона от окружающих и его принадлежности к другому классу.

В качестве модели исправления некорректных значений в работе предлагается следующий оптимизационный подход. Пусть задано множество значений медико-статистических показателей для различных временных периодов t :

$$X^t = \{x_{ij}^t | i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\},$$

где n — число объектов (ЛПУ), m — характеристик, $t = 1, \dots, \tau$ — идентификатор периода.

Для каждого периода существует подмножество пустых значений:

$$X^{t'} = \{x_{ij}^{t'} | x_{ij}^{t'} \in X^t; x_{ij}^{t'} = 0; j < k\},$$

где k — количество независимых переменных.

Здесь и далее под пропусками будем понимать как незаполненные, так и определённые как некорректные значения характеристик. Требуется построить оценки пустых значений $\bar{x}_{ij}^{t'}$ для заданного периода времени t .

В работе показано, что исходя из особенностей предметной области, за базовый метод заполнения пропусков целесообразно принять алгоритм регрессии. При этом используется следующее составное ограничение исходного набора при выборе объектов для дальнейшего рассмотрения: как по классу рассматриваемых объектов (типов ЛПУ), так и по степени близости к объекту с пропущенными значениями характеристик. Для учёта последнего применяется алгоритм определения k -ближайших соседей, в котором для снижения влияния выбросов в качестве базовой меры расстояний выбрана метрика по Хеммингу [5]:

$$d_H = \sum_p^m |x_{ip}^t - x_{ip}^{t'}|.$$

При этом формируется ряд регрессионных моделей с использованием всех возможных комбинаций наборов независимых входных признаков. В качестве критерия оценки качества результата и выбора конкретной модели регрессии используется оптимизационный подход: после последовательного применения всех алгоритмов наилучшая оценка будет формироваться моделью, дающей наименьшую ошибку для сведений других исторических периодов:

$$\min \frac{1}{k} \sum_t \sum_k |x_{ij}^t - \bar{x}_{ij}^t|.$$

Литература

1. *Реброва О.Ю.* Статистический анализ медицинских данных. Применение пакета прикладных программ STATISTICA. — М.: Медиа Сфера, 2002. — 312 с.
2. *Zloba E., Yatskiv I.* Statistic methods for handling incomplete data // Computer Modeling & New Technologies. — 2002. — V. 6, N. 1. — P. 51–61.
3. *Кохонен Т.* Самоорганизующиеся карты. — М.: БИНОМ. — 2008. — 655 с.
4. *Лочмеле Р.Р.* Современные количественные методы экономического анализа: самоорганизующиеся карты Кохонена (СОК) // Государственное управление. — 2003. — Т. 1. — С. 1–5.
5. *Барсегян А.А.* [и др.]. Методы и модели анализа данных: OLAP и Data Mining. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 336 с.

И.А. Эсселевич

arseberg@newmail.ru

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Определение достижения спортсменом предельной нагрузки в ходе тестирования

Для определения состояния здоровья спортсмена и уровня его работоспособности применяются процедуры нагрузочного тестирования. Материалом данной работы послужили результаты нагрузочных тестов 133 футболистов-мужчин Российской Премьер-лиги. Во время тестирования испытуемые бегут «вверх» по дорожке, установленной под небольшим углом к горизонту. Скорость бега — принудительная, задается врачом. Продолжительность испытания не превышала 20 минут. Использовался протокол испытания со ступенчато увеличивающейся нагрузкой (длительность каждой ступени 2 мин).

Тестирование завершали при выполнении хотя бы одного из критериев [1] достижения максимального потребления кислорода (МПК) — одной из основных характеристик аэробных возможностей организма [1, 2], связанных с величиной предельных нагрузок в упражнениях на выносливость. Также разрешалось прекращать тестирование по требованию испытуемого. В силу последнего, а также в связи с тем, что принятые у физиологов критерии достижения МПК плохо формализованы, врачу, проводящему тестирование, приходится принимать решение о том, достигнута или нет предельная нагрузка во время испытания. От принятого решения зависит интерпретация результатов тестирования.

Целью работы является построение модели принятия решений врачом по итогам нагрузочных испытаний о достижении спортсменом предельной нагрузки. Результатом должен быть алгоритм (решающее правило), решающий задачу классификации без врача.

