Кручение в абелизации группы Торелли $\mathcal{T}$ как $Sp(\mathbb{Z}_2)$-модуль.[1]

Шварцман О.В.

1. Определения, обозначения и описание подгруппы кручения по Джонсону.

Обозначим через M группу классов отображений замкнутой ориентируемой поверхности рода $g > 2$ и рассмотрим нормальную подгруппу группы M, состоящую из таких классов диффеоморфизмов, которые тождественно действуют на группе гомологий поверхности. Эта подгруппа называется группой Торелли и обозначается через $\mathcal{T}$. Известно, что $M/\mathcal{T} = Sp_g(\mathbb{Z})$ [5].

Пусть $\mathcal{T}^{ab}$ - абелизация группы $\mathcal{T}$. Джонсон показал ([1]), что подгруппа кручения в группе $\mathcal{T}^{ab}$ – суть элементарная абелева 2-группа, которая допускает следующее, удобное для наших целей, описание:

пусть $(V, (,))$ невырожденное симплектическое пространство размерности $2g$ над полем $\mathbb{Z}_2$. Функция q на V со значениями в $\mathbb{Z}_2$ называется квадратичной формой, ассоциированной с симплектической формой $(,)$, если

$q(x+y) = q(x) + q(y) + (x, y)$ для любых $x, y \in V$ $\qquad (*)$.

Из условия $(*)$ следует, что сумма двух квадратичных форм есть линейная функция. Ясно также, что сумма линейной и квадратичной формы на V есть квадратичная форма. Таким образом, квадратичные формы образуют аффинное пространство Q размерности $2g$ над полем $\mathbb{Z}_2$.

Рассмотрим элемент $x \in V$ как линейную функцию $\overline{x}$ на Q, полагая $\overline{x}(q) \stackrel{\text{def}}{=} q(x)$, $x \in V$, $q \in Q$. (Заметим, что при этом $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} + (x, y)$).

Через $S(V)$ обозначим $\mathbb{Z}_2$-алгебру функций на Q, порожденную линейными функциями $\overline{x}$, $x \in V$. В алгебре $S(V)$ имеется естественная фильтрация $0 < \mathbb{Z}_2 < S_1(V) < \cdots < S_{2g}(V)$ пространствами полиномов степени, не выше данной. При этом ассоциированная градуированная

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ

алгебра $\oplus S_i(V)/S_{i-1}(V)$ изоморфна внешней алгебре $\oplus \Lambda^i V$.

В пространстве $S_2(V)$ имеется выделенный элемент – арф-инвариант Arf. Если $x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g$ – стандартный базис в симплектическом пространстве V (то есть, $(x_i, x_j) = (y_i, y_j) = 0$, $(x_i, y_i) = 1$), то $\mathrm{Arf} = \overline{x_1}\,\overline{y_1} + \ldots + \overline{x_g}\,\overline{y_g}$. От выбора стандартного базиса полином Arf не зависит.

Теорема ([1]). Подгруппа кручения $W = \mathrm{Tor}_2(\mathcal{T}^{ab}) \simeq S_2(V)/\mathrm{Arf}$. Ранг подгруппы кручения равен $\begin{pmatrix} 2g \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2g \\ 1 \end{pmatrix}$.

Замечание. Для поверхности рода $g > 2$ с дыркой, $\mathrm{Tor}_2(\mathcal{T}^{ab}) \simeq S^2(V)$.

2. Цель работы и формулировка результата.

На всех рассмотренных объектах естественно действует конечная простая группа $G = Sp_g(\mathbb{Z}_2)$. Наша цель - описать структуру G-модуля W, указав его композиционный ряд. Отметим, что действие группы G на алгебре $S(V)$ сохраняет фильтрацию. При этом действие, индуцированное на ассоциированной градуированной алгебре, есть стандартное действие симплектической группы на алгебре Грассмана пространства V.

