Периодические финитно аппроксимируемые группы с абелевыми подгруппами конечных рангов

Е. И. ЧУБАРОВА
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
e-mail: igor.chubaroff@gmail.com

УДК 512.54

Ключевые слова: периодическая группа, финитно аппроксимируемая группа, локально конечная группа, F^*-группа.

Аннотация

В работе продолжается исследование периодических групп с дополнительными условиями конечности. Получены критерии финитной аппроксимируемости и почти локальной разрешимости периодической F^*-группы.

Abstract

E. I. Chubarova, Periodic residually finite groups with Abelian subgroups of finite ranks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 2, pp. 213—218.

In this paper, the investigation of groups with additional finiteness conditions is continued. Criteria of residual finiteness and of almost local solvability of a periodic F^*-group are obtained.

В данной работе автор продолжает исследование периодических групп с дополнительными условиями конечности. Определения общеизвестных понятий теории групп, таких, как периодическая, локально конечная, финитно аппроксимируемая группы, силовская подгруппа, черниковская группа и другие, можно найти в [2, 3].

Приведём определения и обозначения некоторых понятий, а также формулировки утверждений, используемых в статье.

Определение 1. Множество всех простых делителей порядков элементов периодической группы G обозначается через $\pi(G)$.

Определение 2. Группа G называется F^*-группой, если для любых её подгрупп K, B, $K \subset B$, $|K| < \infty$, и для любых элементов $a, b \in H$ одного и того же простого порядка существует такой элемент $c \in H$, что группа $gp\langle a, b^c = c^{-1}ac\rangle$ конечна.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 2, с. 213—218.

Определение 3. Периодическая F^*-группа называется KF^*-группой, если для любого $p \in \pi(G)$ некоторая её силовская p-подгруппа конечна. Если это верно для данного простого числа $p \in \pi(G)$, группа называется KF_p^*-группой.

Предложение 1 (теорема Горчакова [1]). *Периодическая локально разрешимая группа имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда ранги её абелевых подгрупп конечны.*

Предложение 2 (теорема Томпсона). *Конечная бинарно разрешимая группа разрешима.*

Предложение 3 [10]. *Бесконечная бипримитивно конечная группа обладает бесконечной абелевой подгруппой.*

Предложение 4 (теорема Мягковой [4]). *Локально конечная p-группа имеет конечный ранг тогда и только тогда, когда она является черниковской группой.*

Предложение 5 (теорема Шункова [9]). *Локально конечная группа с абелевыми подгруппами конечных рангов является почти локально разрешимой группой конечного ранга.*

Предложение 6 (лемма Фраттини). *Пусть G — группа, H — нормальная подгруппа в G, S — силовская p-подгруппа из H, причём в H силовские p-подгруппы являются сопряжёнными. Тогда $G = N_G(S)H$.*

Предложение 7. *Бесконечная F^*-группа, являющаяся финитно аппроксимируемой p-группой, обладает бесконечной локально конечной подгруппой.*

Предложение 8. *Пусть H — нормальная подгруппа KF_p^*-группы G. Если G p-финитно аппроксимируема, то фактор-группа G/H является p-финитно аппроксимируемой KF_p^*-группой.*

Предложение 9. *Пусть G — периодическая KF^*-группа, a — элемент простого порядка p группы G, для которого выполнены следующие условия:*

1) *$\pi(G) \setminus \pi(C_G(a)$ конечно;*
2) *почти для каждого $q \in \pi(C_G(a))$ силовская q-подгруппа из $C_G(a)$ является силовской q-подгруппой в G.*

Если группа G финитно аппроксимируема, то замыкание элемента a в группе G конечно.

Предложение 10 [7]. *Пусть G — периодическая финитно аппроксимируемая KF^*-группа, M — бесконечное множество неизоморфных силовских подгрупп и P_1 — некоторая отмеченная в нём подгруппа. Тогда существует бесконечная подгруппа T, являющаяся объединением конечных холловых подгрупп, обладающих силовскими рядами, $B_1 < B_2 < \ldots < B_n < \ldots < T$, причём $B_1 \cong P_1$ и $\pi(T) \subseteq \pi(M)$.*

Предложение 11 [7]. *Всякая периодическая бинарно разрешимая группа с черниковскими силовскими p-подгруппами по всем простым p обладает полной* *частью R, и фактор-группа G/R является финитно аппроксимируемой бинарно разрешимой группой с конечными силовскими p-подгруппами по всем p.*

Перейдём непосредственно к теме работы.

Теорема 1. *Периодическая F^*-группа с абелевыми подгруппами конечных рангов является локально конечной группой с конечными силовскими p-подгруппами по всем простым p тогда и только тогда, когда она финитно аппроксимируема.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — локально конечная группа с конечными силовскими p-подгруппами для всех p и ранги её абелевых подгрупп конечны. По предложению 4 группа G является почти локально разрешимой группой, и по предложению 11 она финитно аппроксимируема.

