МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 • 2013

УДК 532.59.032

© 2013 г. А. А. АБРАШКИН, Ю. П. БОДУНОВА

ПАКЕТ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В рамках лагранжевого подхода разработан метод описания волнового пакета на поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости. Проанализирован случай, когда обратное число Рейнольдса порядка квадрата крутизны волны. Выражения для траекторий жидких частиц определены с точностью до куба крутизны. Указаны условия, при которых эволюция огибающей пакета описывается нелинейным уравнением Шредингера с линейным по амплитуде диссипативным членом. Сформулировано правило, когда такого рода слагаемое можно корректно добавлять в эволюционное уравнение произвольного порядка.

Ключевые слова: волновой пакет, вязкость, лагранжевые координаты, нелинейное уравнение Шредингера.

Эволюция пакета потенциальных гравитационных поверхностных волн описывается нелинейным уравнением Шредингера в кубичном порядке теории возмущений [1] и уравнением Диста в четвертом приближении [2]. Для учета влияния вязкости принято чисто феноменологически (из общих соображений) добавлять в эти эволюционные уравнения линейное по амплитуде слагаемое [3, 4]. При этом условия корректности введения дополнительного члена в такие уравнения не обсуждаются. Величина множителя перед амплитудой выступает произвольным параметром, и его физический смысл не объясняется. В связи с этим возникает вопрос обоснования используемых диссипативных уравнений.

Основная проблема при описании волн в вязкой жидкости связана с граничным условием на свободной поверхности. В решении линейного приближения, где граничное условие сносится на горизонтальную поверхность, возникает новый пространственный масштаб – толщина пограничного слоя. Она зависит от частоты волны и для реально наблюдаемых гравитационных волн не превышает нескольких сантиметров [5]. Вихревая компонента волнового поля в этом слое убывает экспоненциально. В силу этого сносить граничное условие на горизонтальный уровень в квадратичном и более высоких приближениях правомерно только в том случае, если амплитуда волны будет одного порядка или меньше толщины пограничного слоя. В противном случае ставить поверхностные граничные условия на невозмущенном уровне не представляется удовлетворительным [6, параграф 3.4]. Вследствие этого при эйлеровом описании слабозатухающих квазистационарных волн используется ортогональная криволинейная система координат, в которой свободная поверхность является координатной линией [6, 7]. Ситуация, однако, принципиально упрощается, если использовать лагранжевые переменные [8–12]. Форма свободной поверхности при этом известна, правда, сам вид уравнений движения жидкости существенно сложнее.

В работе на основе лагранжевого подхода рассмотрена задача о пакете гравитационных поверхностных волн в бесконечно глубокой вязкой жидкости. Предполагается, что обратное число Рейнольдса, определяемое через параметры высокочастотного заполнения, порядка квадрата крутизны волны. Как следствие этого, движение жидкости будет потенциальным. Граничные условия на свободной поверхности, однако, начиная с третьего приближения, уже включают вязкие слагаемые.

На свободной поверхности вязкой жидкости должны выполняться два условия — непрерывности для вертикальной и горизонтальной компонент потока импульса. Нелинейное уравнение Шредингера с диссипативным линейным членом получается из первого условия. Второму же условию удовлетворить невозможно. Это обусловлено тем, что вблизи свободной поверхности пренебрегать вязкостью принципиально нельзя. Необращение в нуль горизонтальной компоненты потока импульса означает, что определяемое в ходе решения задачи среднее течение вблизи свободной поверхности в действительности будет отличаться от того, которое дает потенциальное решение. Но само течение не входит в эволюционное уравнение для амплитуды пакета. Поэтому можно говорить, что при принятых приближениях нелинейное уравнение Шредингера с линейной диссипацией — достаточно обоснованное уравнение. Из хода построения решения следует и правило корректного включения диссипативного линейного члена в эволюционное уравнение порядка n: величина обратного числа Рейнольдса должна быть порядка крутизны в степени $n-1$.

