

УЛУЧШЕННАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ И ГЕНЕРАЦИЯ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРАФОВ СТЕПЕНИ 4

Старичкова Ю.В., Незнанов А.А.

(Москва, Московский энергетический институт (ТУ), Россия)

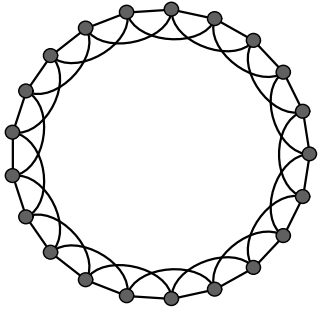
В докладе рассматривается один из подходов к классификации связных транзитивных графов степени 4 и построение генератора бесконечных семейств графов на основе данной классификации.

Транзитивные графы (ТГ) – графы, все вершины которых принадлежат одной орбите, то есть имеют одинаковые свойства. Этот класс графов давно используется в различных областях при моделировании систем простого состава, но сложной структуры. Примеры использования: анализ топологий вычислительных сетей, химических реакций, исследование строения кристаллов, моделирование инвариантных преобразований систем, исследование предельной связности. В отличие от классификации других алгебраических объектов, классификация ТГ исключительно многопараметрична, но её основой является симметрия. Исследования групп симметрии (групп автоморфизмов графа – ГАГ) ведутся давно, но связь этих исследований с визуальными образами (диаграммами графов) стала серьёзно исследоваться только после развития вычислительной техники. Классификация не самоцель, она нужна для выделения бесконечных семейств графов. Семейства ТГ полезны не только в перечисленных выше областях, но и при исследовании вычислительной сложности алгоритмов на графах.

Для проведения классификации была использована информация о характеристиках этого класса графов, полученная Коховым В.А. [1] и Незнановым А.А. [2]. Работа по классификации опирается на предшествующие работы Кохова В.А. (1988-1994 гг.), Незнанова А.А. (2001-2004 гг.) и Киричек О.В. (2003-2004 гг.).

Уточним задачу классификации *связных транзитивных графов степени 4* (ТГС4). Целью классификации является разбиение класса ТГС4 на семейства с растущим числом вершин по набору критериев (см. пример в табл. 1). Имеющаяся полная база ТГС4 с числом вершин до 30 включительно (содержащая 289 графов) должна быть классифицирована полностью, при этом каждый граф этой базы должен принадлежать только одному семейству.

Таблица 1. Пример прорисовки диаграммы графа и характеристики симметрии

 <p>Диаграмма графа</p>	<p>Число тождественной стабильности: $\psi = 2$ Число нетождественной стабильности: $\chi = 2$ Порядок группы автоморфизмов графа: $Aut(G) = 42$ Число различных диаграмм, отражающих симметрию, с расположением вершин по одной окружности: 42</p>
--	--

Выделим некоторые критерии, необходимые для определения принадлежности графа к семейству и определения первого уникального графа семейства:

1. Одна из *симметричных диаграмм* графа. Отметим, что число симметричных прорисовок одного транзитивного графа может быть очень велико.
2. Порядок группы автоморфизмов ($|Aut(G)|$), числа тождественной (ψ) и нетождественной (χ) стабильности. Одним из признаков принадлежности нескольких графов к одному семейству является идентичность значений $|Aut(G)|$, ψ и χ , либо возможность их объединения одной формулой.
3. Сравнение строения группы автоморфизмов членов семейств. Строение ГАГ для семейства должно оставаться идентичным или изменяться по одним и тем же правилам. В качестве начального критерия используем структуру орбит фиксатора вершины.

Следует отметить, что в работе, выполненной ранее Киричек О.В. и Незнановым А.А., присутствовал ряд проблем, не позволяющих говорить о полной завершённости созданного программного комплекса, в частности:

- неполнота классификации (не все графы, содержащиеся в базе, могли быть классифицированы, как представители одного из семейств, предложенных в работе);
- избыточная сложность классификации (подклассы, которые целесообразно объединить в одно семейство, были отнесены к разным);
- некоторые изоморфные графы были отнесены к различным семействам, и, таким образом, формально отличались друг от друга.

Работа по улучшению классификации ТГ была начата в 2005 году. В ходе работы постоянно уточнялась классификация ТГ по критериям:

- порядок группы автоморфизмов;
- число тождественной стабильности;
- число нетождественной стабильности;
- структура орбит фиксатора вершины;
- внешний вид диаграммы графа (основной эстетический критерий выделения семейства).

