ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2012, том 444, № 2, с. 131–136

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

СОБОЛЕВСКАЯ РЕГУЛЯРНОСТЬ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ МОНЖА–АМПЕРА

© 2012 г. В. И. Богачев, А. В. Колесников

Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 23.11.2011 г.

Поступило 20.12.2011 г.

Работа связана с изучением соболевской регулярности отображений оптимальной транспортировки в бесконечномерных пространствах. Эта область гораздо менее изучена по сравнению с конечномерным случаем, однако некоторые частные результаты о существовании, единственности и регулярности были получены в [1–4]. Предположим, что заданы две вероятностные меры μ и ν на $\mathbb{R}^d$ с конечными вторыми моментами. Так называемое отображение оптимальной транспортировки T минимизирует функционал

$$\int \|T(x) - x\|^2 d\mu,$$

где $\|\cdot\|$ – стандартная евклидова норма, среди всех отображений, переводящих μ в ν: $\nu = \mu \circ T^{-1}$. Существует единственное (μ-п.в.) отображение этого типа. Оказывается (см. [5]), что существует такая выпуклая функция Φ, что T имеет вид $T(x) = \nabla\Phi(x)$ для μ-п.в. x. В бесконечномерном случае естественная норма для минимизации не всегда совпадает с объемлющей нормой. Например, хорошо известно, что “естественная” норма для пространства Винера есть норма Камерона–Мартина $|\cdot|_H$, которая бесконечна почти всюду. Таким образом, естественная бесконечномерная задача Монжа–Канторовича на винеровском пространстве имеет дело с функционалом

$$\int |T(x) - x|_H^2 d\mu,$$

где μ и ν – две вероятностные меры, которые абсолютно непрерывны относительно меры Винера γ. Достаточно полное решение бесконечномерной транспортной задачи на винеровском пространстве было получено в [1] (см. альтернативный подход в [2]). В частности, если

$$\mathrm{Ent}_\gamma g = \int g \ln g \, d\gamma < \infty$$

и $\nu = \gamma$, $\mu = g \cdot \gamma$, то существует оптимальная транспортировка $T(x) = x + \nabla\varphi(x)$ меры $g \cdot \gamma$ в γ, т.е. $\gamma = (g \cdot \gamma) \circ T^{-1}$, такая что φ является 1-выпуклым потенциалом (см. [6]). Градиент ∇ берется вдоль пространства Камерона–Мартина. Более того, существует такое отображение S, что $T \circ S(x) = x$ для $g \cdot \gamma$-п.в. x и $S \circ T(x) = x$ для γ-п.в. x. Отображение S также является оптимальной транспортировкой (оно переводит γ в $g \cdot \gamma$) и имеет вид $S(x) = x + \nabla\psi(x)$. Можно формально вычислить, что должно иметь место выражение

$$g = \det{}_2(I + D^2\varphi)\exp\left(\mathscr{L}\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right),$$

где D^2 – бесконечномерный гессиан,

$$\mathscr{L}\varphi = \Delta\varphi - \langle x, \nabla\varphi\rangle = \mathrm{div}_\gamma(\nabla\varphi)$$

есть оператор Орнштейна–Уленбека и $\det_2$ – определитель Фредгольма–Карлемана, определенный формулой $\det_2(I + K) = \prod\limits_{i=1}^{\infty}(1 + k_i)e^{-k_i}$, где K есть симметричный оператор Гильберта–Шмидта с собственными числами k_i.

Указанное выражение можно рассматривать как бесконечномерное уравнение Монжа–Ампера с неизвестной функцией φ. Для обратного отображения $T^{-1}(x) = x + \nabla\psi(x)$ формула замены переменных принимает вид

$$g(x + \nabla\psi)\det{}_2(I + D^2\psi)\exp\left(\mathscr{L}\psi - \frac{1}{2}|\nabla\psi|^2\right) = 1.$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва

Нетривиальна задача выяснения, какие оптимальные отображения удовлетворяют приведенной формуле замены переменных в общем случае. Эта формула была получена в [1] в предположении, что мера $g \cdot \gamma$ равномерно логарифмически вогнута, т.е. $-D^2 \ln g + I \geq \varepsilon \mathrm{Id}$, где $\varepsilon > 0$. В работах [3, 4] показано, что в предположениях $\mathrm{Ent}_\gamma g < \infty$, $g > c > 0$ мы имеем соотношение $g = \det_2(I + D_a^2\varphi)\exp\Big(\mathscr{L}_a\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\Big)$; где $D_a^2\varphi$ и $\mathscr{L}_a\varphi$ – абсолютно непрерывные части $D^2\varphi$ и $\mathscr{L}\varphi$ соответственно.

Норма Гильберта–Шмидта оператора A обозначается через $\|A\|_{\mathscr{HS}}$; по определению, $\|A\|^2_{\mathscr{HS}} = \mathrm{Tr}(AA^*)$. Следующая теорема – основной результат этой работы.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что*

$$I_\gamma g := \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\gamma < \infty. \tag{1}$$

Тогда

$$\int \|D^2\varphi\|^2_{\mathscr{HS}} g\, d\gamma < \infty,$$

$\mathscr{L}\varphi \in L^1(g \cdot \gamma)$ *и следующая формула замены переменных выполнена* $g \cdot \gamma$ *-п.в.*:

$$g = \det_2(\mathrm{I} + D^2\varphi)\exp\Big(\mathscr{L}\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\Big).$$

Напомним, что $\mathrm{I}_\gamma g$ называется информацией Фишера функции g и $\mathrm{Ent}_\gamma g$ называется энтропией g. При некоторых дополнительных предположениях мы доказываем более высокую дифференцируемость φ.

Для данного оператора A в гильбертовом пространстве H положим $M(A) := \sup\{(Ah, h): |h|_H \leq 1\}$. Если A симметричный неотрицательный, то $M(A) = \|A\|$ есть операторная норма A; общий ограниченный симметричный оператор A может быть записан как $A = A^+ - A^-$ с однозначно определенными неотрицательными симметричными операторами A^+ и A^-, такими что $A^+A^- = A^-A^+ = 0$, и тогда $M(A) = \|A^+\|$; оператор A^+ называется неотрицательной частью симметричного оператора A. Ясно, что всегда $M(A) \leq \|A\|$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что выполнено* (1), $v = -\ln g \in W^{2,1}(g \cdot \gamma)$ *и*

$$\|M(\mathrm{I} + D^2 v)\|^2_{L^{p/(2-p)}(g\cdot\gamma)} < \infty$$

при некотором $p \in (1, 2)$.

Тогда

$$\int\Big(\sum_{i=1}^\infty \|D^2\varphi_{x_i}\|^2_{\mathscr{HS}}\Big)^{\frac{p}{2}} g\, d\gamma \leq$$

$$\leq \Big(\int M(\mathrm{I} + D^2 v)^{\frac{p}{2-p}} g\, d\gamma\Big)^{\frac{2-p}{2}} \cdot (\mathrm{I}_\gamma g)^{\frac{p}{2}}.$$

Доказательства основаны на некоторых оценках, не зависящих от размерности.

Пусть γ – стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^d$ и $g \cdot \gamma$ – вероятностная мера, абсолютно непрерывная относительно γ. Рассмотрим оптимальную транспортировку $T = \nabla\Phi$ меры $g \cdot \gamma$ в γ, где Φ – соответствующий потенциал. Обозначим через $\|\cdot\|$ операторную норму и через $\|\cdot\|_{\mathscr{HS}}$ норму Гильберта–Шмидта. Напомним, что в конечномерном случае Φ имеет обобщенные вторые производные, являющиеся ограниченными борелевскими мерами, удовлетворяющими равенствам

$$\int \xi_{x_i}\Phi_{x_j} dx = -\int \xi \cdot d\Phi_{x_i x_j}$$

для каждой гладкой функции с компактным носителем и всех x_i, x_j. Заметим, что $D^2\Phi$ является операторнозначной мерой и каждая $\Phi_{x_i x_i}$ есть неотрицательная борелевская мера. Кроме того, мера $D^2\Phi$ имеет абсолютно непрерывную часть $D_a^2\Phi$ (так называемую вторую производную Александрова).

