Промышленные АСУ и контроллеры

Промышленные Контроллеры АСУ

Указатель статей, опубликованных в журнале "Промышленные АСУ и контроллеры" в №8 2015 года.

<< Назад

ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ ДЛЯ АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

А.В. Остроух, Я.Э. Нуруев, Джха Прабхакар, И.В. Недосеко	Автоматизированная система управления стационарного бетонного завода с адресной подачей бетона
	Подробнее »
Ш.М. Гулямов, А.Н. Юсупбеков, А.О. Атауллаев	Управление опорно-поворотным устройством антенны
	Подробнее »
Д.В. Зубиков, Ю.В. Мощенский	Разработка автоматизированной информационно-измерительной системы для исследования проблемы электризации диэлектриков
	Подробнее »

НОВОСТИ СИСТЕМОСТРОЕНИЯ

-	-
	Подробнее »

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

В.И. Кузнецов	Статистическая идентификация. Целесообразность линейных отображений нелинейных моделей измерений
	Подробнее »
Н.Ю. Энатская	Комбинаторный анализ схемы сочетаний
	Подробнее »

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ, ИНФОРМАЦИОННЫЕ И УПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

В.Х. Ясовеев, А.А. Шмелев, Г.З. Мухаметова	Математическая обработка в интеллектуальной измерительной системе магнитострикционных преобразователей линейных перемещений
	Подробнее »

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ И УПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМ

О.А. Кравцова	Подсистема диагностики технического состояния технологических агрегатов
	Подробнее »

ОБОРУДОВАНИЕ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ И АВТОМАТИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА

Промышленные АСУ и контроллеры

Аннотация к статье

<< Назад

Комбинаторный анализ схемы сочетаний

Н.Ю. Энатская

Рассматриваются разные процедуры перечисления всех исходов схемы сочетаний, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними и их номерами, приводятся способы моделирования возможных значений реализаций схемы.
Ключевые слова: перечислительные задачи комбинаторики; схема сочетаний; моделирование.

Контактная информация: E-mail: nat1943@mail.ru

Стр. 33-38.

ОАО «Электроприбор»	ОАО «Электроприбор» – курс на «импортозамещение» Подробнее »
Emerson Process Management	Откажитесь от импульсных линий и обогрева при измерении уровня по перепаду давления Подробнее »
В.А. Бузановский	Газовые химические наносенсоры основе оксида цинка. Часть 4 Подробнее »

Музыковедение
Бюллетень Главного ботанического сада
Всеобщая история
Справочник инженера
Прикладная физика и математика
Известия академии инженерных наук им. А.М. Прохорова

Последние новости:

Начала свою работу выставка "Силовая Электроника"

Начала свою работу выставка NDT Russia

Начала свою работу выставка ExpoCoating

XVI Международная специализированная выставка «Дефектоскопия-2015» продемонстрировала инновации промышленного неразрушающего контроля в Санкт-Петербурге

Увлекательная робототехника: юные таланты представят разработки на выставке «Передовые Технологии Автоматизации. ПТА-Урал 2015»

Н.Ю. Энатская
канд. физ.-мат. наук, доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
(Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»)
Москва, Российская Федерация

Комбинаторный анализ схемы сочетаний

Рассматриваются разные процедуры перечисления всех исходов схемы сочетаний, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между ними и их номерами, приводятся способы моделирования возможных значений реализаций схемы.

Ключевые слова: *перечислительные задачи комбинаторики; схема сочетаний; моделирование.*

N.Yu. Enatskaya
Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
(Higher School of Economics – National Research University)
Moscow, Russian Federation

Combinatorial Analysis of Combination Scheme

We consider procedures to number all outcomes of a combination scheme, establish a one-to-one correspondence between the outcomes and its numbers generated in the numbering procedure, and give some methods to simulate the outcomes.

Keywords: *enumerative combinatorics; combinnation scheme; modelling.*

Введение

Схема сочетаний возникает при выборе r элементов из n различимых элементов без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по одной из n различимым ячейкам и является одной из наиболее распространенных комбинаторных схем, широко используемых в теории и практике [1…8]. Например, интерпретация размещения частиц по ячейкам схемы сочетаний используется в статистике Ферми-Дирака [6], а при неограниченном числе частиц в ячейке – в статистике Бозе-Эйнштейна и является в этом случае схемой сочетаний с повторениями.

