А.В. Карпов

ИЗМЕРЕНИЕ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОСТИ ПАРЛАМЕНТА В ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

1. Введение.

Дискуссии о поиске подходящей избирательной системы, гарантирующей адекватную представительность всех политических сил в обществе, не прекращаются с момента появления первых избирательных органов. В XX в. одновременно с распространением различных форм пропорционального представительства стали появляться критерии оценки функционирования избирательной системы. Основной результат получили М. Балински и П. Янг [1]. Они доказали невозможность существования системы пропорционального представительства, которая распределяла бы мандаты в полном соответствии с принципами пропорциональности.

Неосуществимость создания идеальной избирательной системы заставила исследователей искать количественные оценки, которые могли бы отражать степень соответствия системы тому или иному критерию. Соответствующие индексы дают количественную информацию и позволяют проводить эмпирические исследования для сравнения результатов деятельности различных избирательных систем. Одно из наиболее обширных исследований, в котором проводилось сравнение избирательных систем различных стран по уровню представительности парламента, было осуществлено А. Липхартом [2].

В настоящее время создано большое количество индексов, характеризующих представительность парламента. Одни были специально разработаны для целей конкретного исследования результатов выборов, другие были заимствованы из других областей науки. Таким образом, ещё не сложилось единого мнения относительно того, какой из индексов лучше применять в конкретных исследованиях. Обзор индексов представительности парламента можно найти в [3]. До настоящего времени практически не было исследований, направленных на изучение свойств индексов представительности парламента.

Этой задаче посвящена настоящая работа. В первом разделе описаны основные индексы, во второй части приведен анализ их аксиоматических свойств. Для исследования свойств индексов осуществлён вычислительный эксперимент, моделирующий возможные исходы выборов, результаты которого представлены в третьем разделе. В заключительной части работы приведены результаты расчёта индексов представительности для российского парламента 1995–2007 гг.

Автор выражает огромную признательность за постановку задачи и ряд ценных замечаний Ф.Т. Алескерову. Работа частично поддержана Научным фондом ГУ-ВШЭ (грант № 06-04-0052) и Институтом фундаментальных междисциплинарных исследований ГУ-ВШЭ. Автор благодарит эти организации за поддержку исследования.

2. Основные предположения и обозначения.

Рассмотрим выборы в парламент, проходящие на основе системы пропорционального представительства. Пусть в выборах принимает участие n партий, которые упорядочены и пронумерованы. Пусть $(V_1, V_2, ..., V_n)$ – количества голосов, отданных за партии; $(R1, R2, ..., R_n)$ – количества мест, полученных в результате распределения.

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = V \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} R_i = R \quad .$$

Задача пропорционального представительства состоит в нахождении распределения заданного количества мест между партиями в соответствии с полученными голосами. Существует большое количество методов распределения мест. Они исходят из различных принципов и дают неодинаковые исходы. Их описание можно найти в [31].

Целью выборов является точное отображение предпочтений избирателей при соблюдении равенства возможностей. В соответствии с принципом "один избиратель – один голос" каждый бюллетень должен иметь "равную силу" в смысле доли представительства в парламенте

$$\frac{R_i}{V_i} = \frac{R}{V} \quad , \qquad i = \overline{1,n} \quad .$$

Введем обозначения.

Пусть $v_i = \dfrac{V_i}{V}$, $r_i = \dfrac{R_i}{R}$ – доли голосов и доли мест, полученных партией i, соответственно. Обозначим представительство i-той партии через $y_i = \dfrac{R_i}{V_i}$.

Набор ($v_1, v_2, ..., v_n; r_1, r_2, ..., r_n$) назовем результатом выборов.

При $\frac{R_i}{V_i} < \frac{R}{V}$ партия i недостаточно представлена,

при $\frac{R_i}{V_i} > \frac{R}{V}$ можно утверждать, что партия i имеет

завышенное представительство в парламенте. Используя значение представительства y_i, можно сравнивать различные партии друг с другом, чтобы понять, какая партия в большей степени выиграла или проиграла от использованного способа распределения мест. В идеальном случае каждый голос имеет равную силу, и партия получает долю мест равную доле голосов

$$v_i = r_i \quad , \qquad i = \overline{1,n} \quad .$$

При минимальных требованиях к системе пропорционального распределения мест верно свойство монотонности распределения: при выполнении $v \geq v_2 \geq v_3 ... \geq v_n$ следует $r \geq r_2 \geq r_3 ... \geq r_n$. Так как в данной работе не исследуются конкретные способы распределения мест, то при изучении индексов никакие дополнительные требования на распределение наложены не будут.

В реальности политические системы показывают невозможность достижения равенства между долями набранных партией голосов и полученных мест в парламенте. Проблема состоит не только в дискретности мест, но и в существующем барьере прохождения в парламент. Избирательный порог не допускает партии, набравшие меньше определённой доли голосов, к распределению мест, ухудшая тем самым не только пропорциональность распределения, но и представленный политический спектр. Отклонение от точного равенства между долями голосов и мест является не только математической проблемой, но и политической, так как оно отражает искажение волеизъявления граждан.

В рамках данной работы не рассматриваются искажения представительности, являющиеся следствием недопущения участия каких-либо партий к выборам или неучастия избирателей в голосовании. Индексы, учитывающие неявку, можно найти в [3]. Объектом нашего исследования являются результаты выборов.

Для анализа искажений представительности парламента используются индексы, с помощью которых можно измерить, насколько данное распределение отклоняется от точного распределения мест. Разработанные индексы имеют различное аналитическое представление, что определяет их свойства и интерпретацию. Обзор индексов диспропорциональности, на которые в тексте нет ссылок, можно найти в [4]. Множество различных подходов к измерению представительности парламента можно разделить на несколько групп.

3. Индексы абсолютных отклонений.

Первая группа индексов характеризует представительность с помощью абсолютных отклонений, то есть разностей между долями набранных голосов и полученных мест в парламенте. Идеальная представительность достигается при $v_i = r_i$, что соответствует нулевому значению индексов. Возможны два варианта учёта отклонений: нахождение максимального отклонения и использование некоторого усреднения.

3.1 Максимальное отклонение (maximum deviation).

$$MD = \max_{i=1,n} |r_i - v_i| \quad . \qquad (1)$$

Самый простой из возможных индексов. Он показывает величину искажения для самой неточно представленной партии. Несоответствие проявляется в недостаточном представительстве партии или в превышении соответствующей доли. Максимальное значение равно 1, когда партия, не набравшая ни одного голоса в свою поддержку, получает все места, что недостижимо при условии монотонности распределения. При большом количестве партий индекс может достигать сколь угодно близкого к единице значения, если одна партия имеет невысокую долю голосов, но в свою очередь значительно превосходит остальные.

3.2 Индекс Рэ (Rae index).