1. Постановка задачи. Полная система уравнений динамики несжимаемой вязкой жидкости в переменных Лагранжа для двумерного плоскопараллельного течения в поле тяжести Земли имеет вид [13, 14]

$$
\begin{aligned}
&[X,Y]=\frac{D(X,Y)}{D(a,b)}=1\\
&X_{tt}=-\rho^{-1}[p,Y]+\nu\{[X,[X,X_t]]+[Y,[Y,X_t]]\}\\
&Y_{tt}=-g-\rho^{-1}[X,p]+\nu\{[X,[X,Y_t]]+[Y,[Y,Y_t]]\}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь $X(a,b,t)$, $Y(a,b,t)$ — координаты местоположения жидкой частицы; a, b — ее лагранжевые координаты; ρ — плотность, p — давление, g — ускорение свободного падения (ось y направлена вертикально вверх), ν — кинематическая вязкость. Квадратные скобки обозначают операцию вычисления якобиана по переменным a, b. Первое уравнение системы (1.1) является уравнением непрерывности и отражает то обстоятельство, что в начальный момент координаты жидких частиц равны соответственно a, b.

Систему уравнений (1.1) следует дополнить граничными условиями. В случае свободных гравитационных волн на бесконечно глубокой воде это условия непротекания на дне $b=-\infty$: $Y_t=0$ и отсутствие вязких напряжений на свободной поверхности

$$
\begin{aligned}
&T_{ik}n_k=-p_0n_i,\quad \mathbf{n}\{n_x,n_y\}=\mathbf{n}\left\{-\frac{Y_a}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2}},\frac{X_a}{\sqrt{X_a^2+Y_a^2}}\right\},\quad b=0\\
&T_{xx}=-p+2\nu\rho[X_t,Y],\quad T_{yy}=-p-2\nu\rho[Y_t,X],\quad T_{xy}=\nu\rho([Y_t,Y]-[X_t,X])
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь T_{ik} — тензор вязких напряжений, p_0 — постоянное внешнее давление, а $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к свободной поверхности.

Введем комплексные координаты $W=X+iY$, $\overline{W}=X-iY$ (черта — знак комплексного сопряжения), тогда система (1.1) примет следующий вид:

$$
[\overline{W},W]=2i;\quad W_{tt}=-ig+i\rho^{-1}[p,W]+\frac{\nu}{2}\{[W,[\overline{W},W_t]]+[\overline{W},[W,W_t]]\}
\tag{1.3}
$$

При изучении волнового движения жидкости удобно перейти к модифицированным лагранжевым координатам $q=a+\sigma t,b,t$ [10], где величина σ полагается постоянной. Это эквивалентно переходу в систему отсчета, движущуюся со скоростью σ. Как станет ясно дальше, она совпадает с фазовой скоростью высокочастотного "заполнения" пакета. В новых координатах уравнения (1.3) запишутся так

$$\begin{gathered}\left[\overline{W},W\right]=\frac{D(\overline{W},W)}{D(q,b)}=2i\\ W_{tt}+2\sigma W_{tq}+\sigma^2W_{qq}=\frac{i[p,W]}{\rho}-ig+\frac{\nu}{2}\left\{\left[W,\left[\overline{W},W_t+\sigma W_q\right]\right]+\left[\overline{W},\left[W,W_t+\sigma W_q\right]\right]\right\}\end{gathered}\tag{1.4}$$

Здесь квадратные скобки обозначают уже операцию взятия якобиана по переменным q, b.

Обезразмерим эту систему, вводя новые переменные

$$W=LW_n,q=Lq_n,t=\left(L/\sigma\right)t_n,p=\rho\sigma^2p_n\tag{1.5}$$

где L – некоторый масштаб длины (в дальнейшем индексы будем опускать). Тогда система уравнений (1.4) примет вид

$$\begin{gathered}\left[\overline{W},W\right]=\frac{D(\overline{W},W)}{D(q,b)}=2i\\ W_{tt}+2W_{tq}+W_{qq}=-i\frac{gL}{\sigma^2}+i\left[p,W\right]+\frac{1}{2R_*}\left\{\left[W,\left[\overline{W},W_t+W_q\right]\right]+\left[\overline{W},\left[W,W_t+W_q\right]\right]\right\}\end{gathered}\tag{1.6}$$

В уравнении движения присутствуют два безразмерных параметра – число Рейнольдса $R_*=\sigma L/\nu$ и величина gL/σ^2.