Схема сочетаний участвует во многих важных распространенных математических формулах: биноме Ньютона, биномиальной схеме и биномиальном распределении вероятностей, в выражениях для чисел исходов многих комбинаторных схем и т. д.

Число исходов схемы сочетаний есть $C_n^r = n!/r!(n-r)!$ (в схеме сочетаний с повторениями число исходов – C_{n+r-1}^r).

Свойства сочетаний подробно рассмотрены, например, в работе [6].

Производящая функция последовательности чисел C_n^r и C_{n+r-1}^r приведена в работах [2] и [5]:

$$\sum_{r=0}^{n} C_n^r x^r = (1+x)^n,$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} C_{n+r-1}^r x^r = (1-x)^{-n}.$$

Моделирование исходов схемы сочетаний приведено в работе [7].

В работе [8] предлагаются новые направления исследования схемы сочетаний методом графов на основе визуального перечисления всех ее исходов с возможностями учета различных ограничений в ней.

1. Процедуры перечисления исходов схемы сочетаний

Схема сочетаний из n элементов по r ($r \le n$) возникает при выборе из n различимых элементов r элементов без возвращения и без учета их порядка или при размещении r неразличимых частиц по n различимым ячейкам, вмещающим по одной частице. Общее число исходов схемы есть C_n^r.

Так как порядок элементов в исходе схемы сочетаний не имеет значения, для стандартности и удобства сравнения будем представлять его в виде вектора с компонентами номеров, выбранных r элементов в возрастающем порядке, $n = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ или в виде числа $R = (n_1 n_2 \ldots n_r)$, составленного из растущих номеров входящих в него элементов.

Метод графов перечисления исходов схемы сочетаний

Для явного перечисления всех C_n^r различимых исходов схемы будем строить случайный процесс размещения частиц (с нуля частиц с добавлением по одной частицы до числа r) независимо и равновероятно по всем свободным из n ячейкам правее последней размещенной.

Все C_n^r исходов схемы сочетаний отличаются друг от друга (в интерпретации размещений) набором непустых, т. е. содержащих по одной частице ячеек. Поэтому состояние процесса $E_j^{(i)}$ (j-е состояние на i-м шаге) будем описывать или вектором $\overline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, где $\eta_k = 0$, если k-я ячейка пуста, или $\eta = 1$ в противном случае на i-м шаге, $k = \overline{1,n}$ или вектором n = (n_1,…, n_i), где n_k – номер непустой ячейки, т. е. содержащей одну частицу на i-ом шаге, $k = \overline{1,i}$.

Условимся нумеровать исходы на i-м шаге процесса размещения последней добавленной частицы в порядке роста номеров ячеек правее последней занятой до i-го шага.

Пример 1. Поясним выше сказанное на графе случайного процесса в схеме сочетаний при n = 5, r = 4. Состояние $E_j^{(i)}$ будем описывать вектором $\overline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_5)$ или вектором $\overline{n} = (n_1, \ldots, n_i)$ на i-ом шаге, $i = \overline{1,4}$. Граф в терминах $\overline{\eta}$ имеет вид, представленный на рисунке 1, где в терминах $\overline{n}$