Источником прототипа решения послужило мнение врача-эксперта. Ему было предложено на основе графического протокола результатов исследования для каждого спортсмена указать, достиг он предельной нагрузки или нет. Поскольку все показатели регистрируются на каждый вдох/выдох, для устранения артефактов использовалось медианное сглаживание [3].

Врачу-эксперту разрешалось отказываться от принятия решения. В результате из 133 случаев 34 классифицировались как «спортсмен достиг предельной нагрузки» (класс «Д»), 14 как «спортсмен не достиг предельной нагрузки» (класс «Н»), остальные 85 — «неизвестно». Для построения решающего правила и его контроля классы были случайным образом разбиты пополам: две выборки по 17 спортсменов из класса «Д» и две выборки по 7 спортсменов из класса «Н».

От решающего правила, кроме близости к классификации эксперта, дополнительно требовалось выполнение критерия стабильности для каждого классифицируемого случая: решающее правило, классифицирующее результаты теста, обрезанные в более ранний момент времени, как «Д», не должно классифицировать результаты теста, обрезанные в момент в более поздний момент времени, как «Н». (Состояние «достиг предельной нагрузки» не должно предшествовать состоянию «не достиг предельной нагрузки».)

Временной интервал в конце тестирования с длиной не меньшей некоторого временного порога назовем финальным интервалом. Решающее правило строилось на финальных интервалах.

Сначала было построено 8 простых (один показатель и одно значение временного порога) решающих правил. При их построении перебирались различные значения временного порога, для каждого из которых пороговые значения показателей определялись с помощью статистического критерия Смирнова [4]. Отбирались правила с чистым разделением классов (классификация по правилу совпадает с априорной), удовлетворяющие критерию стабильности для всех представителей обучающей выборки.

Значение итогового решающего правила (ИРП) определяется по 8-ми значениям простых решающих правил следующим образом: «Если все 8 значений — «неизвестно», то значение ИРП — «неизвестно». Иначе значения «неизвестно» отбрасываются. Если все остальные значения равны «Д», значение ИРП — «Д». Если все остальные значения равны «Н», значение ИРП — «Н». Во всех остальных случаях значение ИРП — «неизвестно»».

ИРП чисто разделяет классы «Д» и «Н» и удовлетворяет критерию стабильности на обучающей выборке. На контрольной выборке ИРП относит все 17 представителей класса «Д» к классу «Д», а из 7 представителей класса «Н» 6 относит к классу «Н», а одного классифицирует как «неизвестно». Для всех случаев из контрольной выборки ИРП удовлетворяют критерию стабильности.

Особое внимание в ходе работы было уделено проблеме стабильности решающих правил, в том числе устойчивости к флюктуациям измеряемого сигнала. Повышению стабильности ИРП способствуют: 1) предварительное медианное сглаживание измеряемых сигналов; 2) выделение признаков, характеризующих финальные интервалы (на которых строится классификация) в целом; 3) выделение при формулировке простых правил некоторой переходной зоны, разделяющей два класса, в которой правило отказывается от классификации; 4) представление ИРП в виде композиции нескольких правил, относящихся к различным физиологическим показателям и построенных на финальных интервалах разной длины.

ИРП было также применено для неклассифицированных врачом-экспертом случаев: из 85 таких случаев 50 классифицируются как «Д», 20 как «Н» и 15 как «неизвестно». Для всех 85 случаев удовлетворяется критерий стабильности. То есть ИРП удовлетворяет критерию стабильности для всех 133 находящихся в исследовании спортсменов и отказывается от классификации в 16 случаях (12%).

Работа частично поддержана РФФИ. Грант 07-01-00376а.

Литература

1. *K. Wasserman*. Hansen J.E., Sue D.Y. et al. Exercise testing and interpretation. — Lippincott Williams&Wilkins, 2005.
2. *Jones A.M.* and Poole D.C. Oxygen uptake kinetics in sport, exercise and medicine. — Routledge, Taylor&Francis Group, London and New York, 2005.
3. *Тюрин Ю.Н.* Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере / под. ред. В.Э. Фигурнова. — М.: 1998. — 528 с.
4. *Котов Ю.Б.* Новые математические подходы к задачам медицинской диагностики. — М.: УРСС, 2004. — 328 с.