Далее, так как любые два композиционных ряда G-модуля эквивалентны ([2]), а любой флаг подмодулей можно уплотнить до композиционного ряда, то наша задача – уплотнить флаг G-модулей:

$0 < \mathbb{Z}_2 < S_1(V) < S_1(V) + \mathrm{Arf} < S_2(V)$.

Но G-модуль $S_1(V)/\mathbb{Z}_2$ изоморфен G-модулю V, простота которого хорошо известна ([3]). Таким образом, описание композиционного ряда G-модуля W сводится к аналогичной задаче для G-модуля $\Lambda^2 V$, и для её решения осталось уплотнить флаг

$0 < \mathrm{arf} < S_2(V)/S_1(V) \simeq \Lambda^2 V$,

где arf – элемент из $\Lambda^2 V$, равный $x_1 \wedge y_1 + \cdots + x_g \wedge y_g$.

Теорема. Композиционный ряд G-модуля $\Lambda^2 V$ имеет вид

$0 < \mathrm{arf} < \Lambda^2 V$, $\dim(\Lambda^2 V/\mathrm{arf}) = \begin{pmatrix} 2g \\ 2 \end{pmatrix} - 1$, при нечетном g, и

$0 < \mathrm{arf} < L < \Lambda^2 V$, $\dim(L/\mathrm{arf}) = \begin{pmatrix} 2g \\ 2 \end{pmatrix} - 2$, $\dim(\Lambda^2 V/L) = 1$ при четном g.

3. Доказательство теоремы.

Рассмотрим линейное отображение

$l\colon \Lambda^2 V \to \mathbb{Z}_2$,

которое на разложимом бивекторе $u \wedge v$ принимает значение $l(u \wedge v) = (u, v)$. Пусть L – ядро этого отображения. Ясно, что если g четно, то подпространство L содержит элемент arf. Если же g нечетно, то $\mathrm{arf} \notin L$. Разложимый бивектор $\eta = u \wedge v$ называется изотропным (см. [4], глава 9, §5, упражнение 13), если векторы u и v порождают в V изотропную 2-плоскость (или, что то же самое, если (u,v)=0). Следующая лемма, по-видимому, известна специалистам (см. например [4], глава 9, §5, упражнение 13 б,в, где имеются близкие утверждения в характеристике 0). Из-за неимения точной ссылки привожу её вместе с доказательством.

Лемма 1. Как линейное пространство G-модуль L порождается разложимыми изотропными бивекторами.

Доказательство леммы 1.

Фиксируем в V стандартный симплектический базис x_i, y_i, $i = 1, \ldots, g$. Тогда любой бивектор запишется в виде

$w = \sum a_{st} x_s \wedge y_t + \sum b_{pq} x_p \wedge x_q + \sum c_{km} y_k \wedge y_m$ $(**)$.

Сосредоточимся на "неизотропных" слагаемых типа $x_s \wedge y_s$.

Так как $l(w) = 0$, то по определению l и определению симплектического базиса, в разложении $(**)$ участвует четное число слагаемых вида $x_s \wedge y_s$.

Но $x_{i_1} \wedge y_{i_1} + x_{i_2} \wedge y_{i_2} + \cdots + x_{i_{2s}} \wedge y_{i_{2s}} = (x_{i_1} + \cdots + x_{i_{2s}}) \wedge (y_{i_1} + \cdots + y_{i_{2s}})+$ сумма изотропных бивекторов типа $\{x_p \wedge y_q\}\}$, $p \neq q$.

С другой стороны, $(x_{i_1} + \cdots + x_{i_{2s}}) \wedge (y_{i_1} + \cdots + y_{i_{2s}})$ – изотропный бивектор. Это показывает, что линейное пространство L порождается разложимыми изотропными бивекторами.

G-инвариантность L следует из определения линейной функции l и G-инвариантности симплектической формы. ■

Приступим к доказательству теоремы. Детально разберем случай нечетного g (четный случай вполне аналогичен). Если g нечетно, то G – инвариантный бивектор arf не лежит в L, а потому $\{\mathrm{arf}\} \oplus L = \Lambda^2 V$. Поэтому, в нашем случае для доказательства теоремы достаточно рассмотреть нетривиальный G-подмодуль M, содержащийся в L, и доказать, что $M = L$. Для этого нам потребуется

Лемма 2. Нетривиальный G-подмодуль M в L содержит разложимый изотропный бивектор.