Перейдем в формулах для граничных условий (1.2) к комплексным координатам траектории жидких частиц и, учитывая (1.5), получим

$$\begin{gathered}T_{xx}=-p-\frac{i}{R_*}\operatorname{Im}\left(\left[W_t+W_q,W\right]-\left[W_t+W_q,\overline{W}\right]\right)\\ T_{yy}=-p+\frac{i}{R_*}\operatorname{Im}\left(\left[W_t+W_q,W\right]+\left[W_t+W_q,\overline{W}\right]\right)\\ T_{xy}=-\frac{1}{R_*}\operatorname{Re}\left[W_t+W_q,W\right]\end{gathered}\tag{1.7}$$

Исследуем поведение слабонелинейного цуга волн с медленно меняющимися параметрами (амплитудой, частотой, волновым числом). Для этого воспользуемся методом разложения производной (методом многих масштабов [15]).

Примем, что функция W зависит от пространственных $q_0=q$, $q_1=\varepsilon q$, $q_2=\varepsilon^2 q$, b и временных переменных $t_1=\varepsilon t$, $t_2=\varepsilon^2 t$ (ε – малый параметр крутизны волны) и представима разложением

$$\begin{gathered}W\left(q_0,q_1,q_2,b,t_1,t_2\right)=q_0+ib+\varepsilon w_1+\varepsilon^2w_2+\varepsilon^3w_3+O(\varepsilon^4)\\ w_j=w_j(q_0,q_1,q_2,b,t_1,t_2)\end{gathered}\tag{1.8}$$

а давление в жидкости определяется соотношением

$$p=p_0-b+\varepsilon p_1+\varepsilon^2p_2+\varepsilon^3p_3+O(\varepsilon^4);\quad p_j=p_j(q_0,q_1,q_2,b,t_1,t_2)\tag{1.9}$$

Подстановка во второе уравнение системы (1.6) первых двух слагаемых, определяющих гидростатическое давление, позволяет найти значение второго безразмерного параметра: $gL/\sigma^2=1$. Если принять, что $L=k^{-1}$, а $\sigma=\omega/k$ – фазовая скорость волны, то это соотношение будет совпадать с дисперсионным соотношением волн на глубокой воде.

В общем случае задача описания эволюции пакета в вязкой жидкости исключительно сложна. Сделаем, однако, упрощающее предположение. Будем считать, что число Рейнольдса достаточно велико, так что $R_*^{-1} = \alpha\varepsilon^2$, где α — некоторый численный коэффициент порядка единицы. Это соотношение эквивалентно тому, что длина несущей волны равна $\lambda = (\nu/\alpha\varepsilon^2\sqrt{g})^{2/3}$. Выбранное ограничение на значение числа Рейнольдса означает, что эффекты вязкости будут проявляться только в кубическом приближении.

В каждом из приближений помимо рассмотрения волновой составляющей движения необходимо определять также и средние течения. Для их определения удобно использовать уравнение Гельмгольца, которое является следствием уравнений движения, но не содержит давление. В лагранжевых переменных оно имеет следующий вид:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = \nu\{[Y,[Y,\Omega]] + [X,[X,\Omega]]\}; \quad \Omega = [X_t, X] + [Y_t, Y] \tag{1.10}$$

Здесь Ω — завихренность плоского течения, а квадратные скобки обозначают операцию взятия якобиана по лагранжевым переменным a, b.

В переменных, введенных выше, это уравнение можно переписать так:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[W_t + W_q, \overline{W}\right] + \frac{\partial}{\partial q}\left[W_t + W_q, \overline{W}\right] - \frac{1}{R_*}\left[W,\left[\overline{W},\left[W_t + W_q, \overline{W}\right]\right]\right]\right\} = 0 \tag{1.11}$$

Все величины в этом соотношении безразмерны, а якобианы считаются теперь по переменным q, b. Завихренность в комплексном представлении равна $\Omega = \mathrm{Re}\left[W_t + W_q, \overline{W}\right]$. Она также представляется в виде ряда по малому параметру крутизны волны: $\Omega = \sum\limits_{n=1} \varepsilon^n \Omega_n$.