Достаточность. Пусть G — периодическая финитно аппроксимируемая группа с абелевыми подгруппами конечных рангов. Сначала докажем, что G — KF^*-группа. От противного, допустим, что G обладает бесконечной p-подгруппой P ($p \in \pi(G)$). Так как P финитно аппроксимируема по условию теоремы, то по предложению 6 она обладает бесконечной локально конечной p-подгруппой K конечного ранга (предложение 3). По предложению 8 подгруппа K черниковская. Получили противоречие с финитной аппроксимируемостью группы K. Обозначим через $R(G)$ локально конечный радикал группы G. Если $G = R(G)$, то теорема доказана.

Пусть $R(G) \neq 1$. Фактор-группа $G/R(G)$ является финитно аппроксимируемой группой с конечными силовскими p-подгруппами по всем p по предложению 8. Кроме того, используя предложение 5, легко доказать конечность рангов её абелевых подгрупп. Таким образом, группа $G/R(G)$ удовлетворяет всем условиям теоремы и имеет тривиальный локально конечный радикал. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $R(G) = 1$.

Лемма 1. *В группе G ранги силовских подгрупп ограниченны в совокупности.*

Доказательство. Предположим, что утверждение неверно. Тогда в группе G существует бесконечная последовательность силовских p_i-подгрупп $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$, ранг которых растёт вместе с индексом i ($i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$). Используя предложение 10, построим в G бесконечную локально конечную подгруппу T, являющуюся объединением конечных холловых подгрупп $B_1 < B_2 < \ldots < B_n < \ldots < T$, где $\pi(T) \subseteq \pi(M)$, $M = \{P_1, P_2, \ldots\}$. По построению T и выбору множества M ранг группы T бесконечен. Получили противоречие с предложением 5. Лемма доказана. □

По лемме 1 существует такое натуральное число k, что $\mathrm{r}\big(P/\Phi(P)\big) \leqslant k$ для любой силовской p-подгруппы P и любого простого числа $p \in \pi(G)$. Пусть p — произвольное простое число из $\pi(G)$. Так как группа G финитно аппроксимируема, то в ней найдётся нормальная подгруппа N конечного индекса, не содержащая p-элементов. Введём обозначения: $H_p = G/N$, $n_p = |H_p|$, Q — силовская q-подгруппа из N, для которой $(q, n_p) = 1$. По предложению 6 группа G

представима в виде $G = N_G(Q)N$. Используя теорему об изоморфизме, получим

$$H_p = G/N = N_G(Q)N/N \cong N_G(Q)/N \cap N_G(Q),$$

где $T = N \cap N_G(Q)$ — p-группой. Подгруппа Фраттини $\Phi(Q)$ группы Q характеристична в ней, и следовательно, $\Phi(Q) \lhd Q$. Очевидно, $Q/\Phi(Q) = \bar{Q}$ — нормальная элементарная абелева q-подгруппа фактор-группы $N_G(Q)/\Phi(Q) = B$ и подгруппа $C_B(Q)$ нормальна в B. Обозначим через C полный прообраз $C_B(\bar{Q})$ в $N_G(Q)$. Имеем, что $C \lhd N_G(Q)$ и $N_G(Q)/C = V_p$ — линейная группа над полем характеристики q, не делящей порядок V_p. По теореме Жордана-Брауэра-Фейта группа V_p обладает абелевой нормальной подгруппой L, такой что $|V_p : L| \leqslant f(k)$, где $f(k)$ — функция, зависящая только от k. Используя теоремы об изоморфизмах, получим, что $A_q = CN/N = CN/T \lhd N_G(Q)/T$;

$$\overline{H_p} = H_p/A_q \cong N_G(Q)/CT = N_G(Q)C/CT \cong (N_G(Q)C/C)/(CT/C) = V_p/F,$$

где $F = CT/T$. Ввиду структуры подгруппы V_p фактор-группа $V_p/F \cong \overline{H_p}$ также обладает абелевой нормальной подгруппой индекса, ограниченного числом $f(k)$.

Для доказательства теоремы необходимо рассмотреть два случая:

1) $\bigcap\limits_{q \in \pi(N) \setminus \pi(H_p)} A_q = D \neq 1$;
2) $D = 1$.