Этот индекс является средним арифметическим абсолютных отклонений:

$$I_{Rae} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |r_i - v_i| \quad . \qquad (2)$$

Индекс имеет ясную интерпретацию – на сколько в среднем каждая партия не соответствует своему точному представительству. Но индекс имеет значительный недостаток: его значение зависит от числа партий. Когда число партий, не прошедших в парламент и мало влияющих на результат выборов, велико, индекс принимает очень низкие значения. Это связано с тем, что:

$$\max \sum_{i=1}^{n} |r_i - v_i| = 2 \;\text{ и }\; \max I_{Rae} = 2/n \quad .$$

Низкие для отрезка от 0 до 1 значения индекса совсем не означают хорошую представительность. Для исправления этого эффекта среднее можно считать не по всем партиям, а только по тем, которые набрали более 0,5% голосов, но даже в этом случае индекс может принимать неадекватно низкие значения.

3.3 Индекс Лузмора–Хэнби (Loosemore-Hanby index).

В отличие от индекса Рэ принимает значения от 0 до 1 и выглядит следующим образом:

$$I_{LH} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |r_i - v_i| \quad . \qquad (3)$$

Индекс Лузмора–Хэнби, хотя по форме и напоминает индекс Рэ, содержательно он показывает другую величину. Сумма положительных абсолютных отклонений всегда равна сумме отрицательных отклонений. Значение индекса Лузмора–Хэнби отражает суммарное превышение доли полученных мест над соответствующей долей голосов у одних партий и недостаточную представительность в парламенте у других партий.

3.4 Индекс Грофмана (Grofman index).

При подсчёте среднего в индексе сумма делится не на общее число партий, а на эффективное число партий, так как оно более информативно:

$$I_G = \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{n}|r_i - v_i| \ , \quad (4)$$

где $E = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}$ – эффективное число партий.

Индекс Грофмана не полностью исправляет недостаток индекса Рэ, так как верхняя граница остаётся непостоянной, более того, она может быть больше единицы. Следует отметить, что нельзя однозначно определить формулу для расчета эффективного числа партий. Существует множество подходов, и выбор одного из них не исключает возможности применения других. Надо рассматривать индекс Грофмана как устоявшийся вариант из множества возможных, сходных по своему содержанию.

3.5 Индекс Липхарта (Lijphart index).

Вычисляется так же, как и индекс Рэ, только рассчитывается для двух самых крупных партий:

$$I_L = \frac{|r_i - v_i| + |r_j - v_j|}{2} \ . \quad (5)$$

Действительно, наиболее значительные отклонения от справедливой доли бывают обычно у крупных партий, поэтому, учитывая только их, можно получить значение индекса, которое можно рассматривать как общую представительность. Если существует высокий законодательный порог прохождения в парламент, то места распределяются только среди крупных партий. Значение превышения доли мест над долей голосов косвенно показывает долю голосов, не получивших представительство в парламенте.

Эти индексы связаны между собой. Верны следующие неравенства:

$$I_{Rae} \le MD \le I_{LH} \ , \quad I_{Rae} \le I_G \ , \quad I_L \le MD \ .$$

Остальные возможные неравенства могут нарушаться. Например, значения индекса Рэ не всегда являются наименьшими, они могут превышать значения индекса Липхарта, когда отклонения у малых партий достаточно велики.

4. Квадратичные индексы.

Предыдущая группа индексов основана на среднем арифметическом в различных вариантах. Вследствие их линейности по отклонениям индексы могут не отражать изменение представительности при изменении распределения мест, так как одинаков учитывают большие и малые отклонения.

В таблице 1 приведён пример результатов выбо ров. Здесь для каждой из четырех партий указан полученные доли голосов и доли мест.

Таблица 1

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.1	0.05
B	0.2	0.15
C	0.3	0.3
D	0.4	0.5

В таблице 2 приведён пример, в котором распределение мест между партиями А и В изменяется по сравнению с таблицей 1, но все остальные доли голосов и мест остаются неизменными.

Таблица 2.

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.1	0
B	0.2	0.2
C	0.3	0.3
D	0.4	0.5

При этом в обоих случаях индексы абсолютных отклонений не изменяются и принимают следующие значения:

Таблица 3.

Значения индексов абсолютных отклонений.

MD	0.1
Rae index	0.05
LH index	0.2
Grofman index	0.06
Lijphart index	0.05

Несложно заметить, что индексы не изменятся при любом распределении мест между партиями А и В, если партия В будет иметь большую долю, чем партия А. При этом распределение, когда два партии недостаточно представлены в равной мере, что соответствует таблице 1, является более пропорциональным, чем распределение, в котором полностью отсутствует представительство партии А.

Квадратичные индексы позволяют соотносить различные варианты, неразличимые с точки зрения суммы отклонений. Данная группа индексов позволяет моделировать различное отношение к структуре отклонений. Небольшие отклонения в общем случае устранить нельзя. Если в результате распределения некоторые партии имеют значительно более высокие абсолютные отклонения от точной доли, чем другие партии, то данная ситуация должна характеризоваться худшей представительностью, чем более равное распределение отклонений. Имеет смысл, чтобы индекс представительности парламента по-разному учитывал неодинаковые по величине отклонения. Для отражения этой идеи предложен соответствующий индекс.

4.1 Индекс Галлахера.

В литературе этот индекс часто называется индексом наименьших квадратов (least squares index):

$$Lsq = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^2} \ . \quad (6)$$

Индекс Галлахера не отражает среднее отклонение, а является интегральным показателем, отражающим несоответствие значений голосов и мест. Возведение в квадрат значительно увеличивает различие между большими и малыми отклонениями по сравнению с обычным суммированием. Малые разности слабее влияют на индекс, чем большие, которые сильно увеличивают индекс. Это свойство можно усилить, используя не квадратичную функцию, а более высокую степень, как предложено в [3]:

$$H_s = \sqrt[s]{\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^s} \quad . \qquad (7)$$

Этот индекс не является монотонным по s, что затрудняет его интерпретацию. Кроме того, его максимальное значение зависит от s:

$$\max H_s = \sqrt[s]{\frac{2}{s}} \quad .$$

Последний недостаток можно исправить, немного видоизменив индекс:

$$\widetilde{H}_s = \sqrt[s]{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^s} \quad . \qquad (8)$$

В обоих случаях индекс принимает значения от 0 до 1 и становится менее чувствителен к малым отклонениям с ростом s. В пределе индекс учитывает только максимальное отклонение:

$$\lim_{s\to\infty} H_s = \lim_{s\to\infty} \widetilde{H}_s = MD \quad .$$

Следует отметить, что индекс Галлахера может быть больше максимального отклонения. Приведем пример. В таблице 4 приведены результаты выборов для четырех партий.

Таблица 4.