2. Линейное приближение. Вычисления удобно проводить по следующей схеме. Вначале будет решаться система уравнений, состоящая из уравнения непрерывности и уравнения Гельмгольца. Затем по известному виду для комплексной координаты W_n из уравнения движения определяется давление p_n. После этого все найденные выражения подставляются в граничные условия, из которых и получаются эволюционные уравнения для амплитуды огибающей волнового пакета.

Подставляя разложения (1.8) и (1.9) в уравнения гидродинамики (1.6), (1.11), получим системы уравнений соответствующего приближения. В линейном случае условие непрерывности и уравнение Гельмгольца

$$\mathrm{Im}(w_{1b} + iw_{1q_0}) = 0, \quad \mathrm{Re}(w_{1b} + iw_{1q_0})_{q_0q_0} = -\Omega_{1q_0} = 0$$

Их решение, спадающее в глубину, записывается следующим образом:

$$w_1 = A(q_l, t_l)\exp(b + iq_0) + \psi_1(q_l, b, t_l); \quad l \geq 1 \tag{2.1}$$

Первое слагаемое в этой формуле описывает колебательное движение жидких частиц, а второе — дрейфовое течение. Амплитуда волны A — функция “медленных” переменных. Функция ψ_1 действительная. Она зависит как от медленных координат, так и от вертикальной лагранжевой координаты.

Особенность рассматриваемого движения состоит в том, что дрейфовое течение ψ_1 возникает уже в линейном приближении. В математическом плане это связано с тем, что решение линейного приближения определяется с точностью до произвольной функции, зависящей от быстрых координат q_l, t_l и не зависящей от медленной переменной q_0. При исследовании стационарной потенциальной волны на поверхности жидкости (волны Стокса) решение ищется как функция только координат q_0, b [10]. Поэтому в линейном приближении дрейфового течения нет, но оно присутствует в квадратичном приближении.

В самом общем случае к решению (2.2) следовало бы добавить чисто мнимую константу, которая определяет средний уровень жидкости. Удобно положить ее равной нулю, фиксируя этот уровень на горизонте $Y = 0$. Величина завихренности $\Omega_1 = 0$. Уравнение для p_1 находим из второго уравнения (1.6)

$$p_{1q_0} + ip_{1b} = iw_{1q_0} - w_{1q_0q_0} \tag{2.2}$$

Согласно решению (2.1), его правая часть равна нулю, а значит величина p_1 постоянна. Вязкие силы в рассматриваемой задаче начинают играть роль только в кубическом приближении, поэтому в первых двух приближениях в качестве граничного условия выступает условие постоянства давления на свободной поверхности (см. (1.2), (1.7)). Для простоты можно положить $p_1|_{b=0} = 0$. Таким образом, из первого приближения следует, что $p_1 = 0$ и при произвольном b.

Сопоставляя выражение (2.2) с уравнением (1.4) в размерных переменных, легко убедиться, что обращение в нуль правой части (2.2) является следствием дисперсионного соотношения для волн на глубокой воде, которое было использовано ранее для записи уравнений в безразмерных переменных.

3. Квадратичное приближение. Уравнения непрерывности и Гельмгольца во втором приближении

$$\begin{gathered} \operatorname{Im}(w_{2b} + iw_{2q_0} - w_{1q_0}\overline{w}_{1b} + iw_{1q_1}) = 0 \\ \operatorname{Re}(w_{2q_0b} + iw_{2q_0q_0} + iw_{1q_0t_1} + 2iw_{1q_1q_0} + w_{1q_1b} + w_{1t_1b} - [w_{1q_0}, \overline{w}]) = -\Omega_2 = 0 \end{gathered} \tag{3.1}$$

Второе из этих уравнений один раз проинтегрировано по q_0, якобиан здесь и далее берется по переменным q_0, b. Течение и во втором приближении будет потенциальным ($\Omega_2 = 0$).

