ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2009. Том 16, № 6. С. 43–51

УДК 519.178

О МИНИМАЛЬНЫХ СЛОЖНЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

Д. С. Малышев

Аннотация. Рассматриваются понятия минимального сложного и граничного классов графов. Доказывается, что для задачи распознавания принадлежности наследственному классу графов не существует минимальных сложных классов. Указываются граничные и минимальные сложные классы графов для задач о списковом ранжировании. Эти классы графов являются первыми примерами минимальных сложных классов, а также первыми примерами сложных граничных классов.

Ключевые слова: вычислительная сложность, минимальный сложный класс, граничный класс, распознавание наследственного свойства, задачи о списковом ранжировании.

Введение

В статье рассматриваются наследственные классы графов, т. е. множества графов, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой наследственный класс графов $\mathcal{X}$ определяется множеством своих запрещённых порождённых подграфов $\mathcal{S}$, это записывается так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{S})$. Минимальное по включению множество запрещённых порождённых подграфов для $\mathcal{X}$ является единственным и обозначается через $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$. Если $\mathrm{Forb}(\mathcal{X})$ конечно, то класс $\mathcal{X}$ называется *конечно определённым*.

Одним из инструментов классификации наследственных классов по сложности решения тех или иных задач является понятие граничного класса, введённое в [3], обобщённое в [4] и уточнённое в [1]. Пусть Π — какая-нибудь задача на графах. Наследственный класс графов называется Π-*простым*, если задача Π в этом классе полиномиально разрешима, и Π-*сложным* в противном случае. На протяжении настоящей статьи предполагается, что P$\neq$NP, и это условие не включается явно в формулировки теорем и других утверждений. Например, такого: если задача Π остаётся NP-полной для графов из наследственного класса $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ является Π-сложным. Наследственный класс графов $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует такая бесконечная последовательность

П-сложных классов графов $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению П-предельный класс называется П-*граничным.*

В каждом П-сложном классе содержится П-граничный подкласс. Конечно определённый класс, содержащий П-граничный подкласс, является П-сложным [4]. Таким образом, знание всех П-граничных классов позволяет полностью охарактеризовать конечно определённые П-сложные классы: конечно определённый класс является П-сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится хотя бы один П-граничный подкласс. Для произвольных наследственных классов это не так. Например, класс всех лесов является простым для задачи о независимом множестве, и в то же время в нём содержится известный граничный класс [3].

Таким образом, понятие граничного класса в общем случае не является достаточным для описания границы между простыми и сложными классами, и необходимо привлечение других средств. Естественно напрашиваются максимальные (по включению) П-простые и минимальные П-сложные классы. Однако максимальных простых классов не существует, так как любой наследственный класс, отличный от класса всех графов, можно расширить добавлением одного графа и всех его собственных порождённых подграфов. Что же касается минимальных сложных классов, то вопрос об их существовании до настоящего времени был открыт, и настоящая работа посвящена его исследованию. Она содержит результаты двоякого рода. В разд. 1 доказывается, что для задач распознавания наследственных свойств графов не существует минимальных сложных классов. В разд. 2–3 рассматриваются задачи о списковом ранжировании (вершинный и рёберный варианты) и доказывается минимальность некоторых сложных классов для этих задач.

Все известные до сих пор граничные классы были простыми. Вопрос о существовании сложных граничных классов был поставлен в [4]. Настоящая статья отвечает на этот вопрос, так как описанные в разд. 3 минимальные сложные классы для задач о списковом ранжировании являются в то же время сложными граничными классами для этих задач. Остаётся открытым вопрос о существовании минимальных сложных классов, не являющихся граничными.

В статье использованы обозначения: $[\mathcal{X}]$ — наследственное замыкание класса $\mathcal{X}$ (объединение $\mathcal{X}$ со всеми порождёнными подграфами графов из $\mathcal{X}$); $L(G)$ — рёберный граф для графа G; $L(\mathcal{X})$ — класс графов, изоморфных рёберным графам к графам из $\mathcal{X}$; E — дерево, получаемое подразбиением двух рёбер графа $K_{1,3}$; B_i — граф, получаемый соединением вершин степени 2 двух копий пути P_3 простым путём длины i.

1. О несуществовании минимальных сложных классов для некоторых задач на графах

С любым классом графов $\mathcal{X}$ ассоциируется задача распознавания принадлежности графа этому классу, далее коротко называемая задачей РП$[\mathcal{X}]$. Среди известных NP-полных задач этого рода можно отметить задачи о k-раскрашиваемости при $k \geqslant 3$ (вершинной и рёберной), о графах пересечений кругов единичного радиуса [5], о графах рёберных пересечений путей в дереве [4]. Заметим, что во всех этих примерах речь идет о распознавании наследственных свойств.