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.20	0.25
B	0.20	0.25
C	0.30	0.25
D	0.30	0.25

Индексы максимального отклонения и Галлахера, посчитанные для этого распределения, равны: MD=0.05 и L_{sq}=0.07.

Оба индекса изменяются при объединении одинаковых партий, что видно из следующего примера.

Таблица 5.

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.4	0.5
B	0.6	0.5

Здесь MD=0.10 и L_{sq}=0.10.

Эти индексы не удовлетворяют свойству независимости от раскола, которое можно описать следующим образом. Если все партии можно разделить на несколько равных по составу групп, в них будут присутствовать партии с равными долями голосов и мест, то индекс, посчитанный по всем партиям, должен быть равен значению индекса, посчитанному по одной группе, принятой как отдельный результат выборов. Если построить условный пример, в котором каждая доли голосов и мест каждой партии делятся на k равных частей, и посчитать для него значение индекса, то при выполнении свойства независимости от раскола индекс должен быть равен исходному.

4.2 Индекс Монро (Monroe index) [5].

В литературе этот индекс часто называется индексом наименьших квадратов (least squares index):

$$I_{Monroe} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^2}{1+\sum_{i=1}^{n}v_i^2}} \quad . \qquad (9)$$

Сумма квадратов долей голосов характеризует число партий. Чем больше партий, тем меньше отклонения, соответственно и меньше должен быть знаменатель.

В социально-экономической статистике рассматриваются задачи измерения структурных различий. Примером может служить сравнение отраслевых структур экономик разных регионов, сравнение структуры фактического выпуска с планируемым. В этой области был разработан ряд индексов. Оказывается, что эти индексы можно использовать при измерении представительности парламента.

В отличие от индекса Галлахера данные индексы удовлетворяют свойству независимости от раскола.

4.3 Индекс Гатева. (Gatev index) [6].

Индекс рассчитывается по следующей формуле:

$$I_{Gatev} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(r_i^2 + v_i^2)}} \quad . \qquad (10)$$

Индекс Гатева различает структуры с равными суммами квадратов отклонений. Индекс принимает более высокие значения, когда партии имеют примерно равный размер. При этом чем количество партий больше, а их размер меньше, тем значение индекса выше. Таким образом, индекс более чувствителен к малым партиям, чем индекс Галлахера.

При разделении долей голосов и мест каждой партии на k равных индекс не изменяется:

$$I_{Gatev} = \sqrt{\frac{k\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{k}r_i - \frac{1}{k}v_i\right)^2}{k\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{k}r_i\right)^2 + \left(\frac{1}{k}v_i\right)^2\right)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(r_i^2 + v_i^2)}} \quad .$$

Выполнение свойства независимости от раскола позволяет сравнивать распределения с различным числом партий.

4.4 Индекс Рябцева (Ryabtsev index) [7].

Индекс незначительно отличается от индекса Гатева, принимает более низкие значения:

$$I_{Ryabtsev} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(r_i - v_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(r_i + v_i)^2}} \quad . \qquad (11)$$

4.5 Индекс Салаи (Szalai index) [8].

Он был введен при исследовании различий в структуре использования бюджета времени у различных групп населения:

$$I_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i - v_i}{r_i + v_i}\right)^2}{n}} . \quad (12)$$

Этот индекс отличается от всех рассмотренных выше индексов из этой группы. Чем больше размер партии, тем выше будет значение $y\ (r_i+v_i)^2$, что приведет к уменьшению вклада данной группы в общей сумме. Это увеличивает значимость малых партий. В случае когда партия не получает представительства в парламенте, выполняется следующее условие: $(r_i-v_i)^2=(r_i+v_i)^2=r_i^2-v_i^2$.

Индекс Салаи принимает близкие к 1 значения, когда большое количество партий не получают мест в парламенте (в сумме большое количество единиц). Таким образом, индекс очень чувствителен к некорректному представительству малых партий, что заметно отличает его от всех других.

Рассмотрим пример, в котором одна малая партия не получает представительства в парламенте.

Таблица 6.

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.99	1
B	0.01	0

Индексы абсолютных отклонений и индекс Галлахера в данном случае будут принимать близкие к нулю значения, что отражает действительно хорошую представительность. Индекс Салаи выделяется тем, что при появлении непредставленной партии его значение резко увеличивается, в данном случае до 0.7.

Если данное свойство не представляется удовлетворительным, то в [8] предложен взвешенный индекс Салаи (weighted Szalai index):

$$\tilde{I}_{\text{Szalai}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i - v_i}{r_i + v_i}\right)^2 \cdot \frac{r_i + v_i}{\sum_{j=1}^{n}(r_j + v_j)}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(r_i - v_i)^2}{r_i + v_i}} . \quad (13)$$

По сути, этот индекс ближе к индексам абсолютных отклонений, так как квадраты отклонений делятся на размер партии. Таким образом, индекс можно представить как взвешенную сумму абсолютных отклонений:

$$\tilde{I}_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{|r_i - v_i|}{r_i + v_i} \cdot |r_i - v_i|} .$$

Основная проблема использования индексов из социально-экономической статистики – отсутствие интуитивного понимания и, как следствие, сложность выбора между ними. Индексы Рябцева и Гатева отличаются только знаменателем, но отсутствие ясной интерпретации не позволяет выделить лучший.

5. Индекс Алескерова-Платонова.

Индексы абсолютных отклонений и квадратичные индексы измеряют представительность через значения отклонений, но равные превышения доли мест над долей голосов приводят к различным эффектам с точки зрения пропорциональности. Причиной тому является различная значимость отклонения для больших и малых партий. Рассмотрим следующий пример.

Таблица 7.

Партии	Доли голосов	Доли мест
A	0.5	0.6
B	0.01	0.11

Партия B более значительно превышает своё точное представительство, несмотря на равные отклонения. В таблице 8 приведены значения абсолютного отклонения и относительного представительства.

Таблица 8.

Партии	$\lvert v\text{-}r \rvert$	r/v
A	0.1	1.2
B	0.1	11

Сравнивая относительную представительность с единицей, можно измерить представительность с новой точки зрения.

Индекс Алескерова-Платонова (Aleskerov-Platonov index) [3] считается только по партиям, прошедшим в парламент:

$$R = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{r_i}{v_i} . \quad (14)$$

Когда часть партий не участвует в распределении мест, то партии, преодолевшие порог в среднем на каждый процент голосов, получают более одного процента мест. Индекс показывает среднее превышение доли мест над долей голосов для k прошедших партий. Наилучшее значение индекса равно единице, что соответствует отсутствию голосов, которые не получили представительства в парламенте, и полной пропорциональности распределения.