Всюду ниже предполагается, что выполнено (1). В силу гауссовского логарифмического соболевского неравенства $g\ln g \in L^1(\gamma)$. Введем классы соболева относительно меры $g \cdot \gamma$. Будем говорить, что $f \in L^2(g \cdot \gamma)$ имеет соболевскую производную $f_{x_i} \in L^2(g \cdot \gamma)$ относительно x_i, если для всякой гладкой функции ξ с компактным носителем в $\mathbb{R}^d$ верно равенство

$$\int \xi_{x_i} f g\, d\gamma = -\int \xi f_{x_i} g\, d\gamma + \int \xi f\Big(x_i - \frac{g_{x_i}}{g}\Big) g\, d\gamma. \tag{2}$$

Пространство $W^{1,2}(g \cdot \gamma)$ состоит из всех таких функций f, что $f \in L^2(g \cdot \gamma)$

$$\int |\nabla f|^2 g\, d\gamma = \sum_i \int f_{x_i}^2 g\, d\gamma < \infty.$$

Таким же образом определяется вторая соболевская производная $D^2 f$. Весовое пространство Соболева $W^{2,2}(g \cdot \gamma)$ состоит из всех таких функций f, что

$$\int f^2 g\, d\gamma + \int |\nabla f|^2 g\, d\gamma + \int \|D^2 f\|^2_{\mathscr{HS}} g\, d\gamma < \infty.$$

Интегралы в (2) корректно определены, ибо $x_i - \frac{g_{x_i}}{g} \in L^2(g \cdot \gamma)$. Пусть $g = e^{-v}$.

Будут использованы следующие результаты, полученные в [2, 7].

Теорема 3. (i) *Пусть* $\mu = g \cdot \gamma$ — *вероятностная мера на* $\mathbb{R}^d$ *и* $\sqrt{g} \in W^{1,2}(\gamma)$. *Если* g *и* Φ *являются гладкими, то выполнено неравенство*

$$I_\gamma g = \int \frac{|\nabla g|^2}{g} d\gamma = 2\operatorname{Ent}_\gamma g - 2\int \ln \det{}_2(D^2\Phi - I) g\, d\gamma +$$

$$+ \int \|D^2\Phi - I\|^2_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma + \sum_{k=1}^{d} \int \operatorname{Tr}[(D^2\Phi)^{-1} D^2\Phi_{x_k}]^2 g\, d\gamma,$$

где $\det_2(D^2\Phi - I) = \det D^2\Phi \cdot \exp(d - \Delta\Phi)$ *есть определитель Фредгольма—Карлемана оператора* $D^2\Phi - I$.

(ii) *Если даны две вероятностные меры* $f \cdot \gamma$ *и* $g \cdot \gamma$ *на* $\mathbb{R}^d$ *и соответствующие оптимальные транспортировки* $\nabla\Phi_f$ *и* $\nabla\Phi_g$, *переводящие* $f \cdot \gamma$ *и* $g \cdot \gamma$ *в* γ, *то выполнено тождество*

$$\operatorname{Ent}_{g\cdot\gamma}\left(\frac{f}{g}\right) = \int f \ln\frac{f}{g} d\gamma \ge \frac{1}{2}\int (\nabla\Phi_f - \nabla\Phi_g)^2 f d\gamma +$$

$$+ \int \left(\operatorname{Tr} D_a^2\Phi_g \cdot [D_a^2\Phi_f]^{-1} - d - \ln\det D_a^2\Phi_g \cdot [D_a^2\Phi_f]^{-1}\right) f\, d\gamma.$$