Основные методы построения семейств для различных подклассов связанных транзитивных графов степени 4 перечислены далее.

Класс №1. Графы, прорисованные по одной окружности.

1. Графы, вершины которых расположены на одной окружности, при этом две соседние вершины соединены ребром. Для каждого подкласса будем описывать, как расположены остальные ребра.

1.1. С нечетным числом вершин, при генерации которых добавляется по 2 вершины к графу, с учетом шага.

1.2. С четным числом вершин, при генерации которых добавляется по 2 вершины к графу, с учетом шага.

1.3. От добавленной вершины ребро проходит через центр графа и соединяется противоположной вершиной.

1.4. Добавляются по три вершины.

1.5. Добавляются по четыре вершины.

1.5.1. Добавляемы фрагменты, представляют собой клику K_4 .

1.5.2. Вершины добавляются таким образом, чтобы ребра образовывали квадрат и пересекались через k вершин.

1.5.3. Вершины добавляются таким образом, чтобы ребра образовывали квадрат и проходили параллельно через k вершин.

1.6. Вершины добавляются таким образом, чтобы ребра проходили параллельно друг другу.

1.7. Каждая добавленная вершина соединяется через n и k вершин с другой вершиной.

1.8. Каждая добавленная нечетная вершина соединяется через n , четная – через k вершин.

2. Графы, вершины которых расположены на одной окружности, при этом две соседние вершины не соединены ребром, а остальные вершины добавляются в зависимости от строения семейства.

Класс №2. Графы, прорисованные по нескольким окружностям.

2.1. По двум окружностям (вершины добавляются на две окружности и соединяются между собой в зависимости от строения семейства).

2.2. По трем окружностям (вершины добавляются на три окружности и соединяются между собой в зависимости от строения семейства)

Класс №3. Графы, имеющие прорисовку другого вида.

3.1. В виде каркаса тора (вершины расположены по нескольким несоосным окружностям, рёбра образуют каркас тора).

Всего выделено более **70** семейств ТГС4.

Установлена корректность и полнота классификации. Все представители семейств являются ТГ. Это доказано как вычислительным экспериментом (первые 40 представителей каждого семейства), так и сравнением строения группы автоморфизмов семейств с известными группами и тем, что структура группы сохраняется неизменной у всех представителей. Семейства покрывают все известные ТГС4 до 30 вершин включительно.

Отметим, что выделение некоторых семейств и выбор варианта *канонической прорисовки* неоднозначен и во многом определяется взглядами на эстетичность и выразительность диаграмм.

По результатам классификации создано расширение АСНИ «*Graph Model Workshop*» (авторы Кохов В.А., Незнанов А.А., Ткаченко С.В.) «Генератор семейств ТГС4» (*Trans4Gen*). *Trans4Gen* позволяет генерировать семейства ТГС4 с числом вершин до 32 тысяч и добавлять их в открытую базу структурной информации АСНИ. Данное расширение, в отличие от большинства других расширений, использует собственный интерфейс с пользователем, при разработке которого были учтены требования:

- визуализации иерархической структуры семейств, что обеспечило удобство выбора номера семейств графов и просмотр классов, к которым данные семейства относятся;
- визуализации диаграмм представителей семейств;
- возможность выбора ограничений: минимальное число вершин, число графов, шаг числа вершин или максимальное число вершин;
- возможность генерации как отдельных представителей, так и всех семейств графов.

В ходе выполнения работы были получены следующие результаты.

- Проведена полная классификация 289 ТГС4 с числом вершин до 30 включительно.
- В каждом семействе графов найден его первой уникальный представитель, не входящий в иные семейства.
- Проведены вычислительные эксперименты по анализу различных характеристик семейств.
- В ходе классификации выявлены и отброшены изоморфные семейства ТГ, так же это дало ряд новых прорисовок ТГ, используя которые можно отнести граф к нескольким классам.

- Методом достройки следующего представителя был получен ряд семейств графов, ранее не входивших в имеющуюся базу ТГ с числом вершин более 30.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кохов В.А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд., 1986. – С. 97-125.
2. Кохов В.А., Незнанов А.А. Справочник по теории графов. Характеристики симметрии и сложности связанных транзитивных графов степени 4 с числом вершин до 30 включительно. – М. Деп. в ВИНТИ, №1094-В2004, 2004. – 418 с.