Следует отметить, что если избирательный порог отсутствует и при расчете индекса учитывать как относительно недостаточно представленные партии, так и получившие больше точного представительства, то значение индекса может быть равно 1 из-за усреднения значений больших и меньших единиц. Поэтому в такой ситуации применение индекса должно быть ограничено только партиями, которые имеют повышенную представительность.

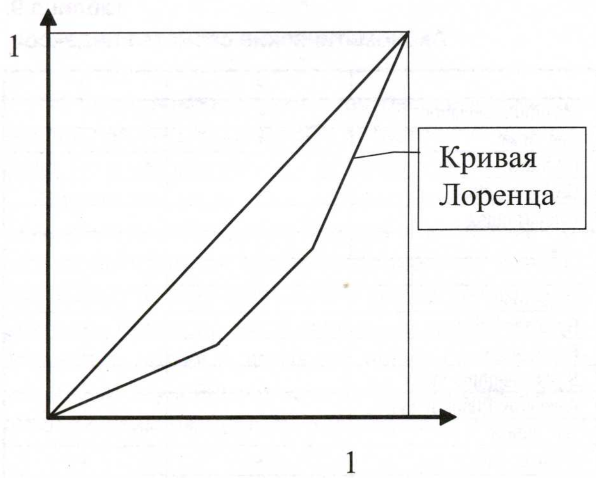
6. Индексы неравенства.

Еще в начале XX в. экономика благосостояния [9] столкнулась с задачей, которая сходна по своей постановке с задачей измерения диспропорциональности, а именно – измерение несоответствия доли группы в общей численности населения и доли в общем доходе. Было разработано несколько оригинальных решений, которые можно с успехом применить для измерения представительности парламента. Индивид, участвующий в выборах, получает "выигрыш" в виде представительства своей партии.

Можно рассматривать $y_i = \frac{R_i}{V_i}$ как электоральный доход индивида, голосующего за i-тую партию. Из-за диспропорциональности представительство партии не будет удовлетворять желаемому условию $y_i = \frac{R}{V}$, и следствием будет неравенство, которое можно измерить с помощью соответствующих индексов.

6.1 Индекс Джини. (Gini index).

Это один из первых индексов, которые были введены для измерения неравенства в доходах. Он вычисляется на основе кривой Лоренца.



По оси абсцисс откладываются доли голосов избирателей, по второй оси откладываются доли дохода, которые находятся по формуле:

$$t_i = \frac{y_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j} = \frac{\frac{r_i}{v_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r_i}{v_i}}.$$

После этого необходимо упорядочить по возрастанию значения t_i/v_i, которые являются отношением доли в общем доходе к доле избирателей.

Кривая Лоренца строится по доле накопленного дохода, которая рассчитывается как:

$$T_h = \frac{\sum\limits_{i=1}^{h} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{h} \frac{r_i}{v_i}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{r_i}{v_i}}. \quad (15)$$

В случае полного равенства уровня представительностей для всех партий кривая Лоренца будет являться прямой линией, совпадающей с диагональю. В остальных случаях она будет лежать ниже. Индекс Джини считается как отношение площади между кривой Лоренца и биссектрисой к площади под диагональю. Использование графического метода является преимуществом индекса, так как приводит к интуитивному пониманию явления.

6.2 Индекс Аткинсона [9] (Atkinson index).

Данный индекс использует параметр ε, характеризующий отношение общества к неравенству. При росте ε негативное отношение к неравенству усиливается. Индекс Аткинсона выглядит следующим образом:

$$A = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \quad (16)$$

где μ – представительность парламента, $\mu = \frac{R}{V}$

$$A = 1 - \left[\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{r_i}{v_i}\right)^{1-\varepsilon}\right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}.$$

6.3 Обобщенная энтропия (Generalized entropy) [9].

Индекс обобщенной энтропии выглядит следующим образом:

$$GE = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{y_i}{\mu}\right)^{\alpha} - 1\right], \quad (17)$$

$$GE = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}\left[\sum_{i=1}^{n} v_i \left(\frac{r_i}{v_i}\right)^{\alpha} - 1\right].$$

Параметр α задает класс индексов с подобными свойствами. Индекс Аткинсона и обобщенная энтропия очень похожи не только по форме, но и по свойствам. Обобщенная энтропия широко используется в исследованиях по измерению неравенства в доходах, так как она удовлетворяет многим желательным для индексов требованиям, например, декомпозируемости, что означает независимость значений индекса от вида группировки. Анализ других свойств индексов будет проведён ниже.

7. Целевые функции.

Для оценки точности метода распределения мест в системах пропорционального представительства вводится понятие функции ошибки, минимизация которой дает искомое распределение. Каждый метод по-своему измеряет пропорциональность, чтобы достигнуть наилучшего значения. Эти функции появились уже после создания самих методов, но являются хорошими измерителями пропорциональности.

Например, индексы I_{Rae}, I_{LH}, L_{sq}, H_s могут служить мерой ошибки для метода наибольшего остатка [3] (квота Хара). Это означает, что, минимизируя эти индексы, мы получим распределение мест, совпадающее с распределением по методу наибольшего остатка.

7.1 Индекс д'Ондта (d'Hondt index).

Индекс равен максимальному превышению доли мест над долей голосов:

$$H = \max_{i=1,n} \frac{r_i}{v_i}. \quad (18)$$

7.2 Индекс Сент-Лаге (Sainte-Lague index).

Индекс является взвешенной суммой квадратов относительных отклонений:

$$SL = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \left(\frac{r_i}{v_i} - 1\right)^2 . \quad (19)$$

Эти индексы являются целевыми функциями, характеризующими методы распределения мест в соответствующих системах пропорционального представительства. Методы д'Ондта и Сент-Лаге имеют необходимые аксиоматические свойства и широко распространены в избирательных системах различных стран. Как видно из формул, значения индексов не имеют верхней границы. Индекс Сент-Лаге по форме совпадает с χ^2-статистикой, применяемой в тесте на совпадение законов распределения [10]. Эта особенность принципиально отличает этот индекс от всех других.

8. Аксиоматический подход.

Индексы представительности парламента должны обладать некоторыми свойствами, чтобы их можно было использовать на практике для различных результатов выборов. Индексы должны измерять пропорциональность в любых распределениях и не зависеть от конкретного применения. При схожей постановке задач в области изучения неравенства в доходах сложилась устойчивая аксиоматика. Исследование представительности имеет свои особенности, что повлияет на формулировку некоторых основных принципов.

8.1 Аксиомы.

1. Анонимность.

Значение индекса не зависит от присваивания порядковых номеров партиям.

2. Соответствие уравнивающим трансфертам.

Если у партии с представительством, превышающим точное значение, отнять некоторую долю мест и добавить её к недостаточно представленной партии, то индекс, по крайней мере, не должен возрасти.

3. Независимость от раскола.

