Милек О. В., Шмерлинг Д. С., Москва

Некоторые проблемы математического моделирования неравенства и распределения доходов[1]

Тема «распределения доходов населения» сопряжена с проблематиками из сферы социологии и экономики. Говоря о неравенстве распределения доходов, мы имеем в виду и гносеологический аспект справедливости социально-экономического положения граждан, и реальную политику в сфере благосостояния населения конкретной страны. Цель достоверного определения уровня бедности и пути эффективной борьбы со столь злободневным социальным недугом также формулируется социологами-эмпириками. Необходимость определения среднего класса, выявление корреляции неравенства населения в обществе с различными экономическими показателями страны, разработка эффективной налоговой политики – это лишь некоторые содержательные задачи, которые стоят на повестке дня у исследователей.

Экономический рост как основной интегральный показатель улучшения качества жизни населения используется повсеместно. И в измерении эффективности социально-экономической политики, и в планировании мер по внедрению основных механизмов реализации этой политики. При обсуждении вопроса обеспечения экономического роста и повышения благосостояния населения страны зачастую используются понятия «ликвидация бедности», сокращение «дифференциации доходов», формирование устойчивого «среднего класса». Во всех этих разговорах понятие «экономический рост» является ключевой категорией, которая обуславливает остальные параметры социально-экономической структуры. Существует и иной методологический подход к проблеме, который в принципиально ином ракурсе рассматривает причинно-следственную связь «экономического роста» и «социально-экономической дифференциации населения». В данном подходе «расслоение» является основополагающим критерием принципиальной возможности развития экономики страны. Что влечет за

[1] Статья подготовлена по результатам научно-исследовательской работы «Системная модернизация экономики России», выполняемой в рамках Тематического плана прикладных исследований, реализуемых ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации» в 2012 году в рамках бюджетного финансирования.

собой понимание не просто причинно-следственной связи явлений, а анализ структурной организации и взаимодействия всех процессов социально-экономической жизни в рамках парадигмы системного подхода[1].

Одним из направлений в рамках данной научно-познавательной проблемы является вопрос математического моделирования неравенства распределения доход. Огромное количество методов анализа данных в социологии были изобретены для другого рода задач (не социологической направленности). Несомненно, качество и степень эффективности данных методов в социальных науках не оспорима, однако необходимо помнить об ограничения и рамках возможности анализа. Например, говоря об изучении факторов, влияющих на распределение трудовых доходов, исследователь берет во внимание не только тип распределение этих доходов, но и все ограничения использования регрессий для социальных данных.

Множество проблем всех уровней анализа (микро-, мезо-, макро-) делают эту проблему актуальной как для теоретических изысканий, так и для практической реализации социально-политических и налоговых мер экономической политики.

Системный подход в своей методологической парадигме не предполагает изучать объект с разных точек зрения путем синтеза и анализа отдельных ее частей. В данной методологии предполагается изучать целое как единый организм. Как отмечает один из идеологов системного анализа в России И.Н. Дрогобыцкий «увидеть целое можно только при одновременном понимании структуры, функции и процесса»[2]. Тем самым необходимо осуществить качественный переход к анализу проблемы от кластеризации участников и отраслей, к таким понятиям как структура процесса, функция данного явления, реализация самого процесса, и среда, которая присутствует на данном историческом этапе.

Проблема неравенства в доходах хорошо известна по крайней мере с работы Макса Лоренца (Lorenz M.O., 1905)[3] о кривых рассеяния, см. например Кендалл, Стьюарт (1966), пар. 2.25[4].

Существует огромная литература по проблеме дифференциации населения, территории, предприятий и т. п. по доходам, богатству, имуществу.

Еще в прошлом веке В. Парето в своих трудах установил тип распределения доходов населения путем обширного анализа статистического материала о доходах по многим страна. Данное распределение именуется «распределением Парето», закон «80:20» был сформулирован как продолжение выявленного классиком правила «20% самых богатых людей концентрируют в своих руках 80% общественного благосостояния». Можно охарактеризовать подход Парето к измерению неравенства доходов как

---

[1] Существует фундаментальное пособие по данной проблематике: Atkinson A.B., Bourguignon F. Eds. Handbook of income distribution, v.1. – Amsterdam e.a.: Elsevier North Holland, 2007. – xix, 918, 38 pp.