(iii) *Для всякого вектора* $e \in \mathbb{R}^d$ *имеем*

$$\int (V(x+e) - V(x)) e^{-V(x)} dx \ge$$

$$\ge \int |\nabla\Phi(x+e) - \nabla\Phi(x)|^2 e^{-V(x)} dx +$$

$$+ \int \big(\operatorname{Tr} D^2\Phi(x+e) \cdot (D^2\Phi(x))^{-1} - d -$$

$$- \ln[\det D^2\Phi(x+e) \cdot (\det D^2\Phi(x))^{-1}] e^{-V(x)}\big) dx.$$

(iv) *При* $p \ge 1$ *и* $l \le i \le d$ *выполнено неравенство*

$$\int \Phi_{x_i x_i}^{2p} g\, d\gamma \le \left(\frac{p+1}{2}\right)^p \int |x_i + v_{x_i}|^{2p} g\, d\gamma.$$

Если функция v *дважды непрерывно дифференцируема, то*

$$\int \|D^2\Phi\|^{2p} g\, d\gamma \le \int M(I + D^2 v)^p g\, d\gamma.$$

Замечание 1. В силу предложения 4.1 в [7] для всякой вероятностной меры $\mu = e^{-V}dx$ с конечным вторым моментом и логарифмической производной $-V_{x_i} \in L^2(\mu)$ имеем $\partial_{x_i}\Phi \in W^{1,2}(g \cdot \gamma)$ и

$$\int V_{x_i}^2 d\mu \ge \int \|D^2\Phi \cdot e_i\|^2 d\mu.$$

Предложение 1. *Пусть* $I_\gamma g < \infty$. *Тогда* $\Phi_{x_i} \in L^2(g \cdot \gamma)$ *для каждого* i. *Более того,*

$$I_\gamma g \ge \int \|D^2\Phi - I\|^2_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma.$$

Предложение 2. *Пусть* $I_\gamma g < \infty$, $\|D^2\Phi\| \in L^{2p/(2-p)}(g \cdot \gamma)$, *где* $2 > p > 1$. *Тогда* Φ *имеет соболевские производные до третьего порядка и*

$$\int \|D^2\Phi_{x_i}\|^p_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma < \infty,$$

$$\int \left(\sum_{i=1}^{d} \|D^2\Phi_{x_i}\|^2_{\mathcal{HS}}\right)^{\frac{p}{2}} g\, d\gamma \le \left(\int \|D^2\Phi\|^{\frac{2p}{2-p}} g\, d\gamma\right)^{\frac{2-p}{2}} \times$$

$$\times (I_\gamma g)^{\frac{p}{2}} \le \left(\int M(I + D^2 v)^{\frac{p}{2-p}} g\, d\gamma\right)^{\frac{2-p}{p}} \cdot (I_\gamma g)^{\frac{p}{2}}.$$

Относительно анализа на винеровском пространстве отошлем читателя к книгам [8, 9]. Ниже мы рассматриваем стандартную гауссовскую продакт-меру $\gamma = \prod_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ на $\mathbb{R}^\infty$ с пространством Камерона—Мартина $H = l^2$, снабженным его стандартной гильбертовой нормой $|x| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2}$, где каждая γ_i — стандартная гауссовская мера на прямой. Хорошо известно (см. [8]), что всякая бесконечномерная центрированная гауссовская мера на сепарабельном пространстве Фреше (или, более общим образом, центрированная радоновская гауссовская мера на локально-выпуклом пространстве) изоморфна продакт-мере $\gamma = \prod_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ посредством измеримого линейного отображения, взаимно однозначного на борелевском линейном подпространстве полной меры и являющегося изометрией пространств Камерона—Мартина. По этой причине полученные ниже результаты верны в более общей ситуации, в частности для сепарабельных пространств Фреше.

Рассмотрим вероятностную меру $g \cdot \gamma$, удовлетворяющую условию $I_\gamma g < \infty$. По логарифмическому неравенству Соболева имеем $2\operatorname{Ent}_\gamma g < I_\gamma g < \infty$.