Если все партии можно разделить на несколько равных по составу групп, в них будут присутствовать партии с равными долями голосов и мест, то индекс, посчитанный по всем партиям, должен быть равен значению индекса, посчитанному по одной группе, принятой как отдельный результат выборов.

4. Независимость от масштаба.

Индекс не должен зависеть от любого пропорционального изменения абсолютного значения числа голосов или мест в парламенте.

5. Нормированность к нулю.

При достижении идеального распределения индекс должен равняться нулю и расти при ухудшении представительности.

Свойствам 1 и 4 удовлетворяют все рассмотренные индексы.

Нарушение свойства 2 проявляется только при очень малом изменении доли мест. Так как доля мест может меняться только на определенную величину вследствие целочисленности мандатов, то на реальных данных это свойство, скорее всего, будет проявляться крайне редко и только при большом размере парламента.

Несоответствие свойству 3 означает явную зависимость индекса от числа партий. Таким образом, эти индексы лучше использовать в совокупностях с равным числом партий.

При прочих равных условиях при выборе индекса в задаче измерения пропорциональности парламента скорее следует исходить из максимально ясной интерпретации индекса, а не из соответствия максимально возможному набору свойств, но эти свойства надо изучать, чтобы понять, как проявит себя индекс на реальных данных.

Таблица 9.

Аксиоматические свойства индексов.

	2	3
Maximum deviation	+	-
Rae index	+	-
LH index	+	+
Grofman index	+	-
Lijphart index	+	-
Lsq	+	-
Hs	+	-
Gatev index	-	+
Ryabtsev index	-	+
Szalai index	-	+
Szalai weighted index	-	+
Aleskerov-Platonov index	+	+
Gini index+	+	
Atkinson index	+	+
Generalized entropy	+	+
D'Hondt index	+	+
Sainte-Lague index	+	+

+ удовлетворяет свойству
- не удовлетворяет свойству

9. Вычислительный эксперимент.

Не все особенности индексов можно вывести исходя из анализа их аналитического представления. Некоторые свойства оказываются видны только после расчета индексов по большой выборке. Так как количество возможных реальных результатов выборов ограничено и, кроме того, все выборы различаются по используемому способу распределения мест в парламенте, по количеству партий и другим параметрам, это делает невозможным непосредственное сравнение значений индексов в большой совокупности выборов. С другой стороны, только после изучения индексов на однородной совокупности, не связанной с какой-либо определенной электоральной формулой, числом партий, мест в парламенте, можно подходить к анализу реальных данных.

Для моделирования доли голосов и мест были заменены случайными величинами, что позволило сравнить статистические свойства и законы распределения исследуемых индексов.

9.1 Постановка эксперимента.

Сложность моделирования различных распределений переменных v_i и r_i состоит в том, что по условию задачи требуется выполнение следующих ограничений:

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1 \ , \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = 1 \ .$$

Чтобы величины были одинаково распределены, не наблюдалась совершенная корреляция и каждое из значений не выходило за пределы отрезка от 0 до 1, использован следующий метод. В начале генерируется случайный вектор $\vec{X}$, состоящий из n независимых одинаково распределённых неотрицательных случайных величин. Параметр n задает число партий.

Определим долю голосов как отношение i-той случайной величины ко всей сумме:

$$v_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \ .$$

По построению v_i одинаково распределены для каждой партии i. Корреляция, естественно, не равна нулю, но и нет абсолютной зависимости.

Вектор распределения мест создается на основе изменения вектора долей голосов v_i. Заметим, что в работе не ставится целью моделировать конкретный метод пропорционального представительства. Значения r_i генерируются, используя случайные отклонения ε, которые являются независимыми нормальными случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2:

$$\frac{r_i}{v_i} = 1 + \varepsilon_i \ , \text{ где } \ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \ , \quad r_i = v_i(1 + \varepsilon_i) \ .$$

Чтобы доли мест не вышли из требуемого интервала, значения ограничиваются снизу нулём, сверху единицей, и каждый элемент делится на сумму всех значений.

Было проведено 16 экспериментов: при различном числе партий $n=\{4, 5, 7, 10\}$, уровне диспропорциональности $\sigma=\{0.1, 0.5\}$, при нормальном и равномерном законе распределения x_i и числе повторов v_i=10000. Представленные результаты посчитаны при $x_i \sim abs(N(0,1))$, абсолютном значении нормальной случайной величины. Закон распределения не сильно зависит от выбора параметров распределения x_i, так как рассчитываются доли, у которых, например, математическое ожидание зависит только от количества партий.

Таким образом, по этим данным можно проанализировать влияние на индексы следующих факторов: числа партий, уровня несоответствия доли голосов и мест, которое моделируется через параметр σ, который далее будет упоминаться как уровень диспропорциональности. Среди измеряемых величин – средние значения индексов, их стандартное отклонение и парные ранговые корреляции. Гистограммы дают полную информацию о законе распределения значений индексов.

9.2 Результаты эксперимента.

Каждый индекс создаёт уникальное упорядочение на множестве исходов. Используя случайные распределения голосов и мест, можно узнать, как различаются упорядочения результатов выборов различными индексами. Главным индикатором, отражающим близость индексов, являются ранговые корреляции, для измерения которых служит коэффициент ранговой корреляции Спирмэна, с которым можно ознакомиться в [11]. Если индексы близки по своему аналитическому представлению, то следует ожидать создание близких упорядочений. В таблице 9.1 приведены значения ранговой корреляции Спирмэна при числе партий n=4 и уровне диспропорциональности σ=0.1. В таблице нет индекса Лузмора – Хэнби, так как он создает упорядочение, эквивалентное индексу Рэ. При фиксированном числе партий эти индексы отличаются только коэффициентом перед суммой.

Таблица 10.
Коэффициент Спирмэна для индексов абсолютных отклонений при n=4 и σ=0.1.

	MD	Rae index	Grofman index	Lijphart index
MD	1	0.974	0.930	0.918
Rae index	0.974	1	0.935	0.913
Grofman index	0.930	0.935	1	0.913
Lijphart index	0.918	0.913	0.913	1

Высокое значение ранговых коэффициентов корреляции отражает значительное сходство и однородность в группе индексов абсолютных отклонений.

Увеличение числа партий уменьшает разброс значений индексов. Это делает упорядочения менее определенными и сокращает значения коэффициентов корреляции. Увеличение диспропорциональности имеет обратный эффект и увеличивает корреляции.

На следующих графиках приведены значения среднего и стандартного отклонения для различного количества партий и σ=0.1, посчитанные по 10000 наблюдениям.

Среднее значение большинства индексов падает, так как средний размер партии уменьшается и вместе с ним размер отклонений между точной квотой и полученным количеством мест.

При данной постановке эксперимента увеличение числа партий можно рассматривать как некоторый эквивалент разделению партий. Изменение значений индексов, удовлетворяющих свойству независимости от раскола, заметно отличается от остальных.