[2] *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике.-М.: Финансы и статистика,2007.-508 с.

[3] Биография Макса Лоренца есть у Маршала, Олкина (1983), см. также Lorenz_curve.Wikipedia.html

[4] Впрочем, неравенство было описано и в работе В.И. Ленина «Развитие капитализма в России» (1899).

системный подход к проблеме. В рамках системной парадигмы необходимо не просто производить оценку доли населения с величиной ниже прожиточного минимума (абсолютная бедность), или считать долю населения, доход которой ниже среднего дохода по РФ (относительная бедность). А развивать системность измерения перераспределения доходов (лишь элементом которой является прогрессивная шкала налогообложения) и учитывать функции стратификации, искать объективные показатели расслоения общества (например, уровень коэффициентов стратификации: фондов, уровней, Джини, Аткинсона), когда уже не возможно стабильное экономическое развитие.

Профессор А.Ю. Шевяков совместно с А.Я. Кирутой в своих трудах формулируют мысль, которая является ключевой в понимании социально-экономической политики на современном этапе ее развития: обеспечение экономического роста напрямую зависит от уровня социально-экономического неравенства в обществе, которая в свою очередь не может быть эффективно решена никакими другими методами, кроме как эффективными перераспределительными механизмами[1].

Возможность связать т. н. «избыточную» дифференциацию с уменьшением человеческого потенциала за счет ухудшения всякого рода социальных лифтов весьма плодотворна. Большое исследование в этом направлении предпринял А.Я. Кирута[2]. Дело в том, что ещё не изжит миф о полезности значительной дифференциации, как стимулирующего развитие фактора. На самом деле стимулировать может лишь не слишком большая дифференциация доходов – возможно не выше “линейной”, см.ниже.

Исследование и разъяснение этого вопроса широким кругам представителей бизнеса, органам государственной власти представляет собой важнейшую задачу современного научного сообщества. События последнего времени под лозунгом «Захвати Wall Street» (осень 2011) подтверждает мысль о том, что большое неравенство не одобряют не только теоретики-экономисты, социологи, но и широкие круги населения.

И, несмотря на тот факт, что в США проблематика неравенства доходов стоит на повестке дня уже не первый год, мы можем констатировать очевидную злободневность этой проблемы и в обществе свобод. На примере данных исследования доходов домохозяйств мы продемонстрируем проблемы математического характера изучения распределения доходов.

Впервые построив гистограмму распределения домохозяйств США по доходу мы обнаружили для себя загадку. Распределение доходов, что и предполагалось, визуально более соответствует предположению Парето

---

[1] *Шевяков А.Ю.* Экономическое неравенство: тормоз демографического роста // Журнал новой экономической ассоциации. – М. 2011. № 9. С. 197 – 201. *Шевяков А.Ю., Кирута А.Я.* Неравенство, экономический рост и демография: неисследованные взаимосвязи. – М.: М-студия, 2009.

[2] *Кирута А.Я.* Неравенство, бедность и социально-гуманитарные факторы модернизации. Август 2011. Рукопись; Кирута А.Я.Влияние неравенства на качество человеческого потенциала в России //Вестник Института социологии РАН,2011,№3, с.67-87.

(Парето на «правом хвосте» и логлогистическому в средней части распределения), нежели статистическому распределению Гаусса. Эмпирическое распределение имеет явный вид «двугорбого», что неправдоподобно для распределения доходов. Почему так случилось – загадка.

Дело в том, что “математическая” загадка была на самом деле социального характера. В промежутке от $150 000 до $200 000 сконцентрировалось 3 595 домохозяйств, а в соседних интервалах значительно меньше. Данный феномен полностью объясняется налоговым законодательством страны, где пропорциональная система стимулирует концентрировать доходы ниже границы в $200 000. Несколько выше $179 000 (эта граница плавающая, и в 2012 году составила уже $198 000) налог на домохозяйство повышается с 28% до 33%[1]. Это факт демонстрирует нам, что даже в системе жесткого налогового контроля, где проблема неравенства позиционируется как первоочередная цель достижения общества благосостояния, наблюдаются проблемы сокрытия доходов.