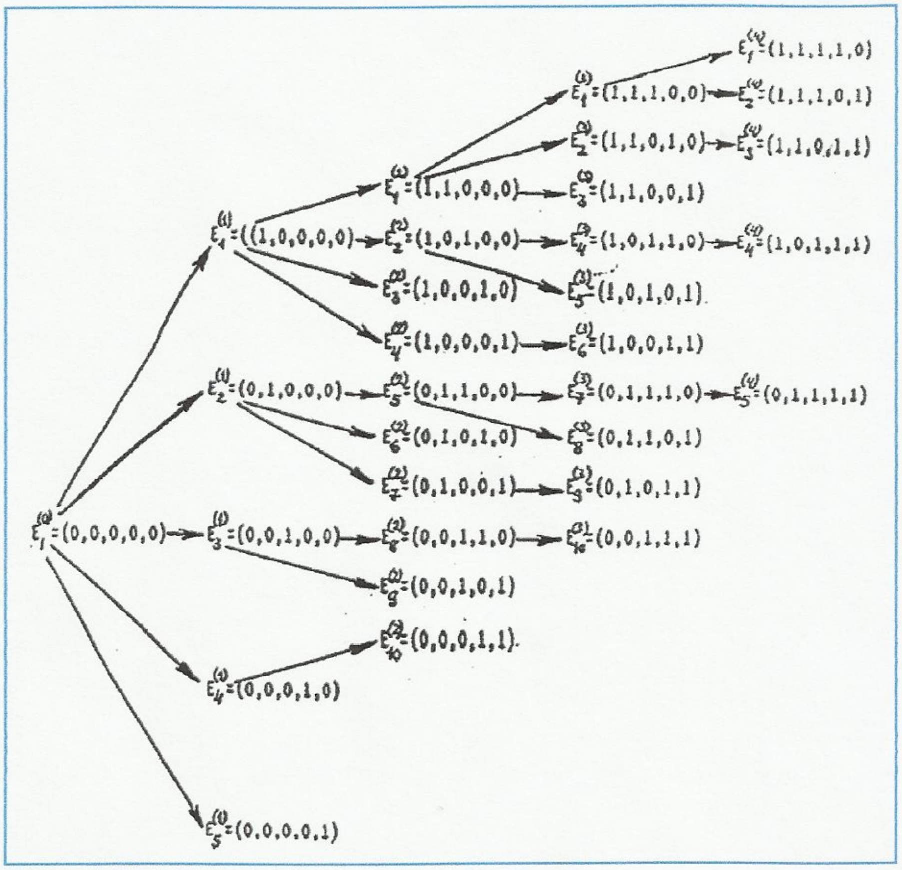

Рис. 1. Граф перечисления исходов схемы сочетаний (n = 5, r = 4)

$E_1^{(1)} = (1), E_2^{(1)} = (2),\ E_3^{(1)} = (3),\ E_4^{(1)} = (4),\ E_5^{(1)} = (5);$

$E_1^{(2)} = (1,2), E_2^{(2)} = (1,3),\ E_3^{(2)} = (1,4),\ E_4^{(2)} = (1,5),\ E_5^{(2)} = (2,3),$

$E_6^{(2)} = (2,4), E_7^{(2)} = (2,5), E_8^{(2)} = (3,4), E_9^{(2)} = (3,5), E_{10}^{(2)} = (4,5);$

$E_1^{(3)} = (1,2,3), E_2^{(3)} = (1,2,4), E_3^{(3)} = (1,2,5), E_4^{(3)} = (1,3,4),$

$E_5^{(3)} = (1,3,5), E_6^{(3)} = (1,4,5), E_7^{(3)} = (2,3,4), E_8^{(3)} = (2,3,5),$

$E_9^{(3)} = (2,4,5), E_{10}^{(3)} = (3,4,5);$

$E_1^{(4)} = (1,2,3,4), E_2^{(4)} = (1,2,3,5),\ E_3^{(4)} = (1,2,4,5),\ E_4^{(4)} = (1,3,4,5),$

$E_5^{(4)} = (2,3,4,5).$

Количества исходов схемы сочетаний на каждом i-ом шаге ($i = \overline{1,4}$) в примере совпадают с результатами непосредственных вычислений:

$C_5^1 = 5,\ C_5^2,\ C_5^3 = 10,\ C_5^4 = 5.$

Итак, в итоге имеем 5 состояний $E_j^{(4)}$, $i = \overline{1,5}$, перечисленных в двух формах, выраженных через $\overline{\eta}$ и $\overline{n}$. По смыслу схемы все они – равновероятны, т. е. каждое наступает с вероятностью 1/5, поэтому задача перечисления всех исходов схемы сочетаний с их вероятностями решена.

Метод коэффициентов

Нетрудно видеть, что перечисление исходов схемы на r-ом шаге в форме n совпадает с совокупностью наборов индексов в произведениях переменных $x_{i1}, \ldots, x_{ir}$ в формуле

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i_1<i_2} x_{i1}x_{i2} + \ldots + \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} x_{ij} + \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

Таким образом, перечисление исходов схемы сочетаний можно получить по стандартной программе произведения многочленов данного вида.