Стандартное отклонение значений индексов значительно уменьшается с ростом количества партий. Дисперсия среднего уменьшается при росте количества наблюдений. В данном эксперименте количество партий определяет число случайных величин и в общем случае стандартное отклонение должно уменьшаться.

Чем больше несоответствие между точной квотой и полученным количеством мест, тем менее

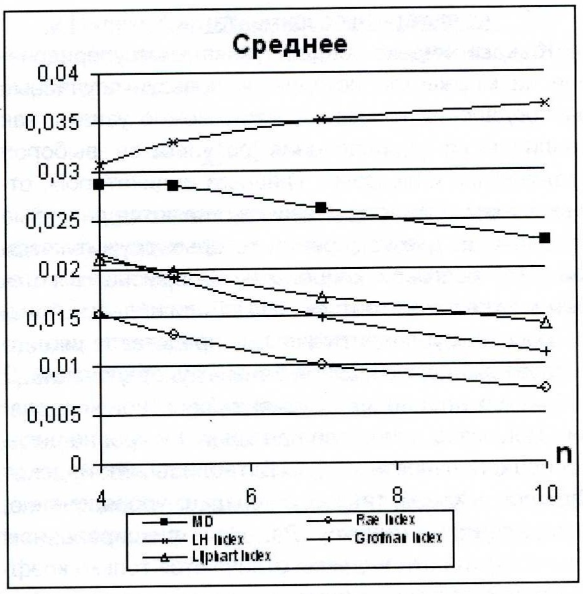


Рис. 2.

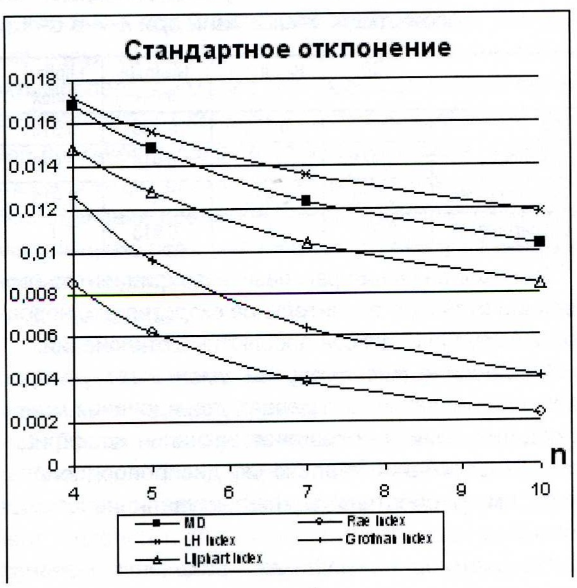


Рис. 3.

важно, какой из индексов использовать. Упорядочение различных исходов будет в большем числе случаев совпадать. С увеличением уровня диспропорциональности до σ=0.1 среднее и дисперсия у всех индексов возрастают.

Вторая группа индексов демонстрирует ещё более тесную связь в терминах коэффициентов корреляции Спирмэна, что видно из следующей таблицы.

Таблица 11.

Значения коэффициентов корреляции Спирмэна для квадратичных индексов при n=4 и σ=0.1.

	LSQ	H_s s=5	Gatev index	Ryabtsev index	Szalai index
LSQ	1	0.996	0.987	0.987	0.736
H_s s=5	0.996	1	0.980	0.980	0.726
Gatev index	0.987	0.980	1	1.000	0.695
Ryabtsev index	0.987	0.980	1.000	1	0.695
Szalai index	0.736	0.726	0.695	0.695	1

Незначительные изменения индекса Галлахера не приводят к заметным изменениям. Индексы Рябцева и Гатева практически не различаются, что и можно было ожидать исходя из их аналитического представления. Индекс Монро, который не рассматривается в эксперименте, даст очень близкие к представленным индексам результаты. Индекс Салаи демонстрирует значительно отличающиеся корреляции и будет рассмотрен более подробно.

Среднее значение индексов H_s и L_{sq} падает, так как уменьшается среднее отклонение доли мест от доли голосов. Индексы Гатева, Рябцева и Салаи растут с увеличением числа партий, так как они более чувствительны к малым партиям. Это свойство уже отмечалось выше, исходя из особенности аналитического представления. Снова стоит отметить различное поведение индексов, удовлетворяющих и не удовлетворяющих свойству независимости от

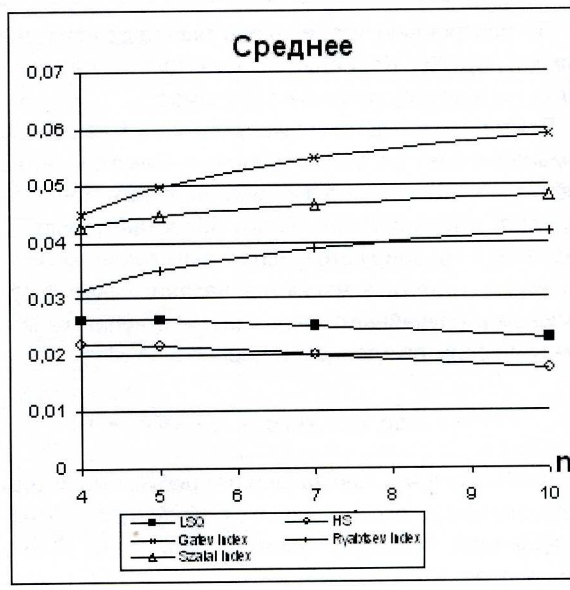


Рис. 4.

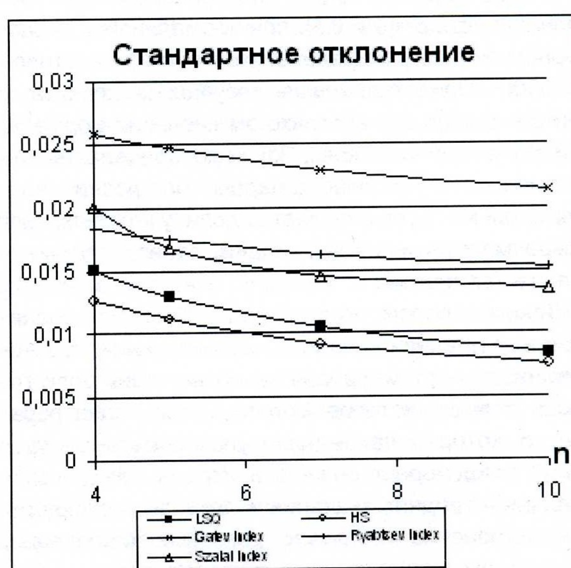


Рис. 5.

раскола. Средние значения индексов, не изменяющихся при разделении партий, увеличивается с ростом числа партий, а значения остальных индексов падают.