Список представленных организаций

- Амурский государственный университет
 Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
 Государственный университет Высшая школа экономики
 Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН
 Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
 Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
 Институт проблем транспорта им. Н.С. Соломенко РАН
 Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
 Институт системного анализа РАН
 Международный институт теории прогноза землетрясений
 и математической геофизики РАН
 Московский государственный индустриальный университет
 Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
 Московский инженерно-физический институт (Национальный
 исследовательский ядерный университет)
 Московский физико-технический институт
 (государственный университет)
 Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого
 ООО «Компетентум Про»
 ООО «Яндекс»
 Российский университет дружбы народов
 Санкт-Петербургский государственный университет
 Томский государственный университет систем управления
 и радиоэлектроники
 Тульский государственный университет

Именной указатель

А	Е	Кузнецов И.В. 165
Агафонов С.И. 108	Евстафьев А.И. 26	Л
Б	Егоров А.А. 133	Лашин В.А. 43
Белов П.А. 124	Еремин И.Е. 136	Левченко В.Д. 162
Бобрик П.П. 10	Ж	Лукашенок А.В. 105
Бойченко И.В. 142	Жилиндина О.В. 136	Лукьянов А.К. 142
Буканина В.И. 128	Жичкина Е.С. 29	М
Бурнаев Е.В. 103, 118	Жукова А.А. 31	Макаров К.В. 87
В	З	Мартьянов М.А. 46
Ващенко М.П. 14	Закиров А.В. 162	Меньшиков И.С. 71, 90, 93
Вржещ В.П. 16	И	Меньшикова О.Р. 75, 90
Г	Исаев М.И. 111	Мингалиев Д.А. 93
Гасников А.В. 19	К	Миргородский И.С. 168
Гасникова Е.В. 19, 71	Казейкина А.В. 34	Молчанов Е.Г. 48
Геворкян М.Н. 131	Катаев М.Ю. 142	Н
Голубцов А.А. 73	Клочков В.В. 60	Никоненко Д.С. 103, 118
Горбачев В.А. 23	Колмогоров Д.К. 139	О
Грачев А.Н. 105, 108	Колногоров А.В. 115	Обросова Н.К. 51
Д	Косьяненко А.В. 37, 81	Оленев Н.Н. 23
Двуреченская М.А. 75	Котельникова А.Г. 40	Орлов А.А. 120
Двуреченский П.Е. 78	Кудрявцев Е.Л. 84	П
Десятов И.В. 159	Кудрявцев М.Ю. 165	Петров А.А. 4
Диваков Д.В. 128		
Дорн Ю.В. 19		

Пильник Н.П. 31, 54	Соболев М.С. 122	Ц
Платонов В.В. 96	Ставцев А.В. 133	Целиков А.В. 180
Покаташкин П.А. 170	Т	Ч
Попеску Н.Н. 173	Тетерев Н.А. 152	Чуканов С.В. 63, 67
Поспелов И.Г. 16, 31, 54	Тимченко М.В. 60	Ш
Р	У	Шананин А.А. 51, 57
Рудева А.В. 57	Утемов А.Е. 98	Шурыгин С.В. 108
Румянцев А.А. 177	Ф	Э
С	Фомичев А.А. 105	Эсселевич И.А. 183
Севастьянов А.Л. 146	Х	Я
Семёнов В.В. 144	Хохлов А.А. 128, 155	Яминов Р.И. 100
Семкин Ю.Ю. 149	Хохлов М.А. 16, 31	