Метод моделирования с отбраковкой

Перечисление исходов схемы сочетаний можно производить способом моделирования схемы сочетаний, который будет приведен ниже, с отбраковкой повторяющихся до набора C_n^r разных исходов. Недостатком этого способа является рост вероятности отбраковки на каждом шаге на $1/C_n^r$ от 0 до $(C_n^r - 1)/C_n^r$. Отсюда получаем среднее число N моделирований MN до получения всех C_n^r исходов:

$$MN = \sum_{i=1}^{C_n^r} (C_n^r / (C_n^r - i + 1)).$$

Перечисление исходов схемы по рисункам размещений

Наглядно представим на рисунках исходы схемы сочетаний размещением растущего числа частиц, начиная с одной, по данным n ячейкам. Ячейки расположим в ряды в виде полос с перегородками между ними, а частицы (не более одной в каждой ячейке) изобразим звездочками *. При увеличении числа частиц i от нуля на единицу будем помещать ее разными вариантами во все ячейки, правее последней занятой с растущим на единицу расстоянием от нее до последней n-ой ячейки, а число вариантов ее расположения при каждом фиксированном размещении первых i частиц будет равно числу пустых ячеек правее последней ими занятой ячейки. На этих же рисунках с вариантами размещения $(i + 1)$-й частицы запишем в соответствующих ячейках варианты расположения следующей $(i + 2)$-й частицы – все сочетания с ней в форме чисел R. Теперь эти выписанные сочетания из $(i + 2)$-х частиц перенесем на следующий рисунок, снова изображая частицы звездочками, а все правое пустое поле, как и раньше, заполним числами R сочетаний при добавлении следующей частицы и т. д. до тех пор, пока их число не достигнет заданного значения r. Тогда на правом поле последнего рисунка получим в форме чисел R полное перечисление исходов схемы сочетаний в количестве C_n^r.

Покажем работу этого алгоритма на числовом примере.

Пример 2. Пусть $n = 5$, $r = 3$. Тогда число исходов схемы есть $C_5^3 = 10$. Покажем процедуру перечисления всех этих исходов предложенным приемом.

На первом рисунке изобразим звездочками размещение первой частицы, а числами R – все сочетания по два в соответствующих ячейках правого поля:

*	12	13	14	15
	*	23	24	25
		*	24	35
			*	45
				*

Теперь все перечисленные $C_5^3 = 10$ сочетания для $i = 2$ в форме чисел R на правых полях рисунка, а именно (12),(13),(14),(15),(23),(24),(25),(34),(35),(45) перенесем на новый аналогичный рисунок:

*	*	123	124	125
*		*	134	135
*			*	145
*				*
	*	*	234	235
	*		*	245
	*			*
		*	*	345
		*		*

Здесь числа R на правых полях рисунка, а именно, (123),(124),(125), (134),(135),(145),(234), (235),(245),(345), уже соответствуют всем сочетаниям по заданному параметру $r = 3$ элементов в количестве 10-ти вариантов, совпадающим с вычисленным теоретически $C_5^3 = 10$.

Перечисление исходов схемы по двоичным кодам

Если в двоичном коде записать все десятичные числа от 1 до $2^n - 1$, промаркировать их по числу единичных разрядов и представить результат в виде вектора $\mu = (\mu_1, \mu_2, ..\mu_n)$, где μ_i – количество чисел в данном диапозоне с i единичными разрядами $(i = \overline{1,n})$, то $(i - r)$-я компонента вектора μ (μ_r) будет совпадать с числом исходов схемы сочетаний из n элементов по r, т. к. они будут соответствовать всем вариантам расположения r единиц на n местах, как r частиц по n ячейкам. Таким образом, набором соответствующих чисел с r с единичными двоичными разрядами перечисляются все исходы схемы сочетаний из n элементов по r, представленные в любом удобном по ситуации коде – десятичном или двоичном. Тогда делением всех чисел от 1 до $2^n - 1$ на группы со всеми количествами единичных разрядов в двоичном коде от 1 до n производится перечисления исходов, соответствующих этим группам, всех схем сочетаний из n элементов по любому числу i от 1 до n, где число разрядов двоичного числа соответствует числу ячеек, нули в двоичном коде – пустым ячейкам, а единицы – ячейкам с одной частицей (это соответствует известному равенству для сочетаний: $C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n - 1$).

Практическое применение описанного алгоритма перечисления исходов схемы сочетаний покажем на примере.

Пример 3. Пусть $n = 4$, а) $r = 1$; б) $r = 2$; в) $r = 3$; г) $r = 4$.