Гистограммы распределения значений индексов в большинстве случаев подобны и являются асимметричными однопиковыми распределениями.

При количестве партий n=4 и уровне диспропорциональности σ=0.5 гистограмма значений индекса Галлахера выглядит следующим образом.

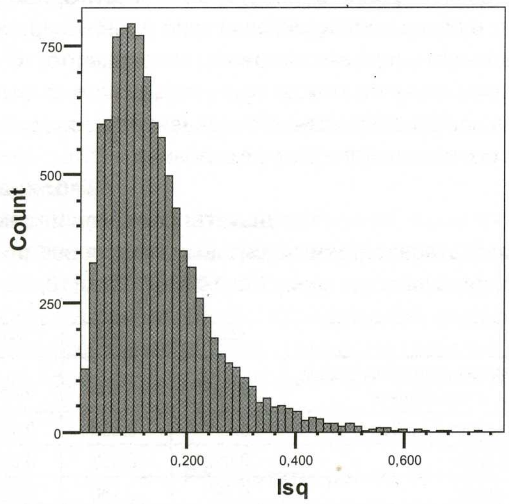


Рис. 6.

При σ=0.1 значения индекса Галлахера уменьшаются, но гистограмма сохраняет свою форму. Подобные распределения имеют практически все индексы.

Гистограмма индекса Салаи при σ=0.1 по форме напоминает вышеприведенную, но при увеличении уровня диспропорциональности до σ=0.5 появляются партии, которые не получают представительства в парламенте, что значительно изменяет значения индекса и, как следствие, вид гистограммы. Если разделить результаты выборов на те, в которых все партии получили места в парламенте, и те, в которых существуют партии, не получившие места в парламенте, то получим два распределения. Первое является однопиковым, а второе можно разделить по числу не представленных в парламенте партий.

Ниже приведены гистограммы значений индекса Салаи при различном числе партий n={4, 5, 7, 10}.

При σ=0.5 распределение значений индекса Салаи является бимодальным, что является следствием появления партий, не получивших представительства. Это можно объяснить, обратившись к аналитическому представлению индекса:

$$I_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i - v_i}{r_i + v_i}\right)^2}{n}} .$$

Если r=0, то в сумме появляется единица, что значительно увеличивает индекс, так как остальные слагаемые достаточно малы. Чем меньше число партий, тем существенней влияние данного эффекта. При n=4 заметно резкое повышение именно после значения

$$I_{\text{Szalai}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = 0.5 .$$

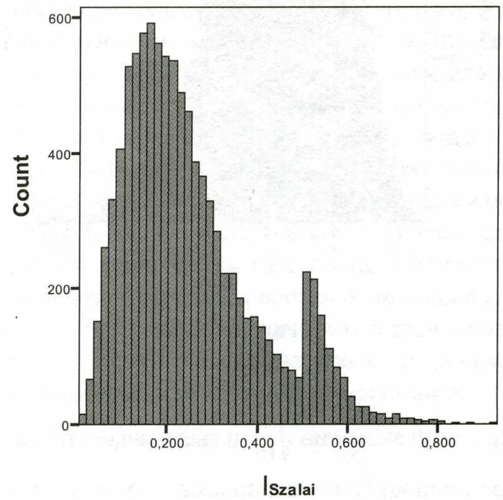


Рис. 7. n=4

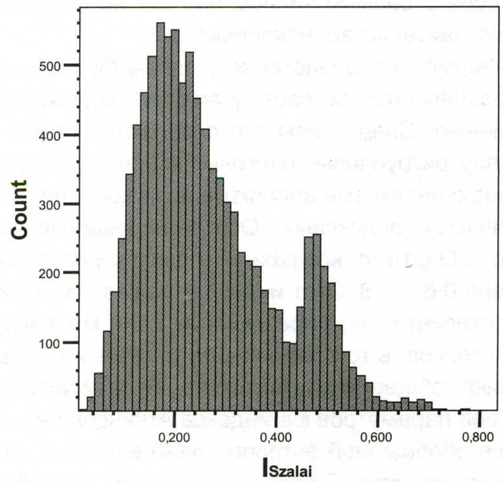


Рис. 8. n=5

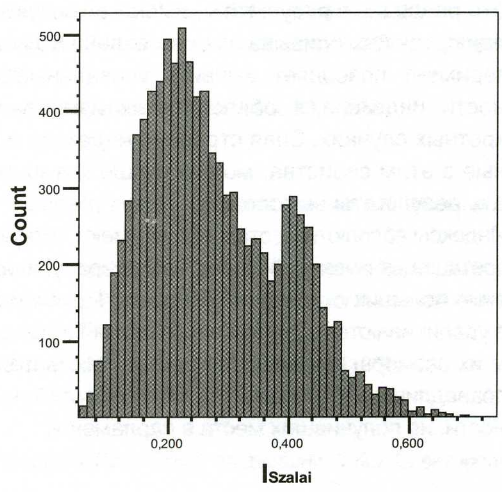


Рис. 8. n=7

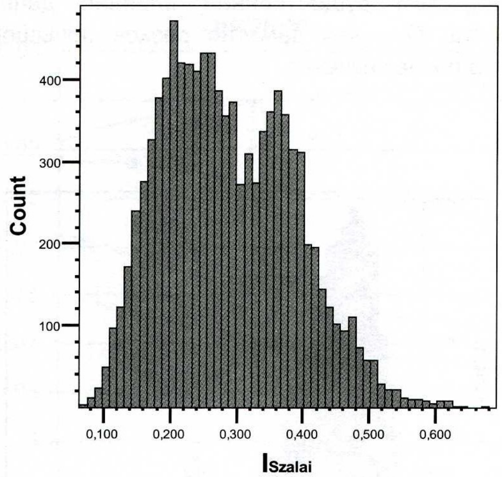


Рис. 9. n=10

При n=10 значение $\sqrt{\frac{1}{10}}$ и выше индекс принимает и без непрошедших в парламент партий, поэтому данный эффект проявляется в меньшей степени. Вследствие этого свойства сравнивать результаты выборов с разным числом партий, не получивших представительства, некорректно.

Индексы неравенства и целевые функции сильно различаются по своему аналитическому представлению. Следствием этого являются более низкие внутригрупповые ранговые корреляции по сравнению с индексами абсолютных отклонений и квадратичными индексами. Особенно выделяется индекс д'Ондта с коэффициентами корреляции на уровне 0.6 – 0.8. Этот индекс отражает максимальное относительное превышение доли мест над долей голосов, в то время как остальные индексы измеряют общее несоответствие. В зависимости от выбора параметров ε в индексе Аткинсона и α в индексе обобщенной энтропии ранговая связь значительно меняется. С ростом количества партий среднее значение всех индексов увеличивается.