Аналогично конечномерному случаю вводится дифференцирование функций в смысле Соболева относительно меры $g \cdot \gamma$ (см. подробности в [9]). А именно, если f является $g \cdot \gamma$-интегрируемой, то ее соболевская частная производная f_{x_i} относительно переменной x_i есть $g \cdot \gamma$-интегрируемая функция, удовлетворяющая равенству

$$\int f_{x_i}\xi g\, d\gamma = -\int f\xi_{x_i} g\, d\gamma - \int f\xi g_{x_i}\, d\gamma + \int f\xi g x_i\, d\gamma$$

для всякой гладкой цилиндрической функции вида $\xi(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, где u – гладкая функция с компактным носителем.

Пусть $g_n = \mathbb{E}_\gamma^n g$ – условное математическое ожидание g относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_n$, порожденной $x_1, x_2, ..., x_n$ и меры γ. Оно имеет следующее представление:

$$\mathbb{E}_\gamma^n g(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$
$$= \int g(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots) \prod_{i=n+1}^{\infty} \gamma_i(dx_i).$$

Хорошо известно (и вытекает из неравенства Йенсена), что

$$\mathrm{Ent}_\gamma g_n \le \mathrm{Ent}_\gamma g, \quad \mathrm{I}_\gamma g_n \le \mathrm{I}_\gamma g,$$

поэтому $\sqrt{g_n} \in W^{1,2}(\gamma)$. Поскольку g_n зависит только от первых n переменных, то потенциал φ_n соответствующей оптимальной транспортировки $T_n(x) = x + \nabla\varphi_n(x)$ меры $g_n \cdot \gamma$ в меру γ также зависит только от первых n переменных. По теореме 3(ii) с $f = g_n$, $g = 1$ имеем

$$\mathrm{Ent}_\gamma g_n \ge \frac{1}{2}\int|\nabla\varphi_n(x)|^2 g_n d\gamma = \frac{1}{2}\int|\nabla\varphi_n(x)|^2 g\, d\gamma,$$

а предложение 1 влечет оценку

$$\mathrm{I}_\gamma g_n \ge \int\|D^2\varphi_n\|^2_{\mathcal{HS}} g_n d\gamma = \int\|D^2\varphi_n\|^2_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma.$$

Итак, имеем

$$\sup_n\left(\int\|\nabla\varphi_n\|^2 + \|D^2\varphi_n\|^2_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma\right) < \infty.$$

Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что отображения $\nabla\varphi_n$, $D^2\varphi_n$ сходятся в гильбертовых пространствах $L^2(g \cdot \gamma, H)$ и $\mathcal{H}_g^2$, определенных следующим образом: $L^2(g \cdot \gamma, H)$ есть пространство измеримых отображений v: $R^\infty \to l^2$ с $|v| \in L^2(g \cdot \gamma)$ и $\mathcal{H}_g^2$ есть пространство таких измеримых отображений A со значениями в пространстве симметричных операторов Гильберта–Шмидта, что $\|A\|_{\mathcal{HS}} \in L^2(g \cdot \gamma)$.

Следующий факт доказан в [1]: мы имеем $\varphi_n \to \varphi$ в $L^l(g \cdot \gamma)$, где φ есть 1-выпуклый потенциал оптимальной транспортировки, переводящей $g \cdot \gamma$ в γ.

Л е м м а 1. *Существует такая подпоследовательность* $\{n_k\}$, *что* $\nabla\varphi_{n_k} \to \nabla\varphi$ *слабо в* $L^2(g \cdot \gamma, H)$ *и* $D^2\varphi_{n_k} \to D^2\varphi$ *слабо в* $\mathcal{H}_g^2$. *Значит*, $D^2\varphi$ *не имеет сингулярной компоненты относительно* $g \cdot \gamma$ *и*

$$\int\|D^2\varphi\|^2 g\, d\gamma < \infty.$$

На самом деле эта сходимость является сильной.