Перечислить все исходы схем сочетаний в заданных случаях.

Выпишем в двоичном коде все десятичные числа от 1_{10} до $(2^4 - 1)_{10} = 15_{10}$:

$1_{10} = 0001$; $2_{10} = 0010$; $3_{10} = 0011$; $4_{10} = 0100$; $5_{10} = 0101$; $6_{10} = 0110$; $7_{10} = 0111$; $8_{10} = 1000$; $9_{10} = 1001$; $10_{10} = 1010$; $11_{10} = 1011$; $12_{10} = 1100$; $13_{10} = 1101$; $14_{10} = 1110$; $15_{10} = 1111$.

Опуская в дальнейших записях чисел десятичные индексы, т. е. записывая их в привычной форме, перечислим через них исходы заданных схем сочетаний по числу единиц в их двоичном коде: а) 1,2,4,8; б) 3,5,6,9,10,12; в) 7,11,13,14; г) 15 в количествах соответственно совпадающими с вычисленными теоретически: $C_4^1 = 4$; $C_4^2 = 6$; $C_4^3 = 4$; $C_4^4 = 1$.

Метод отбраковки

Из записи исходов схемы сочетаний в форме чисел R в порядке их роста следует, что все они лежат в диапазоне от числа $R = 12\ldots r$ до числа $R = (n - r + 1)(n - r + 2)\ldots n$. Имея ввиду, что числа R составлены из номеров ячеек, содержащих по одной частице, следует из всех чисел, принадлежащих указанному диапазону, для представления всех исходов схемы сочетаний оставить после отбраковки только числа, состоящие из разных номеров, от 1 до n в возрастающем порядке. Покажем это на примере.

Пример 4. Пусть $n = 5$, $r = 2$. Тогда числа R, описывающие все исходы схемы лежат в диапазоне от 12 до 45. Это числа:12,13,14,15,16,17,18,19,120,21,22,23, 24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,34,35,36,37,38,39,40,41, 42,43.44,45.

Отбракуем среди них числа по указанным выше признакам, в результате останутся следующие: 12,13,14,15,23,24,25,34,35,45 в теоретически известном количестве $C_5^2 = 10$, перечисляющие все исходы данной схемы сочетаний.

2. Нумерация исходов схемы сочетаний

Установление полноты перебора всех исходов схемы сочетаний и удобство дальнейшего ее использования требует для каждой из предложенных процедур решения прямой и обратной задач нахождения соответствия чисел R_i и их номеров, т. е., соответственно, нахождения числа R по его заданному номеру N и нахождение номера N для данного числа R, где, как и раньше, число R представляет данное сочетание.

Оказалось, что приведенные в 1 разделе статьи способы перечисления всех исходов схемы сочетаний приводят к возрастающему их порядку в смысле представляющих их чисел $R = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$, составленных из номеров выбранных r из n элементов. Поэтому нумерация исходов и установление соответствия между их видом R и номером N будет общим для всех способов перечисления исходов схемы в форме решения прямой и обратной задач нахождения числа R по N и наоборот. Для этого необходимо изучить закономерности структуры множества всех исходов схемы в возрастающем в указанном выше смысле порядке.

Напомним, что номера элементов в каждом исходе для удобства их сравнения упорядочены по возрастанию.

Все исходы схемы в перечисляемом порядке можно сгруппировать в идущие подряд исходы с определенным количеством первых совпадающих элементов. Определим понятие i-го уровня группирования исходов, если оно проводится по совпадению первых i элементов исхода, $i = \overline{1, r-1}$.

Размеры групп при данном уровне деления легко выписываются из формулы для числа исходов схемы сочетаний из всех оставшихся из n после фиксации первых элементов по числу нефиксированных элементов дополняющих фиксированные до заданного числа r. Так, например, на первом уровне группирования имеем $(n - r + 1)$ групп исходов, начинающихся с 1, 2,…,$(n - r + 1)$ соответственно численностями $C_{n-1}^{r-1}, C_{n-2}^{r-1}, C_{n-3}^{r-1}, \ldots, C_{n-(n-r+1)}^{r-1}$.

На следующем уровне деления каждая группа первого уровня деления делится на группы второго уровня с фиксированными первыми двумя элементами, и при расчете численностей таких групп все параметры уменьшаются на единицу и т. д.

