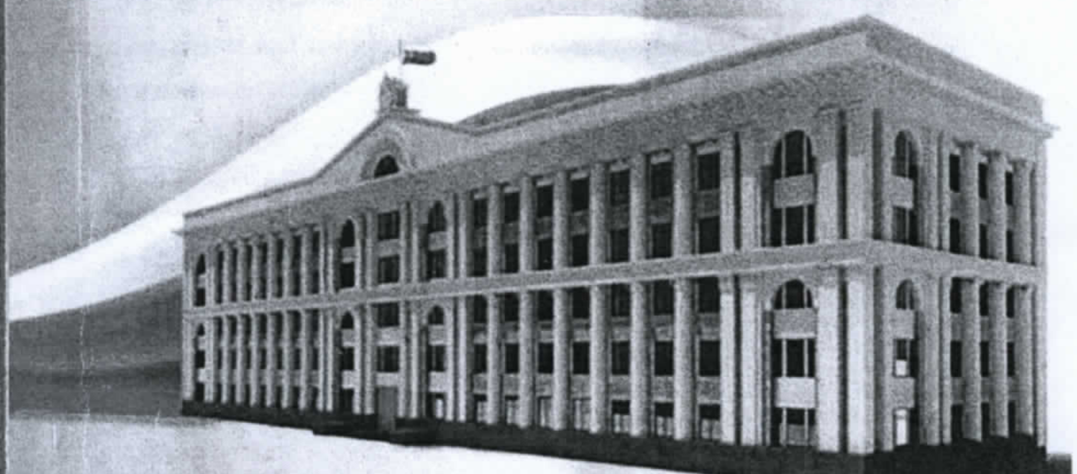
ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



Материалы конференции «Современная математика и концепции инновационного математического образования»

23 апреля 2014 г.

12-30-14-30 – работа секций 3 и 4 (ведущий проф. Н.Ш. Кремер)

Длительность докладов в секциях 15 минут.

В сборнике Трудов конференции публикуются тезисы работ всех участников конференции. Сборник имеет ISBN, УДК и будет размещен на сайте электронной библиотеки (e-library.ru). Все участники конференции получают твердую копию и, по желанию, электронную версию этого сборника.

По запросу участников конференции им высылается **сертификат участника**, подтверждающий участие в конференции.

Организационный комитет благодарит всех участников конференции и желает им дальнейших успехов в научной работе.

Ученый секретарь конференции, доцент,
д.п.н., к.ф.-м.н. Н.В. Калачев

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДОКЛАДОВ ПО СЕКЦИЯМ

1-Я СЕКЦИЯ:
ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

2-Я СЕКЦИЯ:
МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ И ФИНАНСАХ

3. *Чечкин А.В., Пирогов М.В.* Интеллектуализация сложной системы как средство обеспечения ее информационно-системной безопасности // Фундаментальная и прикладная математика – 2009. – Т. 15, – вып. 3. – С. 225 – 239.

4. *Соболева Т.С., Чечкин А.В.* Дискретная математика // Второе издание – М.: Издательский центр Академия, 2012. – 256 с.

5. *Соболева Т.С., Чечкин А.В.* Базовые принципы математической информатики. Настоящий сборник.

2-я секция: Математика в экономике и финансах

З.И. Бежаева,

Национальный Исследовательский Университет

Высшая Школа Экономики

Е.Ф. Олехова, В.И. Оселедец

Финансовый Университет

СКРЫТЫЕ МАРКОВСКИЕ МОДЕЛИ И MPS-ВРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

1. Введение. Скрытые марковские модели широко используются в задачах распознавания речи, биоинформатики, математической статистики и в финансовых приложениях [1]. Поэтому изучение математических свойств этих моделей весьма существенно для различных приложений.

Класс MPS-моделей содержит класс скрытых марковских моделей. Здесь MPS расшифровывается как *matrix product state* (состояние, которое определяется произведением матриц). Это название пришло из работ по квантовой физике последнего десятилетия XX века. В неявном виде такие временные ряды встречались в математической статистике несколькими десятилетиями ранее.

Интересно было бы найти примеры финансовых моделей, в которых встречаются MPS-временные ряды, не являющиеся скрытыми марковскими временными рядами. Если же MPS-временной ряд является скрытым марковским временным рядом, то как найти конечную марковскую цепь, из которой наш временной ряд получается агрегированием состояний?

В статье рассматривается конкретный пример MPS-временного ряда и его связь со скрытым марковским временным рядом.

2. Определение MPS-временного ряда. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – временной ряд случайных величин со значениями в множестве $I = \{1, \ldots, d\}$. Он полностью характеризуется функцией

$$\mu_X(x_1x_2...x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n), \qquad n \ge 1,$$

на множестве всех конечных слов $x_1x_2...x_n$ с алфавитом I.