Подставляя в соотношения (3.1) решение (2.2), придем к следующей системе уравнений:

$$\operatorname{Im}(w_{2b} + iw_{2q_0} - i(A\psi_{1b} - A_{q_1})\exp(b + iq_0) - i|A|^2\exp 2b + i\psi_{1q_1}) = 0$$

$$\operatorname{Re}(w_{2q_0b} + iw_{2q_0q_0} - (A_{q_1} - A\psi_{1b})\exp(b + iq_0) + \psi_{1q_1b} + \psi_{1t_1b} + 2|A|^2\exp 2b) = 0$$

Ее решение удобно искать в виде

$$w_2 = Q_2(q_l, b, t_l)\exp(b + iq_0) + \psi_2(q_l, b, t_l) + if_2(q_l, b, t_l);\ l \geq 1 \tag{3.2}$$

где ψ_2, f_2 — действительные функции медленных переменных.

Условия на выбор функций Q_2, f_2 и уравнение для среднего смещения ψ_1

$$Q_2 = i(A\psi_1 - bA_{q_1}), \quad f_{2b} = |A|^2\exp 2b - \psi_{1q_1}, \quad \psi_{1t_1b} + \psi_{1q_1b} = -2|A|^2\exp 2b \tag{3.3}$$

Функция ψ_2 может быть любой и в данном приближении не вычисляется. Амплитуда колебаний второго приближения определяется с точностью до произвольной функции, не зависящей от координаты b. Ее полагаем равной нулю, поскольку в противном случае можно просто переопределить величину амплитуды A, включив в нее данную функцию. Значение среднего вертикального смещения частиц f_2 находится по известной функции дрейфового течения первого приближения ψ_1. Учитывая, что вертикальные смещения жидких частиц на дне отсутствуют, для функции f_2 справедливо следующее распределение по глубине:

$$f_2 = \frac{1}{2}|A|^2 \exp 2b - \int_{-\infty}^{b} \psi_{1q_1} db$$

Оба слагаемых, присутствующих в данной формуле, при $b \to -\infty$ обращаются в нуль. На свободной поверхности функция f_2 уже может быть отлична от нуля. Это означает, что во втором приближении средний уровень, вообще говоря, не совпадает с поверхностью $Y = 0$ и отклоняется от нее на величину $f_2(0)$. Интегрируя последнее из равенств (3.3) по b, получим

$$\psi_{1q_1} + \psi_{1t_1} = -|A|^2 \exp 2b$$

Постоянная интегрирования равна нулю, поскольку на дне жидкость покоится. Знак минус означает, что среднее течение, как и волна, движутся в отрицательном направлении оси X. Функция ψ_1 определяется по известной амплитуде волны. Вид дрейфового течения для второго приближения (функция ψ_2) должна находиться из уравнений третьего приближения.

Уравнение (1.6) в квадратичном приближении принимает вид

$$w_{2q_0q_0} - iw_{2q_0} + p_{2q_0} + ip_{2b} = iw_{1q_1} - 2w_{1q_0q_1} - 2q_{1q_0t_1}$$

С учетом (3.2), (3.3)

$$p_{2q_0} + ip_{2b} = -i\left(A_{q_1} + 2A_{t_1}\right)\exp\left(b + iq_0\right) + i\psi_{1q_1}$$

Граничным условием для него выступает условие постоянства давления на свободной поверхности. Принимая это во внимание, получаем, что амплитуда волнового пакета удовлетворяет уравнению

$$A_{t_1} + \frac{1}{2}A_{q_1} = 0 \tag{3.4}$$

Выражение для давления принимает вид

$$p_2 = \int_0^b \psi_{1q_1} db$$

Из уравнения (3.4) следует, что огибающая пакета распространяется в отрицательном направлении оси X со скоростью, вдвое меньшей фазовой скорости. Если ввести новую координату $\xi_1 = q_1 - t_1/2$, то амплитуда волны будет функцией этой переменной, т.е. $A = A(\xi_1, q_l, t_l); l \geq 2$. Функция ψ_1, а значит и давление p_2 таким свойством не обладают.

Подчеркнем, что решения для первых двух приближений строятся как для идеальной жидкости: движение жидкости потенциально, а на свободной поверхности удовлетворяется условие постоянства давления. Эффект вязкости проявляется только в третьем приближении.