Принадлежность номера N исхода схемы к группам известных размеров при всех уровнях деления определяет конкретный вид сочетания R, а принадлежность сочетания данного вида R к группам при всех уровнях деления определяет его конкретный номер N.

Математическая формализация соответствия чисел N и R с учетом проведенного анализа структуры перечисляемых исходов схемы сочетаний и составляет цели решения поставленных прямой и обратной задач нумерации всех исходов.

Прямая задача. Требуется по данному номеру N исхода схемы сочетаний найти вид исхода $R = (n_1 n_2 \ldots n_r)$. Задача сводится к нахождению чисел $n_1, n_2, \ldots n_r$.

Для объяснения общей формулы вычисления числа n_l при $l = \overline{1, r}$ выпишем ее сначала для первых значений l.

$$n_1 = \min j_1 : \left\{ N \le \sum_{s=1}^{j_1} C_{n-s}^{r-1} \right\};$$

отсюда получаем значение $j_1 = n_1$;

$$n_2 = \min (j_2 + n_2) : \left\{ N \le \sum_{s=1}^{j_1 - 1} C_{n-s}^{r-1} + \sum_{s=2}^{j_2} C_{n-s}^{j_2} \right\};$$

отсюда получаем значения j_2 и $n_2 - j_2 + n_1$ и т. д.

Выпишем общую формулу для n_m, где $m = \overline{1, r}$, положив $n_0 = 0$ и $C_0^0 = 1$:

$$n_m = \min_{j_m} (j_m + n_{m-1}) : \left\{ N \le \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{s=k}^{j_m - 1} C_{n-s}^{r-k} + \sum_{s=m}^{j_m} C_{n-s}^{r-m} \right\}. \tag{1}$$

Покажем на примерах применение формулы (1).

Пример 5. Пусть $n = 5$, $r = 3$. Для удобства контроля результатов вычислений приведем таблицу полного перечня исходов схемы сочетаний в форме R с их номерами N в порядке их перечисления в количестве $C_5^3 = 10$:

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	123	124	125	134	135	145	234	235	235	345

Задавая значения номеров N исходов схемы, будем находить соответствующие сочетания $R = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$ по формуле (1) покомпонентно:

а) $N = 1$,

$$n_1 = \min(j_1 + 0) : \left\{1 \le \sum_{s=1}^{j_1} C_{5-s}^{2}\right\},$$

так как $1 < C_4^2 = 6$, отсюда следует, что $j_1 = 1$, $n_1 = 1$;

$$n_2 = \min(j_2 + 1) : \left\{1 \le \sum_{s=1}^{0} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{j_2} C_{5-s}^{1}\right\},$$

так как $1 < 0 + C_3^1 = 3$, отсюда следует, что $j_2 = 1$, $n_2 = 2$;

$$n_3 = \min(j_3 + 2) : \left\{1 \le \sum_{s=1}^{0} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{0} C_{5-s}^{1} + \sum_{s=3}^{j_3} C_{5-s}^{0}\right\},$$

так как $1 = 0 + 0 + C_2^0 = 1$, отсюда следует, что $j_3 = 1$, $n_3 = 3$.

В результате получаем $R = 123$, что совпадает с табличным значением.

б) $N = 8$,

$$n_1 = \min(j_1 + 0) : \left\{8 \le \sum_{s=1}^{j_1} C_{5-s}^{2}\right\},$$

так как $8 < C_4^2 + C_3^2 = 6 + 3 = 9$, отсюда следует, что $j_1 = 2$, $n_1 = 2$;

$$n_2 = \min(j_2 + 2) : \left\{8 \le \sum_{s=1}^{1} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{j_2} C_{5-s}^{1}\right\},$$

так как $8 < C_4^2 + C_3^1 = 6 + 3 = 9$, отсюда следует, что $j_2 = 1$, $n_2 = 3$;

$$n_3 = \min(j_3 + 3) : \left\{8 \le \sum_{s=1}^{1} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{0} C_{5-s}^{1} + \sum_{s=3}^{j_3} C_{5-s}^{0}\right\},$$

так как $8 = C_4^2 + C_2^0 + C_1^0 = 8$, отсюда следует, что $j_3 = 2$, $n_3 = 5$.