Содержание

Пленарное заседание	4
<i>Петров А.А.</i> Математическое моделирование и анализ эволюции экономики России	4
Секция математического моделирования в экономике, социологии и экологии	10
<i>Бобрик П.П.</i> К вопросу о сравнении радиально-кольцевых сетей	10
<i>Ващенко М.П.</i> Модель Кантора–Липмана в непрерывном времени	14
<i>Вржещ В.П., Поспелов И.Г., Хохлов М.А.</i> Нелинейное дезагрегирование макроэкономической статистики	16
<i>Гасников А.В., Гасникова Е.В., Дорн Ю.В.</i> О некоторых примерах конечных однородных эргодических марковских процессов с огромным числом состояний	19
<i>Горбачев В.А., Оленев Н.Н.</i> Имитационная модель добывающего сектора экономики Монголии с учётом теневого оборота	23
<i>Евстафьев А.И.</i> Устойчивая формула построения виртуальных проекций лучевого преобразования для конусной схемы сканирования	26
<i>Жичкина Е.С.</i> Неединственность решения проблемы Кальдерона в применении к задаче маскировки объектов	29
<i>Жукова А.А., Поспелов И.Г., Хохлов М.А., Пильник Н.П.</i> Опыт моделирования экономики Казахстана в период кризиса	31
<i>Казейкина А.В.</i> Устойчивость решения уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса вида бегущей волны	34
<i>Косьяненко А.В.</i> Опыт оценки влияния крупных государственных проектов с использованием моделей общего экономического равновесия	37
<i>Котельникова А.Г.</i> Применение модели энтропийной декомпозиции при решении задач пространственной макроэкономики	40

<i>Лапшин В.А.</i> Построение практической непараметрической модели динамики срочной структуры процентных ставок	43
<i>Мартынов М.А.</i> О построении арбитражной хеджирующей стратегии на рынке с активами, зависящими от одинакового случайного фактора	46
<i>Молчанов Е.Г.</i> Об одной проблеме моментов, возникающей при оценке эластичности замещения производственных факторов на микроуровне	48
<i>Обросова Н.К., Шананин А.А.</i> Влияние торговой инфраструктуры на функционирование депрессивных отраслей	51
<i>Пильник Н.П., Поспелов И.Г.</i> Описания взаимодействия реального и монетарного секторов экономики в динамической модели общего равновесия	54
<i>Рудева А.В., Шананин А.А.</i> Моделирование сберегательного поведения с учётом ограничения ликвидности	57
<i>Тимченко М.В., Клочков В.В.</i> Методы прогнозирования спроса на услуги новых видов скоростного пассажирского транспорта	60
<i>Чуканов С.В.</i> Нестационарная модель мировой экономической динамики	63
<i>Чуканов С.В.</i> О динамической сложности оптимальной экономической динамики	67
Секция экспериментальной экономики	71
<i>Гасникова Е.В., Меньшиков И.С.</i> Сегментация стабильнографических рядов с линейным трендом	71
<i>Голубцов А.А.</i> Стохастически устойчивые состояния игры SB	73
<i>Двуреченская М.А., Меньшикова О.Р.</i> Об иерархической кластеризации психологических и поведенческих характеристик участников сетевого двойного аукциона с закрытыми заявками	75
<i>Двуреченский П.Е.</i> Двойной аукцион по единой цене с тремя единицами товара: теория и эксперимент	78
<i>Косьяненко А.В.</i> Особенности численного решения задачи об оптимальной структуре сбережении населения	81

<i>Кудрявцев Е.Л.</i> Игровая модель явки на выборы: теория и эксперимент	84
<i>Макаров К.В.</i> Оптимальные смешанные стратегии для двойного аукциона с неполной информацией	87
<i>Меньшикова О.Р., Меньшиков И.С.</i> Должность в администрации города и психологический тип сотрудника: экспериментальное исследование	90
<i>Мингалиев Д.А., Меньшиков И.С.</i> Экспериментальный анализ торговой игры с информированным участником	93
<i>Платонов В.В.</i> Экспериментальная экономика как инструмент анализа экономических процессов	96
<i>Утемов А.Е.</i> Стратегии обучения в одной динамической игре голосования	98
<i>Яминов Р.И.</i> Свойства модифицированного равновесия	100