4. Кубичное приближение. Уравнения третьего приближения имеют следующий вид:

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im}(w_{3b} + iw_{3q_0} + iw_{1q_2} + iw_{2q_1} + w_{1b}\overline{w}_{1q_1} + [w_1, \overline{w_2}]) = 0 \\
-\Omega_3 = \operatorname{Re}\Big\{ iw_{3q_0q_0} + w_{3q_0b} + i(w_{2q_0t_1} + 2w_{2q_0q_1} + w_{1q_0t_2} + 2w_{1q_0q_1} + w_{1q_1t_1} + w_{1q_1q_1}) + \\
+w_{2t_1b} + +w_{2q_1b} + w_{1t_2b} + w_{1q_2b} - [w_{1q_0}, \overline{w_2}] - [w_{2q_0}, \overline{w_1}] - [w_{1q_1}, \overline{w_1}] - \\
-[w_{1t_1}, \overline{w_1}] - \frac{D(w_{1q_0}, \overline{w_1})}{D(q_1, b)} \Big\} = 0 \\
w_{3q_0q_0} - iw_{3q_0} + p_{3q_0} + ip_{3b} = iw_{1q_2} + iw_{2q_1} - p_{2q_1} + i[p_2, w_1] - w_{1t_1t_1} - w_{1q_1q_1} - \\
-2w_{1q_1t_1} - 2w_{1q_0t_2} - 2w_{2q_0t_1} - 2w_{1q_0q_2} - 2w_{2q_0q_1}
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

Движение жидкости и в этом приближении потенциально ($\Omega_3 = 0$). Это свойство течений останется справедливым и для более высоких приближений. Оно объясняется тем, что рассматривается приближение больших чисел Рейнольдса, и вязкий член в уравнении Гельмгольца в n-том приближении определяется завихренностями низших порядков. Если они тождественно равны нулю, то величина $\Omega_n = 0$. Физически это означает, что пренебрегается диффузией завихренности в глубь жидкости. Влияние вязкости, таким образом, осуществляется только через граничные условия на свободной поверхности.

Подставляя выражения для w_1, w_2 в первые два соотношения системы (4.1), получим следующие уравнения

$$
\begin{gathered}
\operatorname{Im}\Big\{ iw_{3q_0} + w_{3b} + 2(1+b)\overline{A_{q_1}}A\exp 2b + i\left(\psi_{1q_2} + \psi_{2q_1}\right) + \exp(b + iq_0)\cdot \\
\left[iA_{q_2} + bA_{q_1q_1} - (b\psi_1 + \psi_1)_b A_{q_1} - \left(i\psi_2 + f_2 - \frac{1}{2}\psi_1^2 \right)_b A \right]\Big\} = 0 \\
\operatorname{Re}\Big\{ iw_{3q_0q_0} + w_{3q_0b} + 2i(b+3)\overline{A_{q_1}}A\exp 2b + \left(\psi_{2t_1} + \psi_{2q_1} + \psi_{1t_2} + \psi_{1q_2}\right)_b - \exp(b + iq_0)\cdot \\
\left[A_{q_2} - ibA_{q_1q_1} + i(b\psi_1 + \psi_1)_b A_{q_1} + \left(if_2 - \psi_2 - \frac{i\psi_1^2}{2} \right)_b A + 4i|A|^2 A\exp 2b \right]\Big\} = 0
\end{gathered}
$$

Из второго уравнения этой системы следует

$$
\psi_{2t_1} + \psi_{2q_1} + \psi_{1t_2} + \psi_{1q_2} = \frac{i}{4}(2b+5)\left(A_{q_1}\overline{A} - \overline{A_{q_1}}A\right)e^{2b} \tag{4.2}
$$