В результате получаем $R = 235$, что совпадает с табличным значением.

в) $N = 10$,

$$n_1 = \min(j_1 + 0) : \left\{10 \le \sum_{s=1}^{j_1} C_{5-s}^{2}\right\},$$

так как $10 < C_4^2 + C_3^2 + C_3^1 = 12$, отсюда следует, что $j_1 = 3$, $n_1 = 3$;

$$n_2 = \min(j_2 + 2) : \left\{10 \le \sum_{s=1}^{2} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{j_2} C_{5-s}^{1}\right\},$$

так как $10 < C_4^2 + C_3^2 + C_3^1 = 12$, отсюда следует, что $j_2 = 1$, $n_2 = 4$;

$$n_3 = \min(j_3 + 4) : \left\{10 \le \sum_{s=1}^{2} C_{5-s}^{2} + \sum_{s=2}^{0} C_{5-s}^{1} + \sum_{s=3}^{j_3} C_{5-s}^{0}\right\},$$

так как $10 = C_4^2 + C_3^2 + C_2^0 = 10$, отсюда следует, что $j_3 = 1$, $n_3 = 5$.

В результате получаем $R = 345$, что совпадает с табличным значением.

Обратная задача. Требуется по данному исходу $R = (n_1 n_1 \ldots n_r)$ найти его номер $N = \sum_{i=1}^{r} N_i$, где N_i – номер группы i-го уровня группирования, определенный n_i-м элементом числа R.

Определим последовательность чисел $\{K_i\}$, где $K_i - n_i - n_{i-1}$, и пусть $n_0 = 0$. Тогда из проведенного выше структурного анализа всей совокупности исходов схемы сочетаний в перечисляемом порядке следует, что номер исхода N зависит от чисел $\{K_i\}$, соответствующих последовательным номерам, входящих в данный исход R, по формуле

$$N = \sum_{i=1}^{r} \sum_{s=i}^{K_i - 1} C_{n-s}^{r-s} + 1. \tag{2}$$

где $N = \sum_{s=i}^{K_i-1} C_{n-s}^{r-s}$.

Покажем и проверим решение обратной задачи по формуле (2) на примерах.

Пример 6. Пусть $n = 5$, $r = 3$. По данным числам R требуется найти их номера N:

а) $R = 125$, т. е. $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $n_3 = 5$, откуда $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 3$, тогда по формуле (2) получаем

$$N = \sum_{s=1}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=2}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=3}^{3-1} C_{5-s}^{3-s} + 1 = C_2^0 + 1 = 3,$$

что совпадает с номером числа 125 в таблице примера 5.

б) $R = 134$, т. е. $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, откуда $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 1$, тогда по (2) получаем

$$N = \sum_{s=1}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=2}^{2-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=3}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + 1 = C_3^1 + 1 = 4,$$

что совпадает с номером числа 134 в таблице примера 5.

в) $R = 234$, т. е. $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, откуда $K_1 = 2$, $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, тогда по (2) получаем

$$N = \sum_{s=1}^{2-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=2}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + \sum_{s=3}^{1-1} C_{5-s}^{3-s} + 1 = C_4^2 + 1 = 7,$$

что совпадает с номером числа 234 в таблице примера 5.

3. Способы моделирования исходов схемы сочетаний

Метод маркировки

Метод маркировки для моделирования возможных исходов схемы сочетаний использует или таблицу перечня всех ее исходов с их порядковыми номерами, и хранение этой информации требует определенного объема памяти, что нежелательно, или работает только с заданными номерами исходов, вид которых определяется по формуле (1).

Моделирование исхода схемы состоит из следующих шагов:

1) отрезок [0,1] делим на C_n^r равных частей;

2) генерируем случайное число x;

3) определяем номер части отрезка [0,1], в который оно попадает, и считаем его номером смоделированного сочетания;

4) из смоделированного номера исхода схемы сочетаний находим его вид по заданной исходной информации, т. е. по таблице исходов схемы или по формуле (1).

Метод, использующий вариационный ряд случайных чисел **[1].**

Моделирование исхода схемы состоит из следующих шагов:

1) генерируем n случайных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$;

2) строим вариационный ряд для результата пункта 1): $x_{(\cdot)} = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$;

3) находим номера первых r случайных чисел x в вариационном ряду $\overline{x}$ в порядке просмотра последнего – получаем возрастающую последовательность номеров r элементов, представляющую смоделированный исход схемы сочетаний.