Содержательно при математической экстраполяции доходов правого хвоста необходимо учитывать данную проблему «скрытия доходов». Одним из вариантов является равномерное разнесение этой группы на следующие интервалы доходов (или «сглаживание правого хвоста» распределением Парето, а середину логлогистическим).

Таким образом, даже на данных генеральной совокупности о доходах населения мы можем констатировать сомнительность достоверного изучения «правого хвоста» данных, а значит и оценки дифференциации доходов населения.

Здесь мы сталкиваемся с проблемой измерения неравенства и интерпретацией полученных результатов измерения. Что касается измерения неравенства, то существуют традиционные меры Gini, Pietra и др.[2] Однако, распространённой интерпретации общепринятых коэффициентов дифференциации доходов нам не известны. В качестве варианта таковой, предлагаем следующую модель, описывающую распределение доходов в небольшом коллективе. Эта модель дает представление о возможных внутренних механизмах income distribution.

Весьма распространен метод измерения неравенства с помощью коэффициента (индекса) Джини (Corrado Gini, 1912). Пусть,

$$\Delta_1 = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=\infty}^{\infty} \sum_{k=\infty}^{\infty} \left| x_j - x_k \right| f(x_j) f(x_k) \qquad (1)$$

-

средняя разность Джини(для дискретного случая),

где x1, x2, ... - величина доходов, f(x1), f(x2) – вероятность (или частота по выборке) людей с доходами x1, x2, ... соответственно.

---

[1] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Income_tax_in_the_United_States#Year_2012_income_brackets_and_tax_rates.

[2] См. *Kotz*, Kleiber (2003) §2.1, §2.2 P. 35-39.

Величину Δ1 обычно нормируют так, чтобы $\Delta 1^* = \Delta 1 / \Delta 1^{max}$ € [0,1], при этом чем больше (и ближе к 1), тем значительней неравенство населения.

Кстати, площадь над кривой рассеяния (Лоренца) и под диагональю (рис. 2.2 у Кендалла, Стьюарта, 1966, с.75) равна Δ1/4 μ1, где μ1 =

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-a) f(x) dx ,$$

f(x) – плотность распределения, обычно организуют a=0, (пар.2,3 Кендалл, Стьюарт, 1966).

Собственно кривая рассеяния есть

$$\phi(x) = \frac{1}{\mu_1'} \int_{-\infty}^{x} f(x) dx \qquad (2)$$

т. е. «неполный первый момент распределения» (там же, с. 75-77, (2.31)).

Вычисление оценки средней разности (там же, пар.2.26, (2.33), (2.34) и пример).

Коэффициент Джини вычисляется и публикуется для большинства стран уже десятки лет, о методах оценивания, в т. ч. с группированными данными см. Gastwirth (1972), Modorres, Gastwirth (2006)[1].

Некоторую сводку значений нормированного индекса Джини (по данным ЦРУ), к примеру в Норвегии 0,25 (2008 год), во Франции 0,32 (2008 год), в России 0,423 (2008 год), в Нигерии 0,437 (2003 год), в США 0,45 (2007 год), в Мексике 0,482 (2008 год), на Гаити 0,538 (2001 год), в Сьерра-Леоне 0,629 (1989 год), в Южной Африке 0,65 (2005 год), в Намибии 0,707 (2003 год)[2], а позже до 0,75.

Читатель-экономист, может быть, уже привык к таким данным, но насколько обществом понят смысл значений коэффициента Джини?

Существует обширная литература о вреде высокого (> 0,3) коэффициента Джини, см., например, Справочник по распределению дохода (Atkinson, Bourguignon, 2000). Граница 0,3 или 1/3 (0,33) достаточно произвольна и представляет что-то около среднеевропейского среднего коэффициента Джини.

Было бы полезно поискать за значениями нормированного коэффициента G', 0 ≤ G' ≤ 1, какой-нибудь «физический» смысл (то бишь, экономический!).

Рассмотрим следующую модель. Пусть x_i – доход лиц, относящихся к i-му уровню иерархии применительно к компании, населению территории и т. п., i = 1, ..., n. Модель P ("тарифная сетка") такова.