Пусть функция $\mu(x_1x_2...x_n)$, определённая на множестве всех конечных слов $x_1x_2...x_n$, удовлетворяет условиям:

1) условие неотрицательности

$$\mu(x_1x_2...x_n) \ge 0; \tag{1}$$

2) сумма её значений по всем словам длины n равна 1 для любого n:

$$\sum_{x_1x_2...x_n} \mu(x_1x_2...x_n) = 1; \tag{2}$$

3) условие согласованности:

$$\mu(x_1x_2...x_n) = \sum_{x_{n+1}} \mu(x_1x_2...x_nx_{n+1}). \tag{3}$$

Легко проверить, что функция $\mu_X(x_1x_2...x_n)$ удовлетворяет условиям (1,2,3).

Утверждение 1. Если $\mu(x_1x_2...x_n)$ удовлетворяет условиям (1,2,3), то существует процесс $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, для которого

$$\mu_X(x_1x_2...x_n) = \mu(x_1x_2...x_n).$$

Это утверждение фактически следует из теоремы Колмогорова о согласованных распределениях [2]. Это частный случай теоремы Колмогорова.

Определение. MPS-временной ряд задаётся функцией

$$\mu_X(x_1x_2...x_n) = lA(x_1)...A(x_n)r, \tag{4}$$

где l – строка, r – столбец и $A(i)$ – квадратные матрицы одного порядка, $i \in I$.

Класс MPS-временных рядов шире, чем класс скрытых марковских рядов. Интересно было бы найти примеры финансовых моделей, в которых встречаются MPS-временные ряды, не являющиеся скрытыми марковскими временными рядами.

Напомним, что скрытый марковский временной ряд получается из марковского временного ряда агрегированием состояний. Если же MPS-временной ряд является скрытым марковским временным рядом, то как найти конечную марковскую цепь, из которой наш временной ряд получается агрегированием состояний?

Если в (4) строка, столбец и матрицы неотрицательны, то мы имеем дело со скрытым марковским временным рядом. Такие модели используются в многочисленных приложениях, в том числе и в финансовых приложениях.

Для одного конкретного MPS-временного ряда, в котором $I = \{1,2,3\}$, $A(i)$, $i \in I$, – матрицы четвёртого порядка, мы покажем, как можно найти марковский временной ряд, агрегированием состояний которого получается этот MPS-временной ряд.

3. Пример. Рассмотрим матрицы

$$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, A(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$r = (1,0,0,1)^T, \; l = \left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right).$$

С их помощью определим функцию $\mu(x_1x_2...x_n)$ по формуле (4).

Утверждение 2. Существует MPS-временной ряд с функцией $\mu(x_1x_2...x_n)$.

Для доказательства достаточно проверить выполнение условий (1,2,3). Условия (2,3) проверяются непосредственно, а условие 1 тоже выполнено, но доказательство его сложнее. Для проверки условия (2) и условия согласованности (3) составим матрицу

$$A = A(1) + A(2) + A(3).$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Для столбца $r=(1,0,0,1)^T$ и строки $l=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$ выполняется

$$lAr = lr = 1,\quad Ar = r,\quad lA = l.$$

Проверим (2):

$$\sum_{x_1x_2\ldots x_n}\mu(x_1x_2\ldots x_n) = l\left(\sum_{x_1x_2\ldots x_n}A(x_1)\ldots A(x_n)\right)r =$$

$$= l\left(\sum_{x_1}A(x_1)\right)\left(\sum_{x_2}A(x_2)\right)\ldots\left(\sum_{x_n}A(x_n)\right)r =$$

$$= lA^n r = lr = 1.$$

Условие (3) проверяется аналогично.

Заметим, что вид столбца r диктуется условием согласованности (3), а вид строки l связан с дополнительным требованием стационарности в узком смысле временного ряда.

4. Переход к матричной схеме Бернулли.

Составим вспомогательную блочную матрицу 3-го порядка с одинаковыми строками вида

$$M=\begin{pmatrix} A(1) & A(2) & A(3)\\ A(1) & A(2) & A(3)\\ A(1) & A(2) & A(3)\end{pmatrix}.$$

Получим матрицу 12-го порядка. Переход к этой матрице будем называть переходом к матричной схеме Бернулли, по аналогии с обычной схемой Бернулли, где переходная матрица имеет одинаковые строки. Блочные элементы

$$M_{ij} = A(j),\quad i=1,2,3,\quad j=1,2,3.$$

Функция $\mu(x_1x_2\ldots x_n)$ может быть выражена по формуле

$$\mu(x_1x_2\ldots x_n)l(x_1)M_{x_1x_2}\ldots M_{x_{n-1}x_n}r(x_n),\quad n\ge 2. \tag{5}$$

При $n=1$ имеем

$$\mu(x_1) = l(x_1)r(x_1),$$

где $l(x_1) = lA(x_1)$, $r(x_1)\equiv r$ (см. [3] по поводу формул типа (5)). Подробнее

$$l(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}A(1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

$$l(2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}A(2)=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix};$$

$$l(3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}A(3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим блочную строчку l как числовую строчку $\tilde{l}$ с элементами $\tilde{l}_i$ и столбец r как числовой столбец $\tilde{r}$ с элементами $\tilde{r}_i$, $i=1,2,\ldots,12$.