Замечание. В пункте 3) приведенного последнего пошагового алгоритма можно поменять местами последовательности $\overline{x}$ и $\overline{x_{(\cdot)}}$.

Пример 7. Пусть $n = 10$, $r = 3$,

$$\overline{x} = (0{,}45;0{,}31;0{,}84;0{,}15;0{,}22;0{,}40;0{,}72;0{,}51;0{,}93;0{,}48),$$

отсюда получаем

$$\overline{x_{(\cdot)}} = (0{,}15;0{,}22;0{,}31;0{,}40;0{,}45;0{,}48;0{,}51;0{,}72;0{,}84;0{,}93);$$

$$\overline{x_3} = (0{,}45;0{,}31;0{,}84).$$

Тогда получаем исход схемы сочетаний: (3,5,9) – номера элементов $\overline{x_3}$ в $\overline{x_{(\cdot)}}$ в порядке просмотра $\overline{x_{(\cdot)}}$.

Список литературы

1. Виленкин Н.Я. *Комбинаторика.* М.: Наука, 1969. 323 с.
2. Риордан Дж. *Введение в комбинаторный анализ*, пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 288 с.
3. Рыбников К.А. *Введение в комбинаторный анализ.* М.: Издательство Московского ун-та, 1985. 308 с.
4. Сачков В.Н. *Комбинаторика в дискретной математике.* М.: Наука. Физматлит, 1977. 320 с.
5. Сачков В.Н. *Введение в комбинаторные методы дискретной математики.* М.: Наука,1982. 384 с.
6. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* М.: Мир, 1970. 528 с.
7. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. *Стохастическое моделирование.* М.: МИЭМ, 2012. 118 с.
8. Энатская Н.Ю., Хакимуллин Е.Р. Метод графов для решения задач перечислительной комбинаторики // *Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика.* 2014, № 8, С. 15–21.

References

1. Vilenkin N.Ya. *Kombinatorika* [Combinatorics]. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»]. 1969. 323 p.
2. Riordan Dzh. *Vvedenie v kombinatornyy analiz*, per. s angl. [Introduction to Combinatorial Analysis, trans. from English]. M.: Izdatelstvo inostrannoy literatury [Moscow: Foreign Literature Publishing House]. 1963. 288 p.
3. Rybnikov K.A. *Vvedenie v kombinatornyy analiz* [Introduction to Combinatorial Analysis]. M.: Izdatelstvo Moskovskogo un-ta [Moscow: Publishing house of the Moscow University Press]. 1985. 308 p.
4. Sachkov V.N. *Kombinatorika v diskretnoy matematike* [Combinatorics in discrete mathematics]. M.: Nauka.Fizmatlit [Moscow: Publishing house «Science»]. 1977. 320 p.
5. Sachkov V.N. *Vvedenie v kombinatornye metody diskretnoy matematiki* [Introduction to Combinatorial Methods of Discrete Mathematics]. M.: Nauka [Moscow: Publishing house «Science»].1982. 384 p.
6. Feller V. *Vvedenie v teoriyu veroyatnostey i ee prilozheniya* [Introduction to probability theory and its applications]. M.: Mir [Moscow: Publishing house «World»]. 1970. 528 p.
7. Enatskaya N.Yu., Khakimullin E.R. *Stokhasticheskoe modelirovanie* [Stochastic modeling]. M.: MIEM [Moscow: Publishing house of the Moscow State University of Electronics and Mathematics]. 2012. 118 p.
8. Enatskaya N.Yu., Khakimullin E.R. Metod grafov dlya resheniya zadach perechislitelnoy kombinatoriki [Method graphs for solving enumerative combinatorics]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol, diagnostika* [Instruments and systems. Management, monitoring, diagnostics]. 2014, no. 8, pp. 15–21.

Информация об авторе

Энатская Наталия Юрьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент
E-mail: nat1943@mail.ru
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Российская Федерация, Москва, ул. Мясницкая, д. 20

Information about the author

Enatskaya Nataliya Yurevna, Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate Professor
E-mail: nat1943@mail.ru
Higher School of Economics – National Research University
101000, Russian Federation, Moscow, Str. Myasnitskaya, 20