П р е д л о ж е н и е 3. *Имеем* $\nabla\varphi_n \to \nabla\varphi$ *в* $L^2(g \cdot \gamma, H)$ *и*

$$\|D^2\varphi_n - D^2\varphi\|_{\mathcal{HS}} \to 0 \quad g \cdot \gamma\text{-}п.в.$$

Кроме того, при $0 < p < 2$

$$\int\|D^2\varphi_n - D^2\varphi\|^p_{\mathcal{HS}} g\, d\gamma \to 0.$$

Теперь получим формулу замены переменных

$$g = \det(\mathrm{I} + D^2\varphi)\exp\left(\mathcal{L}\varphi - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right),$$

где $\mathcal{L}\varphi$ задается соотношением двойственности

$$\int\mathcal{L}\varphi\xi g d\gamma = -\int\langle\nabla\varphi, \nabla\xi\rangle g d\gamma - \int\langle\nabla g, \nabla\varphi\rangle\xi d\gamma.$$

Для упрощения обозначений будем считать, что установленные выше свойства для некоторых подпоследовательностей выполнены для всей последовательности индексов.

Л е м м а 2. *Последовательность* $\{\mathcal{L}\varphi_n\}$ *сходится* $g \cdot \gamma$-*п.в. к некоторой функции* F, *причем верна следующая формула замены переменных*:

$$g = \det(\mathrm{I} + D^2\varphi)\exp\left(F - \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Достаточно отождествить F и $\mathcal{L}\varphi$. Одним из способов сделать это было бы доказать, что интегралы от $(\mathcal{L}\varphi_n)^2$ относительно $g \cdot \gamma$ равномерно ограничены, и воспользоваться затем равномерной интегрируемостью. Однако представляется, что последовательность $\{\mathcal{L}\varphi_n\}$ может быть неограниченной в $L^2(g\cdot\gamma)$ при одном лишь предположении конечности $\mathrm{I}_\gamma g$. Чтобы обойти эту трудность, докажем другую оценку. Начнем с эвристических вычислений. Интегрируя по частям функции $(\mathcal{L}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2}$, получаем

$$\int(\mathcal{L}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g d\gamma =$$
$$= -\sum_{e_i}\int\partial_{x_i}\varphi_n\cdot\partial_{x_i}(\mathcal{L}\varphi_n)e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g d\gamma -$$
$$-\int\langle\nabla\varphi_n,\nabla g\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2}\mathcal{L}\varphi_n d\gamma +$$
$$+2\int\langle\nabla\varphi_n, D^2\varphi_n\nabla\varphi_n\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2}\mathcal{L}\varphi_n g\,d\gamma.$$

Заметим, что

$$-\int\partial_{x_i}\varphi_n\cdot\partial_{x_i}(\mathcal{L}\varphi_n)e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g d\gamma =$$
$$= \int(\partial_{x_i}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g d\gamma - \int\partial_{x_i}\varphi_n\cdot\mathcal{L}(\partial_{x_i}\varphi_n)e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma =$$
$$= \int(\partial_{x_i}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma + \int\left|\nabla\partial_{x_i}\varphi_n\right|^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma +$$
$$+\int\partial_{x_i}\varphi_n\cdot\langle\nabla\partial_{x_i}\varphi_n,\nabla g\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2} d\gamma -$$
$$-2\int\partial_{x_i}\varphi_n\cdot\langle\nabla\partial_{x_i}\varphi_n, D^2\varphi_n\nabla\varphi_n\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma.$$

Суммируя по i, получаем

$$\int(\mathcal{L}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma = -\int\langle\nabla\varphi_n,\nabla g\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2}\mathcal{L}\varphi_n d\gamma +$$
$$+2\int\langle\nabla\varphi_n, D^2\varphi_n\nabla\varphi_n\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2}\mathcal{L}\varphi_n g\,d\gamma +$$
$$+\int\left|\nabla\varphi_n\right|^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma + \int\left|D^2\varphi_h\right|^2_{\mathcal{HS}} e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma +$$
$$+\int\langle D^2\varphi_n\cdot\nabla\varphi_n,\nabla g\rangle e^{-|\nabla\varphi_n|^2} d\gamma -$$
$$-2\int\left|D^2\varphi_n\nabla\varphi_n\right|^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma.$$