Выражение для решения третьего приближения

$$
w_3 = Q_3\exp(b + iq_0) + \frac{1}{2}|A|^2\overline{A}\exp(3b - iq_0) + \psi_3 + if_3 \tag{4.3}
$$

$$
\begin{gathered}
Q_3 = \left(i\psi_2 + f_2 - \frac{\psi_1^2}{2} \right)A + (1+b)\psi_1 A_{q_1} - ibA_{q_2} - \frac{b^2}{2}A_{q_1q_1} + |A|^2 A\exp 2b \\
f_{3b} = i(1+b)\left(\overline{A_{q_1}}A - A_{q_1}\overline{A}\right) - \psi_{1q_2} - \psi_{2q_1}
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Функция ψ_3 находится при рассмотрении следующего приближения. Вычисление среднего течения – отдельная задача. Из соотношений (4.2)–(4.4) видно, что оно будет иметь как горизонтальную, так и вертикальную составляющую скорости: $f_3(-\infty) = 0$; $f_2(0), f_3(0) \neq 0$. Движущийся пакет вовлекает частицы жидкости не только в горизонтальное, но и в вертикальное движение, определяемое видом амплитуды огибающей и горизонтальными течениями первого и второго приближений. При этом наряду с приповерхностным дрейфом жидких частиц существует также течение, которое Мак-

Интайр назвал безвихревое возвратное течение [16]. Наша цель, однако, получение эволюционного уравнения для огибающей волнового пакета.

Подставляя в последнее уравнение системы (4.1) выражения для решений первых трех приближений, получим уравнение для нахождения давления

$$p_{3q_0} + ip_{3b} = -\left[2iA_{t_2} + 2|A|^2 Ae^{2b} + \frac{1}{4}A_{\xi_1\xi_1}\right]\exp(b + iq_0) + |A|^2 \bar{A}\exp(3b - iq_0) + i(\psi_{1q_2} + \psi_{2q_1})$$

Интегрируя его, находим выражение для давления. Оно имеет следующий вид:

$$p_3 = 2\,\mathrm{Re}\left[-A_{t_2} + \frac{1}{8}iA_{\xi_1\xi_1} + \frac{1}{2}i|A|^2 Ae^{2b}\right]\exp(b + iq_0) + \\ + \int_0^b (\psi_{1q_2} + \psi_{2q_1})\,db + p_3^*(q_l, t_l); \quad l \geq 1, \quad \xi_1 = q_1 - t_1/2 \tag{4.5}$$

Функция p_3^* определится из граничных условий

$$(T_{yl}n_l)_3 = -p_3 - 2\alpha\,\mathrm{Re}\,iw_{1q_0b} = 0; \quad b = 0 \tag{4.6}$$

$$(T_{xl}n_l)_3 = \alpha\,\mathrm{Re}(w_{1q_0b} - iw_{1q_0q_0}) = 0 \tag{4.7}$$

Соотношение (4.6) соответствует условию равенства нулю вертикального потока импульса на свободной границе, а соотношение (4.7) – горизонтального. Индекс “3” для компонент сил, действующих на поверхности, означает, что учитываются только слагаемые кубичного порядка. Подставляя выражение для давления (4.5) в соотношение (4.6), получим эволюционное уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета

$$iA_{t_2} + \frac{1}{2}|A|^2 A + \frac{1}{8}A_{\xi_1\xi_1} + i\alpha A = 0 \tag{4.8}$$

При этом функция $p_3^* \equiv 0$. Уравнение (4.8) представляет собой нелинейное уравнение Шредингера с линейным диссипативным членом. В размерных переменных оно принимает следующий вид:

$$iA_{t_2} + \frac{1}{2}\omega k^2 |A|^2 A + \frac{1}{8}\frac{\omega}{k^2}A_{\xi_1\xi_1} + i\alpha\omega A = 0 \tag{4.9}$$

Обратим внимание, что в качестве величины декремента амплитуды выступает частота волны.

Уравнение (4.9) можно записать, вернувшись к исходным переменным $t, \xi = q - \sigma t$. Введем новую функцию $A^* = A/\varepsilon$, тогда для нее эволюционное уравнение преобразуется к такому виду

$$iA_t^* + \frac{1}{2}\omega k^2 |A^*|^2 A^* + \frac{1}{8}\frac{\omega}{k^2}A_{\xi\xi}^* + i\frac{\alpha\omega}{R_*}A^* = 0 \tag{4.10}$$

Важнейшей особенностью уравнений (4.8)–(4.10) является то, что в них не входит дрейфовое течение ψ_1. Это следствием того, что рассматривается случай достаточно больших чисел Рейнольдса. Если обратное число Рейнольдса будет порядка крутизны волны или порядка единицы, то эволюционное уравнение будет уже включать среднее течение.