Если рассматривать матрицу M как числовую матрицу 12-го порядка с элементами m_{ij}, а переменные $y_i\in\{1,2,\ldots,12\}$, то мы можем рассматривать функцию

$$\tilde{\mu}(y_1y_2\ldots y_n) = \tilde{l}_{y_1}m_{y_1y_2}\ldots m_{y_{n-1}y_n}\tilde{r}_{y_n},\quad n\ge 2. \tag{6}$$

Назовём номер i нулевым, если $\tilde{l}_i\tilde{r}_i = 0$.

После вычёркивания из M, $\tilde{l}$ и $\tilde{r}$ строк и столбцов с нулевыми номерами получаем новые матрицы M_s, l_s и r_s.

$$M_s=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3\\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3\\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0\end{pmatrix},\ l_s=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right),\ r_s=(1,1,1,1)^T.$$

В формуле (6) мы можем вместо матрицы M вставить матрицу M_s, вместо $\tilde{l}$ вставить l_s, а вместо $\tilde{r}$ вставить r_s. Теперь переменные y_i принимают значения из множества $\{1,2,3,4\}$.

Отсюда $\tilde{\mu}(y_1y_2\ldots y_n)$ задаёт марковскую цепь $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n,\ldots$ с переходной матрицей M_s и стационарным распределением l_s. А временной ряд $X_n=\varphi(Y_n)$, $n=1,2,\ldots$, где

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(2)=\varphi(3)=2,\ \varphi(4)=3,$$

имеет функцию $\mu(x_1x_2\ldots x_n)$. Для этого временного ряда вероятность

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n) = l_s M_{s,x_1x_2} ... M_{s,x_{n-1}x_n} r_s =$
$= \mu(x_1 x_2 ... x_n).$

То есть мы указали марковский временной ряд $Y_1, Y_2, ..., Y_n, ...$ и агрегирование, задаваемое функцией склейки φ, которое даёт скрытый марковский временной ряд с функцией нашего MPS-временного ряда.

Матрица M_s состоит из блоков:

$$M_s = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix},$$

где блоки имеют вид

$$M_{11} = (0),\ M_{12} = (1/3\quad 0),\ M_{13} = 2/3,$$
$$M_{21} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix},\ M_{22} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},\ M_{23} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{31} = (2/3),\ M_{32} = (0\quad 1/3),\ M_{33} = (0).$$

Матрице M_s соответствует граф (рис. 1).

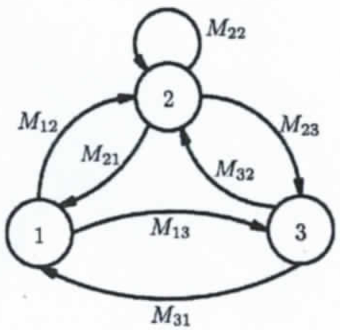


Рисунок 1.

Процесс эволюции состояний из начального состояния 1 во времени выглядит следующим образом (рис. 1). Из состояния 1 возможен переход в состояние 2 или в состояние 3. Если процесс попадает в состояние 2, он проводит там случайное время, распределённое по геометрическому закону, и затем переходит в состояние 3, поскольку $M_{12} M_{22}^n M_{21} = 0$. Из состояния 3 процесс может перейти в состояние 1 или в состояние 2. Если процесс попадает в состояние 2, он проводит там случайное время, распределённое по геометрическому закону, и затем переходит в состояние 1, поскольку $M_{32} M_{22}^n M_{23} = 0$.

Если бы эта цепь была марковской, то в состоянии 2 имелись бы вероятности переходов, не зависящие от прошлого. Но это невозможно, т.к. мы должны смотреть назад, откуда пришли.

5. Заключение. Тем самым мы доказали следующие утверждения.

Утверждение 3. Есть марковская цепь с четырьмя состояниями $(1,2,3,4)$ и переходной матрицей M_s. Эта матрица порождает стационарную марковскую цепь, которая характеризуется этой матрицей переходов и стационарным распределением $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

Утверждение 4. Рассмотрим функцию

$$\varphi(1) = 1, \varphi(2) = \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 3,$$

то есть $X_n = \varphi(Y_n)$. Распределение временного ряда $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ совпадает с распределением MPS-временного ряда.

Утверждение 5. Полученная скрытая марковская модель не может быть марковской цепью никакого порядка.

Литература

1. *R. Bhar, S. Hamori.* Hidden Markov models. Applications to financial economics. New-York: Springer, 2004. 178p.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. М: Наука, 1977. 568 с.

3. *Бежаева З.И., Оселедец В.И.* Меры Эрдеша, софические меры и марковские цепи. Зап. научн. сем. ПОМИ, 326. 2005. с. 28-47.