---

[1] См. также *Morgan J.* The Anatomy of Income Distribution // Rev.Econ.Statist. (MITpress), 1962, v.44, N 3, p. 270-283

[2] В Боливии индекс Джини 0,592, а децильное отношение ужасно велико – 168,1 (!)

Доход на i-м уровне (i = 1 – лица с наименьшим, а i = n – с наибольшими доходами) равен $x_i = ki^m$, m = 1, 2, 3, ..., k > 0.

Теорема. Коэффициент (индекс) Джини $G_m'(n)$ для модели P равен асимптотически при n →∞

$$G'_m(n) = \frac{m}{m+2} \qquad (1à)$$

Набросок доказательства

$$G'(n) = \frac{"\sigma"\ (n)}{\max\limits_x "\sigma"\ (n)}, \qquad (2à)$$

где maximum берется по всем возможным $\{x_{(1)}, x_{(2)},..., x_{(n)}\}$, таким, что

$$\sum_{1\le i\le n} x_{(i)} = C(n) \qquad (3)$$

$$"\sigma"'\ (n) = \frac{2\sqrt{\pi}}{n(n-1)} \sum_{1\le i\le n} (i - \frac{n+1}{n}) x_{(i)}, \qquad (4)$$

$X_{(i)}$ – *i*-ая порядковая статистика[1]

$$G(n) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\le i.j\le n} \left| x_i - x_j \right|. \qquad (6)$$

Используя другую форму ”σ”(n)= ”σ”

$$"\sigma" = \frac{\tilde{\kappa} 2 * \sqrt{\pi}}{n(n-1)} \left\{ \sum_1^n {}_i x_{(i)} - \frac{n+1}{n} \sum_1^n x_{(i)} \right\} \qquad (7)$$

и вычисляя

[1] См. Дэйвид (1978), (7.4.1.) и весь §7.4., с. 187—189 упражнение 7.4.1., с. 214, §9.6, (9.6.1.), где обсуждается асимптотическая нормальность “σ”. При этом $E"\sigma" = 2\sqrt{\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x\left[P_{(x)} - \frac{1}{2}\right] dP_{(x)}}$, ”σ” – несмещенная оценка для σ в случае нормальных выборок, P(x) – функция распределения.

$$\max_{x}\text{"}\sigma\text{"}=\frac{\sqrt{\pi}*\tilde{\kappa}}{n}S_m(n) \qquad (8)$$

где[1]
$$S_m(n)=\sum_{k=0}^{n-1}k^m$$

сумма целых чисел в степени m=1, 2, 3,..., k = 0, 1, 2,...., n-1, можно получить выражение для (3).

Именно, при $\tilde{S}_m(n)=S_m(n)+n^m$

$$\text{"}\sigma\text{"}=\frac{2\tilde{\kappa}\sqrt{\pi}}{n(n-1)}\left\{\tilde{S}_{m+1}(n)-\frac{n+1}{n}\tilde{S}_m(n)\right\}/\frac{\tilde{\kappa}\sqrt{\pi}}{n}\tilde{S}_m(n) \qquad (9)$$

Откуда (здесь m напоминает о степени многочлена)

$$G'_m(n)=\frac{2}{n-1}\left\{\frac{\tilde{S}_{m+1}(n)}{\tilde{S}_m(n)}-\frac{n+1}{2}\right\} \qquad (10)$$

Теперь нам понадобятся выражения Si(n) в удобной форме из великолепной книги Грехэм, Кнут, Паташник (2009), (61.78),

$$\tilde{S}_m(n)=\frac{1}{m+1}\sum_{0\le k\le n}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \qquad (11),$$

где B_k, k = 0, 1, 2,...., числа Бернулли (Якова), именно

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
Bk	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$	…

[1] Так у Грехэма, Кнута, Паташника (2009).

Формулы Sm(n), m = 0, 1, 2,..., 10 см. в упомянутой книге с. 314.

