Афанасьев В.Н.

ГАРАНТИРОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ПАРИРОВАНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ *

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
г. Москва, afanval@mail.ru

Введение

Будем считать, что представление (диффеоморфизм) управляемой и наблюдаемой системы

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t),\ x(t_0) = x_0, \\ &x_P(t)=h_P(x)+d(x)u(t), \\ &y(t) = h(x), \end{aligned} \tag{1}$$

где $x\in R^n$ – вектор состояния, $y\in R^m$, $m\le n$ – измеряемый выход, $x_P\in R^k$, $k\le n$ – управляемый выход, $u\in R^r$ – управление, $w\in R^q$, $w(t)\in W$ – возмущения, возможно в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t),\ x(0) = x_0, \\ &x_P(t)=H_P(x)x(t)+d(x)u(t), \\ &y(t) = H(x)x(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим задачу, в которой $w(t)$ является антагонистичным по отношению к $u(t)$ управлением. В такой постановке задача заключается в синтез управлений $w(t)$ и $u(t)$, организованных по принципу обратной связи, минимизирующих функционал

$$J(x,u,w)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T\left\{y^T(t)Qy(t)+u^T(t)Ru(t)-\gamma^2 w_M^T(t)w_M(t)\right\}dt, \tag{3}$$

на объекте (2). В (3) матрицы $Q\ge 0$ и $R>0$, $\gamma>0$. Эти управления определяются соотношениями [1]

$$w(t)=\frac{1}{\gamma^2}g_1^T(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T,\ u(t)=-R^{-1}g_2^T(x)\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T, \tag{4}$$

где вектор-функция $\{\partial V(x)/\partial x(t)\}^T=S(x)x(t)$ находится решением уравнения

---

*) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-08-00677)

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)} A(x)x(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\left\{\frac{1}{\gamma^2}g_1(x)g_1^T(x)-g_2(x)R^{-1}g_2^T(x)\right\}\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T + \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2}H^T(x)QH(x) = 0.$$

Система (2) с управлениями (4) принимает вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x)x(t) + \left\{\frac{1}{\gamma^2}g_1(x)g_1^T(x)-g_2(x)R^{-1}g_2^T(x)\right\}\left\{\frac{\partial V(x)}{\partial x(t)}\right\}^T, \; x(0) = x_0,$$

$$x_P(t)=H_P(x)x(t)+d(x)u(t), \tag{6}$$

$$y(t) = H(x)x(t).$$

Оптимальные управления $w(t)$ и $u(t)$ обеспечивают устойчивость системе [2]. Так как система (6) устойчива, то значения параметров матриц $A(x),\ g_1(x),\ g_2(x),\ H(x),\ H_P(x),\ d(x)$ системы принадлежат ограниченному, замкнутому множеству D_α, $\alpha(x)=\left\{A(x), g_1(x), g_2(x), H(x), H_P(x), d(x)\right\}\in D_\alpha$.

Пусть $\alpha^*=\left\{A^*, g_1^*, g_2^*, H^*, H_P^*, d^*\right\}\in D_\alpha$ –матрицы системы (2), содержащие наименее благоприятные для решения задачи управления значения параметров. Тогда соответствующая управляемая и наблюдаемая модель системы будет иметь вид

$$\frac{d}{dt}z(t) = A^* z(t) + g_1^* w(t) + g_2^* u_M(t),\; z(0) = x_0,$$

$$z_P(t)=H_1^* z(t)+d^* u_M(t), \tag{7}$$

$$y_M(t) = H^* z(t).$$

Запишем функционал качества для синтеза управляющих воздействий с использованием модели (7)

$$J(z,u_M,w)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^T\left\{y_M^T(t)Qy_M(t)+u_M^T(t)Ru_M(t)-\gamma_*^2 w^T(t)w(t)\right\}dt. \tag{8}$$

Для стационарной системы (7) с функционалом (8) $\{\partial V(z)/\partial z(t)\}^T=Sz(t)$, где положительно определенная матрица S находится решением уравнения Риккати [1,2]

$$SA^*+\left(A^*\right)^T S+S\left\{\frac{1}{\gamma_*^2}g_1^*\left(g_1^*\right)^T-g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T\right\}S+\left(H^*\right)^T QH^*=0. \tag{9}$$

Здесь матрица $\Theta=g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T-\frac{1}{\gamma_*^2}g_1^*\left(g_1^*\right)^T$ должна быть по крайней мере положительно полуопределена.

Система (7) с управлениями

$$w(t)=\frac{1}{\gamma_*^2}\left(g_1^*\right)^T Sz(t),\ u_M(t)=-R^{-1}\left(g_2^*\right)^T Sz(t) \tag{10}$$

принимает вид

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left\{A^*+\left[\frac{1}{\gamma_*^2}g_1^*\left(g_1^*\right)^T-g_2^*R^{-1}\left(g_2^*\right)^T\right]S\right\}z(t),\ z(0)=x_0,$$

$$z_P(t)=H_1^*z(t)+d^*u_M(t), \tag{11}$$

$$y_M(t)=H^*z(t).$$

Сформулируем условия назначения матрицы R при заданной величине $\gamma_*>0$:

$$\|R\|<\frac{\gamma_*^2\left\|g_2^*\left(g_2^*\right)^T\right\|}{\left\|g_1^*\left(g_1^*\right)^T\right\|}. \tag{12}$$

Управления (10), синтезированные на модели (7), содержащей наименее благоприятные значения параметров системы, при соответствующем назначении матрицы R (12) обеспечивают выполнение следующего соотношения $\|z(t)\|\geq\|x(t)\|$, где

$$\frac{d}{dt}x(t)=f(x)+\left[\frac{1}{\gamma_*^2}g_1(x)\left(g_1^*\right)^T-g_2(x)R^{-1}\left(g_2^*\right)^T\right]Sx(t),\ x(t_0)=x_0,$$

$$x_P(t)=h_P(x)-d(x)R^{-1}\left(g_2^*\right)^T Sx(t),$$

$$y(t)=h(x).$$

Заметим, что соотношение $\|z(t)\|\geq\|x(t)\|$ выполняется для стратегий замкнутого типа как для управления $u(t)$, так и для помехи $w(t)$.

1. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. – М.: Изд-во Мир. 1974. 207 с.

2. Малкин И.Г. Теория устойчивого движения. Изд.2-е, стереотипное. М.: Едиториал УРСС. 2004. – 432 с.

3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. − 384 с.

4. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: Высшая школа, 2003. – 616 с.