Теперь об одном недостатке построенного решения. Нетрудно заметить, что граничное условие для тангенциальной компоненты потока импульса (4.7) не выполняется. Это связано с тем, что вязкость существенна только в очень тонком приповерхностном слое. Соответственно течение внутри него обладает большими градиентами, и пренебрегать вязкими слагаемыми в уравнениях движения, вообще говоря, нельзя. Формулы (4.3)–(4.5) описывают потенциальное течение и справедливы вне приповерхностного пограничного слоя. Внутри же него их следует скорректировать с учетом вязкости. Поскольку не выполняется условие для тангенциальной составляющей потока импульса, то изменения коснутся, в первую очередь, среднего течения. Но оно не входит в эволюционное уравнение для амплитуды. На основании этого можно утверждать, что уравнения (4.8)–(4.10) служат достаточно хорошим приближением для изучения затухания волнового пакета при больших числах Рейнольдса.

Метод построения решения устроен таким образом, что влияние вязкости учитывается лишь в граничном условии непрерывности нормальной компоненты потока импульса. Линейный диссипативный член будет появляться в эволюционном уравнении порядка n, если он совпадает с наименьшим порядком ненулевого вязкого члена. А это означает, что величина $1/R_*$ должна быть порядка ε^{n-1}. Таким образом, чем больше порядок эволюционного уравнения, тем при большем числе Рейнольдса будет оправдано использование нелинейного уравнения Шредингера с линейной диссипацией.

Заключение. Для описания пакета гравитационных поверхностных волн при больших числах Рейнольдса развит метод модифицированных лагранжевых координат. Определены условия применимости модели нелинейного уравнения Шредингера с линейным по амплитуде диссипативным членом. Алгоритм построения решения, апробированный для первых трех приближений, может быть применен для анализа течений более высокого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В.Е.* Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности в глубокой жидкости // ПМТФ. 1968. № 2. С. 86–94.
2. *Dysthe K.B.* Note on a modification to the nonlinear Schrödinger equation for application to deep water waves // Proc. Roy. Soc. London, ser. A. 1979. V. 369. № 1736. P. 105–114.
3. *Segur H., Henderson D., Carter J., Hammack J., Li C-M., Pheiff D., Socha K.* Stabilizing the Benjamin-Feir instability // J. Fluid Mech. 2005. V. 539. P. 229–271.
4. *Canney N. E., Carter J. D.* Stability of plane waves on deep water with dissipation // J. Math. and Comput. Simulation. 2007. V. 74. № 2–3. P. 159–167.
5. *Ламб Г. Гидродинамика.* Т. II. Гостехиздат, 1947. 928 с.
6. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.
7. *Longuet-Higgins M.S.* Mass transport in water waves // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245. № 903. P. 535–581.
8. *Weber J.E., Forland E.* Effect of the air on the drift velocity of water waves // J. Fluid Mech. 1990. V. 218. P. 619–640.
9. *Weber J.E.* Mass transport induced by surface waves in viscous rotating fluid // Free Surface Flows With Viscosity. Computational Mechanics: Southampton; Boston, 1997. P. 37–63.
10. *Абрашкин А.А., Якубович Е.И.* Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 175 с.
11. *Абрашкин А.А.* Пространственные волны на поверхности вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 6. С. 89–96.
12. *Абрашкин А.А., Бодунова Ю.П.* Пространственные стоячие волны на поверхности вязкой жидкости // Тр. Нижегород. гос. техн. ун-та им. Р.Е. Алексеева. 2011. № 2(87). С. 49–54.
13. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. II. М.: Физматгиз, 1963. 728 с.
14. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Т. 1. СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. 694 с.
15. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
16. *Мак-Интайр М.* Миф о “волновом импульсе” // Современная гидродинамика. Успехи и проблемы / под ред. Дж. Бэтчелора и Г. Моффата. М.: Мир, 1984. С. 454–476.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
12.III.2012