Теорема 1. *Если $\mathcal{X}$ — наследственный класс, то не существует минимальных* РП$[\mathcal{X}]$*-сложных классов.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{Y}$ — РП$[\mathcal{X}]$-сложный класс. Тогда $\mathcal{Y}$ содержит граф G, не принадлежащий классу $\mathcal{X}$ (если $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, то задача распознавания принадлежности классу $\mathcal{X}$ для графов из $\mathcal{Y}$ решается тривиальным образом). Рассмотрим класс $\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \cap \mathrm{Free}(\{G\})$. Допустим, что известен алгоритм распознавания принадлежности классу $\mathcal{X}$ для графов из класса $\mathcal{Z}$. Тогда эта же задача для графов из $\mathcal{Y}$ может быть решена следующим образом. Сначала проверяем, содержится ли в данном графе H порождённый подграф, изоморфный графу G. Если содержится, то ответ «нет» (граф H не принадлежит классу $\mathcal{X}$, это следует из того, что $\mathcal{X}$ — наследственный класс). Если не содержится, то $H \in \mathcal{Z}$ и применяем алгоритм распознавания принадлежности классу $\mathcal{X}$ для графов из $\mathcal{Z}$. Ясно, что наличие в графе порождённого подграфа, изоморфного фиксированному графу G, проверяется за полиномиальное время. Поэтому если принадлежность классу $\mathcal{X}$ для графов из $\mathcal{Z}$ проверяется за полиномиальное время, то то же самое верно и для графов из $\mathcal{Y}$. Поскольку класс $\mathcal{Y}$ является РП$[\mathcal{X}]$-сложным, таков и класс $\mathcal{Z}$, а так как $\mathcal{Z} \subset \mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y}$ — не минимальный. Теорема 1 доказана.

2. О вычислительной сложности задач о списковом ранжировании для некоторых классов графов

Задачи о списковом ранжировании, сформулированные в [6, 8], являются обобщениями известных задач о списковой раскраске и о ранжировании. Пусть заданы граф G с множеством вершин V и множество $\mathcal{L} = \{L(v) :\ v \in V\}$, где каждое $L(v)$ — конечное множество натуральных чисел. *$\mathcal{L}$-ранжированием* графа G называется такая раскраска c его вершин, что

1) $c(v) \in L(v)$ для каждой вершины v;

2) если $c(u) = c(v)$, $u \neq v$, то каждый путь, соединяющий u и v, содержит такую вершину w, что $c(w) > c(u)$.

Задача ВСР (вершинное списковое ранжирование) состоит в том, чтобы по данным G и $\mathcal{L}$ определить, существует ли $\mathcal{L}$-ранжирование графа G. В задаче РСР о рёберном ранжировании списки допустимых цветов назначаются рёбрам и ищется рёберная раскраска, удовлетворяющая вышеприведённым требованиям, в которых слово «вершина» заменено словом «ребро». Множество $\mathcal{L}$ будем называть (вершинной или рёберной) *палитрой*. Необходимо уточнить, что под ВСР (РСР)-простым классом графов далее понимается такой наследственный класс, что соответствующая задача решается для графов из этого класса за полиномиальное время при любой палитре.

Ранжирование несвязного графа есть объединение ранжирований его компонент связности. Поэтому при доказательстве полиномиальной разрешимости задач о ранжировании для тех или иных классов графов можно ограничиться рассмотрением связных графов.

Пусть G — граф, $\mathcal{L}$ — вершинная палитра для G, H — его порождённый подграф. Будем говорить об $\mathcal{L}$-ранжировании графа H, имея в виду его $\mathcal{L}'$-ранжирование, где $\mathcal{L}'$ — палитра для H, получаемая удалением из $\mathcal{L}$ всех множеств, соответствующих вершинам, не входящим в H.

Обозначим через $\mathcal{P}ath$ ($\mathcal{C}ycle$) класс графов, состоящий из всех простых путей (циклов) и их порождённых подграфов.