Индексы диспропорциональности, хотя и могут давать различные результаты, имеют высокую корреляцию, так как описывают одно явление. Данный эксперимент позволяет выявить уникальные особенности индексов и объяснить их изменение в конкретных случаях. Зная строение индексов и связанные с этим свойства, можно лучше интерпретировать результаты выборов.

Индексы абсолютных отклонений имеют четкую интерпретацию значений. Индекс Галлахера усиливает влияние больших отклонений. Индексы Гатева и Рябцева увеличиваются с ростом числа партий и уменьшением их размера. Индекс Салаи очень чувствителен к несправедливому отображению малых партий, в особенности, не получивших места в парламенте.

10. Результаты расчётов индексов представительности для выборов в Государственную думу РФ 1995-2007гг.

В России в 1995-2003 гг. использовали смешанную систему выборов в Государственную думу. Из 450 мест половина выбиралась по одномандатным округам с применением правила относительного большинства, половина – по системе пропорционального представительства с 5% барьером. Так как 225 мест распределялись по мажоритарной системе, с помощью индексов можно оценить представительность только половины парламента. С помощью индексов можно оценить, насколько сильно реальное распределение отличается от совершенно пропорционального распределения.

Таблица 12.

Результаты расчётов индексов представительности парламента для выборов в Государственную думу РФ 1995-2003гг. [12, 13, 14][1]

	1995	1999	2003
Доля голосов, не получивших мест в парламенте	0.495	0.186	0.282
Maximum deviation	0.217	0.055	0.152
Rae index	0.022	0.013	0.023
LH index	0.495	0.186	0.282
Grofman index	0.091	0.055	0.108
Lijphart index	0.164	0.053	0.101
Lsq	0.210	0.073	0.136
Hs	0.191	0.049	0.133
Gatev index	0.473	0.170	0.258
Ryabtsev index	0.355	0.121	0.186
Szalai index	0.960	0.888	0.919
Aleskerov-Platonov index	1.984	1.232	1.392
Generalized entropy	1.158	0.392	0.611
D'Hondt index	2.000	1.263	1.406
Sainte-Lague index	0.990	0.479	0.627

В выборах 1995 года участвовали 43 избирательных объединения и блока. Из них только 4 партии преодолели необходимый пятипроцентный барьер, кроме того, 16 партий получили менее 200 тыс. голосов, что явно меньше числа собранных ими подписей. 49,5% голосов не получили представительства в парламенте. Это привело к тому, что каждая прошедшая в Государственную думу партия в среднем получила долю мест, почти в 2 раза превышающую долю голосов, что отражается в индексе Алескерова-Платонова. Максимальное отклонение от точной квоты было у КПРФ, набравшей наибольшее число голосов. Оно составило 21,7% в абсолютном выражении, то есть превысило в 2 раза точную квоту.

В выборах 1999 года приняли участие 26 партий. Пятипроцентный барьер преодолели 6 партий, что привело к значительному уменьшению доли голо-

[1] Доля голосов "против всех" и доля испорченных бюллетеней считались как отдельные партии.

сов, не получивших представительства. В выборах 2003 года участвовали 23 партии. Из них только 4 прошли в парламент.

Почти все индексы дают одинаковое упорядочение. Это связано со значительными различиями по числу и размеру прошедших в парламент партий и по общему числу партий на данных выборах. Эти факторы оказали основное влияние на значения индексов.

По совокупности индексов можно определить, что парламент 1999 года имеет наилучшую представительность, а 1995 года – наихудшую. Индексы Грофмана и Рэ, в отличие от других индексов, дают другое упорядочение. Это связано с тем, что эти индексы не учитывают структуру отклонений, и при увеличении числа партий их значения быстро уменьшаются и становятся очень близкими и слабо различимыми.

Выборы депутатов Государственной думы в 2007 году проводились по новому закону и поэтому рассматриваются отдельно. Основные изменения заключаются в том, что весь парламент избирается по системе пропорционального представительства при пороге прохождения 7%. Кроме того, в бюллетенях исключается графа "Против всех".

Таблица 13.
Результаты расчётов индексов представительности парламента для выборов 2007 г. в Государственную думу РФ.

	2007
Доля голосов, не получивших мест в парламенте	0.083
Maximum deviation	0.057
Rae index	0.014
Lsq	0.048
Szalai index	0.817
Aleskerov-Platonov index	1.092
D'Hondt index	1.095

Парламент, избранный в 2007 году, является более представительным, чем Государственные думы более ранних созывов. Из-за наличия избирательного порога пропорциональность распределения в большей степени зависит от доли голосов, не получивших представительства в парламенте. В них включаются не только голоса за партии, не прошедшие в парламент, но и голоса против всех. Так как на этих выборах голосовать против всех не было возможности, то, вероятно, некоторые избиратели просто не пришли на выборы, что улучшило представительность. Возможность прохождения четырех партий и малая вероятность победы других партий прогнозировались по социологическим опросам. Большой разрыв в поддержке только увеличил консолидацию голосов вокруг этих партий и уменьшил долю голосов, не получивших представительства в парламенте, что положительно отразилось на значениях показателей представительности парламента.

Литература:

1. *Balinski, M.L., Young H.P.* Fair representation. New Haven and London Yale University Press, 1982.
2. *Lijphart A.* Electoral Systems and Party Systems. Oxford, 1994.
3. *Алескеров Ф.Т. Платонов В.В.* Индексы представительности парламента// Полития/ №1. 2003. 193-200.
4. *Grilli di Cortona, P., Manzi, C., Pennisi, A., Ricca, F., and Simeone, B.* Evaluation and Optimization of Electoral Systems. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
5. *Kestelman P.* Apportionment and Proportionality: a measured view. Voting matters, 2005. Issue 20, 12-22.
6. *Елисеева И.И.* Социальная статистика. М., 2002.
7. *Рябцев В.М. Чудилин Г.И.* Региональная статистика М., 2003.
8. *Stewart J.* Assessing alternative dissimilarity indexes for comparing activity profiles. Electronic International Journal of Time Use Research. 2006. vol.3. No 1, 49-59.
9. *Frank Cowell,* Measurement of Inequality, London School of Economics and Political Science Discussion Paper. July 1998.
10. *Lothar Heinrich, Friedrich Pukelsheim, Udo Schwingenschlögl,* Sainte-Laguë's chi-square divergence for the rounding of probabilities and its convergence to a stable law, Statistics & Decisions 22, 43-59 (2004).
11. *Поллард Дж.* Справочник по вычислительным методам статистики. М.: Финансы и статистика, 1982.
12. Вестник ЦИК РФ. 2000. № 14.
13. Вестник ЦИК РФ. 2004. № 5
14. Выборы депутатов Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации. 1995. Электоральная статистика. М., 1996.