Доказательство леммы 2.

Напомним, что с каждым вектором $w \in V - \{0\}$ связано симплектическое отражение $r_w \in G = Sp(\mathbb{Z}_2)$, которое действует в пространстве V по формуле

$r_w(z) = z + (z, w)w.$

Рассмотрим разложимый бивектор $\beta = u \wedge v$ и вычислим $\beta + r_w(\beta)$.

Имеем:

$\beta + r_w(\beta) = u \wedge v + r_w(u) \wedge r_w(v) = u \wedge v + (u + (u, w)w) \wedge (v + (v, w)w) = u \wedge v + (u \wedge v) + (u, w)v \wedge w + (v, w)u \wedge w = \underbrace{((u, w)v + (v, w)u)}_{\tau} \wedge w.$

Легко проверить, что $(\tau, w) = 0$. Таким образом, $\beta + r_w(\beta)$ – это разложимый изотропный бивектор вида $? \wedge w$, или 0, для любого разложимого бивектора $\beta \in \Lambda^2 V$ и любого отражения r_w из группы G.

Пусть M содержит ненулевой бивектор $\eta \in L$. Он представим суммой разложимых бивекторов: $\eta = \beta_1 + \cdots + \beta_s$. Но тогда $r_w\eta + \eta = (r_w\beta_1 + \beta_1) + \cdots + (r_w\beta_s + \beta_s) = q_1 \wedge w + \cdots + q_s \wedge w$, причем все бивекторы $q_j \wedge w$ изотропны или равны 0. Следовательно, $r_w\eta + \eta$ есть изотропный бивектор $(q_1 + \cdots + q_s) \wedge w$ или 0. Если он не равен 0, то все доказано.

В противном случае, $r_w\eta = \eta$ для любого отражения $r_w \in G$.

Но группа G порождена симплектическими отражениями [3]. Следовательно,

$g\eta = \eta$ для любого элемента $g \in G$-инвариантный бивектор. Но тогда $\eta = \mathrm{arf} \in L$, а при нечетном g бивектор arf не лежит в L. Полученное противоречие показывает, что для некоторого $w \in V - \{0\}$ бивектор $r_w\eta + \eta$ лежит в M. Лемма 2 доказана. ■

Из леммы 2 следует, что $M = L$. В самом деле, по теореме Витта [3] (о транзитивности действия группы G на множестве всех разложимых изотропных бивекторов (=изотропных 2-подпространств)) G-модуль M содержит все разложимые изотропные бивекторы, если он содержит хотя бы один такой бивектор. Но тогда $M = L$ по лемме 1.

Доказательство теоремы закончено.

Эта работа была выполнена в рамках российско-германского проекта "Модулярная группа и группа Торелли". Я благодарю профессора J. Mennicke (Bielefeld) за постановку задачи, а также моих российских коллег – профессора, академика РАН С.И. Адяна и аспиранта МИАН А.Л. Таламбуцу за внимание к работе и ценные обсуждения.

Наконец, большое спасибо рецензенту. Его (её) конструктивная критика способствовала значительному "выпрямлению" текста.

О.В. Шварцман

Высшая школа экономики и

Независимый Московский Университет

Список цитированной литературы

[1] D. Johnson, Topology, 24:2 (1985), 127-144.

[2] Ч. Кэртис, И. Райнер, Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Наука, Москва, 1969.

[3] Э. Артин, "Геометрическая алгебра", Наука, М. 1969.

[4] Н. Бурбаки, Алгебра. Модули, кольца, формы, Наука, М. 1966.

[5] Х. Цишанг, Э. Фогт, Х-Д. Колдевай, Поверхности и разрывные группы, Наука, М. 1988