Из (10) легко получается при n→∞

$$G'_m(n) \cong \frac{2}{n-1}\left\{\frac{m+1}{m+2}n - \frac{n+1}{2}\right\} \approx \frac{m}{m+2}, QED.$$

Приведем таблицу 2 для Gm' (n)[1]

Таблица 2

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Gm' (n)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{5}{6}$	…

Вернемся к началу изложения. Если в модели P брать k = 1, то G'=0,25 (Норвегия) означает m < 1 (дробное число), G'=0,327 (Франция) означает m≈1), G'=0.423 (Россия) означает, что 1<m<2, G'=0,482 (Мексика) дает m≈2, G'=0.538 (Гаити) – 2<m<3, Сьерра-Леоне с 0,629 приводит к 3<m<4, ЮАР с 0,65 дает m несколько больше, а Намибия, где по разным данным 0,707< G'<0.75, может претендовать на 5<m<6.

Попробуем интерпретировать наши результаты.

1. Компании, сообщества, регионы, страны можно (условно) делить на линейные (m=1), квадратичные (m=2), кубические (m=3), «тетричные» (m=4), «пентальные» (m=5), «гексальные» (m=6) и т. д. Например, для Москвы, где G' в разные годы доходил до 0,62 можно предполагать кубический тип распределения доходов. При этом надо иметь ввиду, что реальные значения G' в Москве могут быть, по мнению многих, если не большинства специалистов, 0.60-0.70.

2. Поскольку мы использовали свойства сумм степеней целых чисел, то можно вспомнить Леопольда Кронекера (1823-1891), который не зря говорил, что целые числа придумал Бог, а остальное – люди.

3. Что касается российских компаний, то данные отчетов ряда крупных компаний, которые регулярно обсуждаются газетой «Ведомости», показывают следующее[2]. Вознаграждения (бонусы) членов правления (не считая заработной платы) в 1-3 млн. долларов в год при зарплате на уровне i=1 в 1.5-3.0 тыс. долларов и (условно) указывают на величину 2<m<3. Возможно, что m достигает 4, т. к. за 2010г. зарплата Генерального директора одной из самых крупных компаний России м.б. равна $25 млн. в год, см.http://www.rfcor.ru/print/news_rfc_987htm.

[1] При m=1 выражении для индекса Джини точное, при всех n = 1, 2, 3….

[2] См. магистерскую диссертацию: Милек О. Изучение распределения дохода с помощью распределения с тяжелыми хвостами. – М., ГУ-ВШЭ, 2010.

Степень m “градуирует” (термин из физики и инженерного дела) “шкалу Джини“.

Здесь возникает вопрос о разумности механизмов распределения доходов при различных G', т. е. при соответствующих величинах) m, см. Atkinson, Bourguignion (2000), Chacravarty (1990), Foster, Sen (1997) и т. п.

А.Я.Кирута в своём любезно написанном 8-страничном комментарии, полученном автором 03 мая 2011 г. в 14:34 предпринял глубокий анализ рассмотренной здесь задачи.

Заметим, что можно рассматривать и вещественные (по интерполяции) значения

m=2G^/(1-G^).

Здесь G^ -нормированное значение индекса Джини.

Для Москвы за 2009 г. G^=0.521, что даёт величину m=2.742.

Для Норвегии (2008) G^=0.25 и m=0.667.

Здесь требуется обсуждение.

Можно увязать обсуждаемую модель с традиционными статистическими распределениями. Для распределения Парето с таким же G^, как в нашей модели

P, лишь степень m <1 обеспечивает конечную дисперсию, а для лог-логистического распределения для того же требуется m<2. Что касается лог-нормального распределения, то дисперсия не стремится к бесконечности, а лишь медленно растет при росте m. Заметим, что распределения Парето и лог-логистическое хорошо описывают правый (верхний) хвост распределения доходов, а лог-нормальное хорошо описывает не слишком большие доходы, но плохо описывает правый хвост.

Интерпретация может быть следующей: при высокой степени неравенства в модели P малая (богатая) часть общества стремится увеличить свои доходы, так что верхние хвосты распределения утяжеляются и дисперсия стремится к бесконечности. В тоже время средняя по доходам часть общества медленно реагирует на рост степени модели m.