Рассмотрим первый случай. Пусть d — нетривиальный элемент простого порядка из группы D. Согласно определению подгруппы C имеем, что $(|d|, q) = 1$, и элемент d централизует подгруппу Q по предложению 4. Так как $\pi(N) \setminus \pi(H)$ конечно, а выбор q произволен, то элемент d удовлетворяет всем требованиям предложения 9 и локально конечный радикал группы G нетривиален. Противоречие. Следовательно, имеет место второй случай: $D = 1$. По теореме Ремака [2, с. 54] группа H_p изоморфно вкладывается в полное прямое произведение подгрупп типа H_p/A_q. Всякая такая группа, как показано выше, обладает абелевой нормальной подгруппой конечного индекса, не превосходящего $f(k)$. Следовательно, группа H_p также обладает абелевой нормальной подгруппой Y_p, такой что период группы H_p/Y_p ограничен числом $f(k)$, не зависящим от выбора $p \in \pi(G)$. Снова используя теорему Ремака, вложим группу G в полное прямое произведение подгрупп H_p:

$$G \cong G_1 < H = \widetilde{\prod_{p \in \pi(G)}} H_p.$$

Обозначим через m число, делящееся на период фактор-групп H_p/Y_p. Как показано выше, такое число существует. Рассмотрим подгруппу

$$H^m = gp\langle h^m \mid h \in H\rangle.$$

Так как Y_p — абелева группа при любом $p \in \pi(G)$, то подгруппа H^m также абелева и фактор-группа H/H^m является группой периода m. Из-за вложения $G \cong G_1 < H$ аналогичное утверждение справедливо и для группы G. Пусть A —

абелева нормальная подгруппа группы G, такая что период фактор-группы G/A равен m. По предложению 8 G/A — финитно аппроксимируемая KF^*-группа, а так как её период конечен, то индекс $|G : A|$ конечен. Очевидно, группа G также локально конечна, и мы получили противоречие с предположением $R(G) = 1$. Теорема 1 доказана. □

Теорема 2. *Периодическая группа является локально разрешимой группой конечного ранга тогда и только тогда, когда она бинарно разрешима и ранги её абелевых подгрупп конечны.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна.

Пусть G — периодическая бинарно разрешимая группа с абелевыми подгруппами конечных рангов. Используя предложение 3, легко показать, что силовские p-подгруппы группы G черниковские для любого $p \in \pi(G)$. По предложению 11 G обладает полной частью $R(G)$ и фактор-группа $G/R(G)$ является периодической бинарно разрешимой группой с конечными силовскими подгруппами по всем $p \in \pi\big(G/R(G)\big)$. Кроме того, группа $G/R(G)$ финитно аппроксимируема и, как вытекает из предложения 5, ранги её абелевых подгрупп конечны. Таким образом, $G/R(G)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 и является локально конечной группой. Из теоремы Шмидта следует локальная конечность группы G, а из теоремы Томпсона (предложение 2) — её локальная разрешимость. По теореме Горчакова (предложение 3) ранг группы G конечен. Теорема 2 доказана. □

Как следствие теоремы 2 получим аналог известного результата Ю. М. Горчакова (см. [8]).

Следствие. *Периодическая бинарно разрешимая группа бесконечного ранга обладает абелевой подгруппой бесконечного ранга.*

Теорема 3. *Периодическая F^*-группа с абелевыми подгруппами конечных рангов является почти локально разрешимой группой конечного ранга тогда и только тогда, когда в ней любые два элемента порождают финитно аппроксимируемую группу.*

Доказательство. Необходимость условий теоремы очевидна.

Пусть G — периодическая F^*-группа с абелевыми подгруппами конечных рангов, в которой любые два элемента порождают финитно аппроксимируемую подгруппу. Обозначим через a и b произвольные элементы группы G. Подгруппа $gp\langle a, b\rangle$ является периодической финитно аппроксимируемой KF^*-группой с абелевыми подгруппами конечных рангов. По теореме 1 она локально конечна, а так как $gp\langle a, b\rangle$ конечно порождённая, то $|gp\langle a, b\rangle| < \infty$. Выбор элементов a и b из группы произволен, следовательно, G — бинарно конечная группа. Бинарно конечная группа с абелевыми подгруппами конечных рангов локально конечна [6], и по теореме Шункова (предложение 5) группа G — почти локально разрешимая группа конечного ранга. Теорема 3 доказана. □

Литература

[1] Горчаков Ю. М. Группы с конечными классами сопряжённых элементов. — М.: Наука, 1978.

[2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука; Физматлит, 1996.

[3] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[4] Мягкова Н. Н. О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1949. — Т. 13. — С. 495—512.

[5] Остыловский А. Н. О группах с некоторыми условиями минимальности // Тез. докл. 14-й Всесоюз. алгебр. конф. — Новосибирск, 1977.

[6] Павлюк И. И. Некоторые периодические группы с заданными условиями конечности для локально разрешимых подгрупп: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1982.

[7] Седова Е. И. О группах с абелевыми подгруппами конечных рангов // Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 3. — С. 321—343.

[8] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980.

[9] Шунков В. П. О локально конечных группах конечного ранга // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 2. — С. 199—225.

[10] Шунков В. П. Об абелевых подгруппах в бипримитивно конечных группах // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 5. — С. 603—614.