Теорема 2. *Каждый из классов $\mathcal{P}ath$ и $\mathcal{C}ycle$ является* ВСР-*простым и* РСР-*простым.*

Доказательство. Для класса $\mathcal{P}ath$ оба утверждения доказаны в [6]. Пусть G — связный граф с множеством вершин V, $\mathcal{L}$ — вершинная палитра для G, x — наибольший из цветов этой палитры. Ясно, что в любом $\mathcal{L}$-ранжировании имеется не более одной вершины цвета x. Понятно также, что если существует хотя бы одно вершинное $\mathcal{L}$-ранжирование этого графа, то существует такое его ранжирование, в котором одна из вершин имеет цвет x. Определим палитру $\mathcal{L}'$, которая получается из $\mathcal{L}$ удалением элемента x из всех содержащих его множеств. Если существует $\mathcal{L}$-ранжирование графа G, в котором вершина v покрашена в цвет x, то существует $\mathcal{L}'$-ранжирование графа $G - \{v\}$. Обратно, если хотя бы для одного из графов $G - \{v\}$ с $x \in L(v)$ существует $\mathcal{L}'$-ранжирование, то существует и $\mathcal{L}$-ранжирование графа G. Отсюда следует, что задача ВСР для класса $\mathcal{C}ycle$ полиномиально сводима к той же задаче для класса $\mathcal{P}ath$. Эти рассуждения очевидным образом распространяются и на рёберное ранжирование. Теорема 2 доказана.

Определим для $i \geqslant 1$, $j \geqslant 0$ граф $C(i,j)$, который получается отождествлением одной из концевых вершин пути P_i с центральной вершиной графа $K_{1,j}$; он называется *кометой*. Класс всех комет и их порождённых подграфов обозначим через $\mathcal{C}omet$. Определим ещё два класса:

$$\mathcal{C}omet_1(k) = [\{C(i,j):\ i \leqslant k, j \geqslant 0\}];$$
$$\mathcal{C}omet_2(k) = [\{C(i,j):\ i \geqslant 1, j \leqslant k\}].$$

Теорема 3. *Класс* $\mathcal{C}omet$ *является* ВСР- *и* РСР-*сложным. Для любого фиксированного* k *каждый из классов* $\mathcal{C}omet_1(k)$ *и* $\mathcal{C}omet_2(k)$ *является* ВСР- *и* РСР-*простым.*

Доказательство. ВСР- и РСР-сложность класса $\mathcal{C}omet$ доказана в [6]. Там же доказано, что для любого фиксированного s класс деревьев, у которых число нелистовых вершин не превосходит s, является ВСР- и РСР-простым, из чего следует ВСР- и РСР-простота класса $\mathcal{C}omet_1(k)$. Покажем, что при любом фиксированном k задача ВСР для класса $\mathcal{C}omet_2(k)$ полиномиально сводима к той же задаче для класса $\mathcal{P}ath$.

Заметим, что всякий связный граф с более чем одной вершиной из $\mathcal{C}omet$ является кометой. Пусть $G = C(i,j)$, $j \leqslant k$, $\mathcal{L}$ — вершинная палитра для графа G. Во избежание тривиальностей считаем, что $i \geqslant 3$, $j \geqslant 2$. Пусть v — вершина степени $j+1$ в графе G, $v_1, v_2, \ldots, v_j$ — смежные с ней вершины степени 1, а вершины $u_1, u_2, \ldots, u_i$ образуют путь P, причём $u_i = v$. Рассмотрим подграф H, порождённый множеством $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_j\}$. Пусть c — какое-нибудь $\mathcal{L}$-ранжирование графа H, $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — все различные цвета, используемые в этом ранжировании, причём $x_1 < x_2 < \ldots < x_s$. Построим путь P_c, добавляя к пути P вершины $w_1, w_2, \ldots, w_s$ и рёбра $(v, w_1), (w_1, w_2), \ldots, (w_{s-1}, w_s)$. Определим для графа P_c палитру

$$\mathcal{L}_c = \{L(u_1), \ldots, L(u_i), L(w_1) = \{x_1\}, \ldots, L(w_s) = \{x_s\}\}.$$

Если для P_c есть $\mathcal{L}_c$-ранжирование, то из него очевидным образом получается $\mathcal{L}$-ранжирование графа G. Обратно, любое $\mathcal{L}$-ранжирование графа G определяет некоторое $\mathcal{L}$-ранжирование c графа H и $\mathcal{L}_c$-ранжирование графа P_c. Поскольку k фиксировано, число $\mathcal{L}$-раскрашиваний подграфа H ограничено полиномом от размера входных данных задачи. Аналогично доказывается полиномиальная сводимость задачи РСР для класса $\mathcal{C}omet_2(k)$ к той же задаче для класса $\mathcal{P}ath$. Теорема 3 доказана.