Недостижимым образцом для подражания авторам служил доклад Владимира Игоревича Арнольда “Жесткие” и “мягкие” математические модели, сделанный им 25 сентября 1997 г. в Администрации Президента Российской Федерации на семинаре “Аналитика в государственных учреждениях”. Руководили семинаром А.Н.Райков, Г.А.Сатаров,Д.С.Шмерлинг.

Авторы благодарят В.И.Арнольда, А.Я.Кируту, Я.Ю.Никитина, О.А.Оберемко, А.И.Орлова, Ю.Н.Толстову, Ю.Н. Тюрина, В.В.Ульянова за содействие и обсуждение.

Библиографический список

1. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. 3-е изд.: Пер. с англ. – М.: МИР, Бином. Лабор. Знания, 2009. – 703 с.
2. Дейвид Г. Порядковые статистики: Пер. с англ. – М.: Наука, 1978. – 336 с., §§7.4, с. 187, упр. 7.4.1, с. 214, §9.6, (9.6.1.).
3. Дрогобыцкий И.Н. Системный анализ в экономике.-М.: Финансы и статистика,2007.-508 с.
4. Кендалл М Дж., Стьюарт А. Теория распределения: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 588 с., §2.21-2.26
5. Кирута А.Я. Неравенство, бедность и социально-гуманитарные факторы модернизации. Август 2011. Рукопись; Кирута А.Я.Влияние неравенства на качество человеческого потенциала в России //Вестник Института социологии РАН,2011,№3, с.67-87
6. Маршалл А., Олкин И. Неравенства. Теория мажоризации и ее приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 576 с.
7. Шевяков А.Ю. Экономическое неравенство: тормоз демографического роста // Журнал новой экономической ассоциации. – М. 2011. № 9. С. 197 – 201.
8. Шевяков А.Ю., Кирута А.Я. Неравенство, экономический рост и демография: неисследованные взаимосвязи. – М.: М-студия, 2009.
9. Atkinson A.B., Bourguignon F., ed. Handbook of Income Distribution, vol. I .- S.l.: Elsevier, 2000.
10. Chakravarty S.R. Ethical Social Index Numbers. – N.Y.:Springer-Verlag, 1990.
11. David H.A. Gini's Mean Difference Rediscovered.// Biometrika, 1968, v. 55, p. 573-575.
12. Dikhanov Y. Decompozition of Inequality Based on Incomplete Information. – Wasington, D.C.: The World Bank, 1996. – 26 pp.(A contrib. paper to the LARIW 24th Gen.Conf. Lillehammer, Norway, aug.18-24, 1996. Sitereseoucesworldbank.org/ .../13279_Decomposition_of-inequality based.
13. Foster J.F., Sen Amartya. On Economic Inequality, exp. ed. With Substantial Annex. Oxford: Oxford Univ. Press, 1997. – 280 pp.
14. Gastwirth Y.L. The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index // Rev. Econ. Statistics, 1972, v. 52, #3, p. 306-316. doi: 10.2307/1937992.
15. Gini_coefficient.wikipedia.htm.

16. Gini, Corrado. Variabilità e mutabilità, contributo allo studio delle distribuzioni e relazioni statistiche // Studi Economico-Guirdici della R. Università di Cagliari, Repr. In Memorie di Metodoligia Statistica / Piretti E, Salvemini T. ed. – Rome: Libreria Eredi Virgilio Veschi, 1955.(Воспроизведена знаменитая работа 1912 года).

17. Lorenz M.D. Methods of Measuring the Concentration of Wealth // Publ. Amer. Statist. Ass., 1905, v. 9, #70, p. 209-219.

18. Moderres R., Gastwirth J.L. A Cautionary Note on Estimating the Standard Error of the Gini Index of Inequality // Oxford Bull. Econ. Statist., 2006, v. 68, p. 385-390. doi: 10.1111/j.1468-0084.2006.00167 http://en.wikipedia.org/wiki/list_of_countries_by_income_equality

19. Kleiber C., Kotz S. Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences. – Hoboken,NJ: Wiley,2003. – 332p.

20. Dagum C.Income inequality measures. –In: Encyclopedia of Statistical Sciences. 16 vols.N.L.Johnson, S.Kotz ed-in-chiefs. –N.Y. e.a.:Wiley,2006.-9686pp.,p.3387-3405.