Применяя стандартные соображения, можно легко получить, что

$$\sup_n\int(\mathcal{L}\varphi_n)^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma \le$$
$$\le C\sup_n\Bigl(\int\left|\nabla\varphi_n\right|^2 e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma +$$
$$+\int\left|D^2\varphi_n\right|^2_{\mathcal{HS}} e^{-|\nabla\varphi_n|^2} g\,d\gamma +$$
$$+\int\frac{|\nabla g|^2}{g}(1+|\nabla\varphi|^2)e^{-|\nabla\varphi_n|^2} d\gamma\Bigr) < \infty. \tag{3}$$

Выделим подпоследовательность $\{\mathcal{L}\varphi_n\cdot e^{-|\nabla\varphi_n|^2/2}\}$ (обозначаемую теми же индексами), которая слабо сходится в $L^2(g\cdot\gamma)$. Поскольку эта последовательность сходится $g\cdot\gamma$-п.в. к $Fe^{-|\nabla\varphi|^2/2}$, для отождествления $\mathcal{L}\varphi$ с F достаточно показать, что слабый предел $\mathcal{L}\varphi_n\cdot e^{-|\nabla\varphi_n|^2/2}$ совпадает с $\mathcal{L}\varphi\cdot e^{-|\nabla\varphi|^2/2}$. Это следует из сходимости $\nabla\varphi_n\to\nabla\varphi$ и того факта, что $\mathcal{L}\varphi_n\to\mathcal{L}\varphi$ слабо в $L^2(g\cdot\gamma)$. Последнее легко проверяется:

$$\int\mathcal{L}\varphi_n\xi g d\gamma = -\int\Bigl\langle\nabla\varphi_n,\nabla\xi+\xi\frac{\nabla g}{g}\Bigr\rangle g\,d\gamma.$$

Ясно, что эти величины стремятся к

$$-\int\Bigl\langle\nabla\varphi,\nabla\xi+\xi\frac{\nabla g}{g}\Bigr\rangle g\,d\gamma,$$

что равно $\int\mathcal{L}\varphi\,\xi g\,d\gamma$ по определению.

Остается оправдать сделанные вычисления. Достаточно иметь дело с конечномерным случаем, ибо все, что нам нужно, это оценка (3), которая немедленно переносится с конечномерного случая на бесконечномерный. Заметим, что вычисления используют существование производных третьего порядка у φ. Применяя стандартные соображения, легко показать, что достаточно установить желаемую оценку для таких функций $g = e^{-V}$, что $D^2V \le K\cdot\mathrm{I}$, $K\in\mathbb{R}$. По теореме 3(iv) для $p=\infty$ имеем $\sup_x\|D^2\varphi(x)\| = \sup_x\|D^2\Phi(x)-\mathrm{I}\| < \infty$. Далее, в силу предложения 2 функция φ имеет квадратично интегрируемую соболевскую производную третьего порядка. Эти оценки оправдывают сделанные вычисления. Теперь доказательство завершено.

Наконец, теорема 2 легко следует из конечномерных оценок.

Работа поддержана проектами РФФИ 10–01–00518, 11–01–90421–Укр-ф-а, 11–01–12104-офи-м и программой SFB 701 при университете Билефельда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Feyel D., Üstünel A.S.* // Probab. Theory Related Fields. 2004. V. 128. P. 347–385.
2. *Kolesnikov A.V.* // J. Math. Pures and Appl. (9). 2004. V. 83. № 1. P. 1373–1404.
3. *Bogachev V.I., Kolesnikov A.V.* // Infinite Dimension. Anal. Quantum Probab. Relat. Topics. 2005. V. 8. № 4. P. 547–572.
4. *Богачев В.И., Колесников А.В.* // ДАН. 2006. Т. 406. № 1. С. 7–11.
5. *Villani C.* Topics in Optimal Transportation. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2003.
6. *Feyel D., Üstünel A.S.* // J. Funct. Anal. 2000. V. 176. P. 400–428.
7. *Kolesnikov A.V.* // ArXiv:1007.1103.
8. *Bogachev V.I.* Gaussian Measures. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 1998.
9. *Bogachev V.I.* Differentiable Measures and the Malliavin Calculus. Providence (R.I.): Amer. Math. Soc., 2010.