Определим для $i \geqslant 1$, $j \geqslant 0$ граф $H(i,j)$, получаемый отождествлением одной из концевых вершин пути P_i с какой-нибудь вершиной графа

K_{j+1}; такой граф будем называть *молотом*. Через $\mathcal{H}ammer$ обозначим класс, состоящий из всех молотов и их порождённых подграфов. Определим также классы

$$\mathcal{H}ammer_1(k) = [\{H(i,j): \ i \leqslant k, j \geqslant 0\}];$$
$$\mathcal{H}ammer_2(k) = [\{H(i,j): \ i \geqslant 1, j \leqslant k\}].$$

Лемма 1. *Задача* РСР *для любого класса графов* $\mathcal{X}$ *полиномиально эквивалентна задаче* ВСР *для класса* $L(\mathcal{X})$.

Доказательство. Пусть задан граф $G \in \mathcal{X}$ с рёберной палитрой $\mathcal{L}$. Построим (за полиномиальное время) граф $L(G)$ с вершинной палитрой $\mathcal{L}$. Любому вершинному $\mathcal{L}$-ранжированию графа $L(G)$ соответствует рёберное $\mathcal{L}$-ранжирование графа G. Это следует из того, что любая последовательность рёбер, образующая путь в графе G, превращается в последовательность вершин, образующую путь в графе $L(G)$. Верно и обратное: любое рёберное $\mathcal{L}$-ранжирование графа G при переходе к графу $L(G)$ превращается в его вершинное $\mathcal{L}$-ранжирование. В самом деле, последовательность рёбер графа G, соответствующая последовательности вершин, образующей путь в графе $L(G)$, не всегда является путём в G. Но в ней всегда найдётся подпоследовательность, образующая путь, соединяющий первое и последнее рёбра. Таким образом, задача РСР для класса $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к задаче ВСР для класса $L(\mathcal{X})$.

Обратно, пусть дан граф $H \in L(\mathcal{X})$ с вершинной палитрой $\mathcal{L}$. Единственной причиной нарушения биективности соответствия между графами и их рёберными графами является то, что $L(K_3) = L(K_{1,3}) = K_3$ [2]. Обозначим через k количество компонент связности графа H, являющихся треугольниками, и пусть H' — его подграф, образованный всеми остальными компонентами связности. Тогда существует единственный граф G', для которого $H' = L(G')$, и он может быть найден по графу H' за полиномиальное время [9]. Понятно, что равенство $H = L(G)$ выполняется для тех и только тех графов G, которые получаются добавлением к графу G' k компонент связности, каждая из которых есть либо $K_{1,3}$, либо K_3. Таких графов (с точностью до изоморфизма) имеется ровно $k+1$, и среди них есть хотя бы один граф из $\mathcal{X}$. Каждому из этих графов естественным образом назначается рёберная палитра $\mathcal{L}$. Рассуждая как в предыдущем абзаце, приходим к выводу, что рёберное $\mathcal{L}$-ранжирование каждого из этих графов определяет вершинное $\mathcal{L}$-ранжирование графа H, и обратно. Отсюда следует, что задача ВСР для класса $L(\mathcal{X})$ полиномиально сводится к задаче РСР для класса $\mathcal{X}$. Лемма 1 доказана.

Очевидно, $L(C(i,j)) = H(i-1,j)$, $L(\mathcal{C}omet) = \mathcal{H}ammer$,

$L(\mathcal{C}omet_1(k)) = \mathcal{H}ammer_1(k-1)$, $L(\mathcal{C}omet_2(k)) = \mathcal{H}ammer_2(k)$. Поэтому из теоремы 3 и леммы 1 следует

Теорема 4. *Класс $\mathcal{H}ammer$ является* BCP-*сложным. Для любого фиксированного k каждый из классов $\mathcal{C}omet_1(k)$ и $\mathcal{C}omet_2(k)$ является* BCP-*простым.*

3. Граничные и минимальные сложные классы графов для задач о списковом ранжировании

Далее используется следующий критерий граничности, доказанный в работе [1].

Теорема 5. Π-*предельный класс $\mathcal{X}$ является* Π-*граничным тогда и только тогда, когда для каждого $G \in \mathcal{X}$ существует такое конечное множество графов $\mathcal{X}_G \subseteq \mathrm{Forb}(\mathcal{X})$, что класс $\mathrm{Free}(\mathcal{X}_G \cup \{G\})$ является* Π-*простым.*

Теорема 6. *Класс $\mathcal{C}omet$ является* BCP- *и* PCP-*граничным.*

Доказательство. Так как класс $\mathcal{C}omet$ является BCP- и PCP-сложным, то он BCP- и PCP-предельный.