Секция математических основ управления . . . 103

<i>Бурнаев Е.В., Никоненко Д.С.</i> Поиск момента разладки в потоке событий	103
<i>Грачев А.Н., Лукашенко А.В., Фомичев А.А.</i> Моделирование и идентификация электротермических процессов в физическом базисе для целей управления	105
<i>Грачев А.Н., Шурьгин С.В., Агафонов С.И.</i> Сравнение двух методов проверки структурной идентифицируемости линейных моделей в пространстве состояний	108
<i>Исаев М.И.</i> Асимптотическое число эйлеровых циклов в полном двудольном графе	111
<i>Колмогоров А.В.</i> О теоретико-игровом подходе к асимптотической оценке минимаксного риска в стационарной среде	115
<i>Бурнаев Е.В., Никоненко Д.С.</i> Предсказание моментов появления событий в потоке событий	118
<i>Орлов А.А.</i> О численных методах решения задач полуопределённого программирования и примерах задач, для которых они являются неэффективными	120
<i>Соболев М.С.</i> Автоматные модели вычислений	122

Секция математического моделирования и вычислительного эксперимента 124

<i>Белов П.А.</i> Вычисление амплитуды развала в модельной задаче трёх тел	124
<i>Буканина В.И., Диваков Д.В., Хохлов А.А.</i> Моделирование роговицы человеческого глаза	128
<i>Геворкян М.Н.</i> Численное и аналитическое изучение параметрического возбуждения осцилляторов в зависимости от импеданса и частоты	131
<i>Егоров А.А., Ставцев А.В.</i> Разработка методов и алгоритмов расчёта основных характеристик трёхмерных нерегулярных волноводов	133
<i>Еремин И.Е., Жилиндина О.В.</i> Моделирование частотных спектров диэлектрической проницаемости композиционных керамик	136
<i>Колмогоров Д.К.</i> Расчёт турбулентных течений вокруг обратных уступов и каверн в дозвуковом и сверхзвуковом режимах	139
<i>Лукьянов А.К., Катаев М.Ю., Бойченко И.В.</i> Моделирование и обработка данных спутникового исследования атмосферы	142
<i>Семёнов В.В.</i> Модели клеточных автоматов транспортного потока для прогнозирования различного вида предзаторных и заторных ситуаций	144
<i>Севастьянов А.Л.</i> Описание программы расчёта полей плавно нерегулярного четырёхслойного волновода	146
<i>Семкин Ю.Ю.</i> К вопросу о дискретизации модели маятника	149
<i>Тетерев Н.А.</i> Трансляционное смещение и резонансная частота инкапсулированных пузырьков в ультразвуковом поле	152
<i>Хохлов А.А.</i> Синтез субволновых оптических структур	155

Секция синергетики и вычислительной нанофизики 159

<i>Десятов И.В.</i> Методология оценки региональной эффективности программы по изменению вектора показателей региона	159
--	-----

<i>Закиров А.В., Левченко В.Д.</i> Трехмерное моделирование эволюции во времени электромагнитного поля в актуальных задачах нанооптики.....	162
<i>Кудрявцев М.Ю., Кузнецов И.В.</i> Алгоритм прогноза сильных падений финансового индекса Dow Jones Industrial Average	165
<i>Миргородский И.С.</i> Применение бинарных ARMA моделей для одновременного анализа нескольких временных рядов	168
<i>Покаташкин П.А.</i> Численное моделирование блистеринга в металлических зеркалах	170
<i>Попеску Н.Н.</i> Стохастический резонанс в системе монодоменных ферромагнитных микрочастиц	173
<i>Румянцев А.А.</i> Прогнозирование электропотребления в условиях российского рынка электроэнергии	177
<i>Целиков А.В.</i> Методика обработки пропусков и некорректных данных в области анализа сведений о заболеваемости.....	180
<i>Эсселевич И.А.</i> Определение достижения спортсменом предельной нагрузки в ходе тестирования.....	183

Список представленных организаций	186
Именной указатель	187

ТРУДЫ 52-й НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ МФТИ

Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук

Часть VII Управление и прикладная математика

Том 1

Составители:

А.А. Шананин, А.В. Гасников

Редакторы:

В.А. Дружинина, И.А. Волкова, О.П. Котова, Л.В. Себова

Компьютерная вёрстка: *А.В. Чудновский*

Художник: *В.И. Голубев*

Издательская группа:

Э.Г. Кюн, Е.А. Аникиужкина, Г.М. Голубева, И.Н. Самохвалова

Подписано в печать 20.10.2009. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 12,1. Уч.-изд. л. 11,8. Тираж 100 экз. Заказ № 37

ГОУ ВПО «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»