Пусть $G \in \mathcal{C}omet$, тогда G — порождённый подграф графа $C(i,j)$ при некоторых i, j. Положим $\mathcal{X} = \{B_1, B_2, B_3, 2K_{1,3}, E, C_3, C_4, C_5\}$. Заметим, что все графы из $\mathcal{X}$ не принадлежат классу $\mathcal{C}omet$. Легко проверить, что связный граф из класса $\mathrm{Free}(\mathcal{X})$ является либо простым циклом, либо кометой. Поэтому

$$\mathrm{Free}(\mathcal{X} \cup \{G\}) \subseteq \mathrm{Free}(\mathcal{X} \cup \{C(i,j)\}) \subseteq \mathcal{C}ycle \cup \mathcal{C}omet_1(i) \cup \mathcal{C}omet_2(j).$$

Из теорем 2 и 3 следует, что класс $\mathrm{Free}(\mathcal{X} \cup \{G\})$ BCP- и PCP-простой для любого $G \in \mathcal{C}omet$, а из теоремы 5 — что класс $\mathcal{C}omet$ BCP- и PCP-граничный. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Класс $\mathcal{H}ammer$ является* BCP-*граничным.*

Доказательство. Так как класс $\mathcal{H}ammer$ является BCP-сложным, то он BCP-предельный.

Пусть $G \in \mathcal{H}ammer$, тогда G — порождённый подграф графа $H(i,j)$ при некоторых i, j. Положим

$$\mathcal{X} = \{L(B_1), L(B_2), K_{1,3}, 2K_3, L(E), K_4 - e, C_4\}.$$

Заметим, что ни один граф из $\mathcal{X}$ не принадлежит классу $\mathcal{H}ammer$. Легко проверить, что связный граф из класса $\mathrm{Free}(\mathcal{X})$ является либо простым циклом, либо молотом. Поэтому

$$\mathrm{Free}(\mathcal{X}\cup\{G\}) \subseteq \mathrm{Free}(\mathcal{X}\cup\{H(i,j)\}) \subseteq \mathcal{C}ycle\cup\mathcal{H}ammer_1(i)\cup\mathcal{H}ammer_2(j).$$

Из теорем 2, 3 и леммы 1 следует, что класс $\mathrm{Free}(\mathcal{X}\cup\{G\})$ ВСР-простой для любого $G \in \mathcal{H}ammer$, а из теоремы 5 — что класс $\mathcal{H}ammer$ ВСР-граничный. Теорема 7 доказана.

Лемма 2. *Всякий* П-*сложный граничный класс является минимальным* П-*сложным классом.*

Доказательство. Всякий П-сложный класс является П-предельным. Поэтому П-сложный класс, в котором содержится другой П-сложный класс, не является минимальным П-предельным, а значит, и П-граничным. Лемма 2 доказана.

Из теорем 6, 7 и леммы 2 следует

Теорема 8. *Класс $\mathcal{C}omet$ является минимальным* ВСР-*сложным и минимальным* РСР-*сложным классом, а класс $\mathcal{H}ammer$ является минимальным* ВСР-*сложным классом.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Малышев Д. С.** Критерий граничности и его применения // Дискрет. анализ и исслед. операций. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 3–10.
2. **Харари Ф.** Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 с.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.
4. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoret. Comp. Sci. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.
5. **Breu H., Kirkpatrick D. G.** Unit disk graph recognition is NP-hard // Comput. Geometry. — 1998. — V. 9. — P. 3–24.
6. **Dereniowski D.** The complexity of list ranking of trees // Ars Combinatoria. — 2008. — V. 86. — P. 97–114.
7. **Golumbic M. C., Jamison R. E.** The edge intersection graphs of paths in trees // J. Combinatorial Theory B.— 1985.— V. 38.— P. 8–22.
8. **Jamison R. E.** Coloring parameters associated with rankings of graphs // Congressus Numerantum. — 2003. — V. 164. — P. 111–127.

9. **Roussopoulos N.** A $\max\{m, n\}$ algorithm for determining the graph H from its line graph G // Information Processing Lett. — 1973. — V. 2, N 4. — P. 108–112.

Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: dsmalyshev@rambler.ru

Статья поступила
10 пареля 2009 г.
Переработанный вариант —
20 июля 2009 г.