МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2010 год, том 22, номер 7, стр. 53-64

УДК 517.958:533.7

О КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ОБЩИМИ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ И ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

© *2010 г.* ***А.А. Злотник***

Российский государственный социальный университет, каф. прикладной математики, 129226 Москва, ул. В. Пика, 4
Московский энергетический институт (технический университет), каф. математического моделирования, 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14; e-mail: azlotnik2007@mail.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00600 и 09-01-12166), Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (проект НШ-3439.2010.1) и Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт 02.740.11.5091).

Квазигазодинамическая система уравнений с массовой силой и источником тепла хорошо известна для случая совершенного политропного газа. В статье эта система обобщается на случай общих уравнений состояния газа, удовлетворяющих условиям термодинамической устойчивости. Изучается уравнение баланса энтропии. Анализируется алгебраически выполнение свойства неотрицательности производства энтропии. Выводятся две различные формы записи его релаксационных слагаемых. При некотором условии на мощность источника тепла указанное свойство выполнено.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, общие уравнения состояния газа, источник тепла, уравнение баланса энтропии.

ON THE QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS WITH GENERAL EQUATIONS OF STATE AND A HEAT SOURCE

A.A. Zlotnik

Russian State Social University, Department of Applied Mathematics, 129226 Moscow, W. Pieck 4
Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Department of Mathematical Modeling, 111250 Moscow, Krasnokazarmennaya 14

The quasi-gasdynamic system of equations with a mass force and a heat source is well known in the case of the perfect polytropic gas. In the paper, the system is generalized for the case of general equations of gas state satisfying thermodynamic stability conditions. The entropy balance equation is studied. The validity of the non-negativity property is algebraically analyzed for the entropy production. Two different forms of notation are derived for its relaxation summands. Under a condition on the heat source intensity, the property is valid.

Key words: quasi-gasdynamic system of equations, general equations of gas state, heat source, entropy balance equation.

Квазигазодинамическая (КГД) система уравнений служит основой для построения кинетически согласованных разностных методов решения задач газовой динамики [1-3]. Учет источника тепла [2] в КГД системе важен не только сам по себе, но и в связи с решением более сложных задач радиационной газовой динамики [4].

КГД система уравнений ранее применялась и изучалась только в случае совершенного политропного газа (или баротропного газа); несколько вопросов ее математической теории были недавно рассмотрены в [5-7]. В то же время для многих приложений необходимо использовать более сложные уравнения состояния.

Целью статьи является построение такого обобщения КГД системы в форме из [2,3] на общие уравнения состояния, удовлетворяющие условиям термодинамической устойчивости, которое бы сохраняло свойство неотрицательности производства энтропии как критерия физической корректности системы, а в случае совершенного политропного газа переходило бы в исходную систему. Отметим, что при наличии источника тепла при этом возникает условие на произведение параметра релаксации на мощность источника тепла (обобщающее соответствующее условие для исходной КГД системы [8]). Для этого изучается уравнение баланса энтропии и анализируются алгебраически критерии выполнения свойства неотрицательности производства энтропии – сначала в отсутствие, а затем при наличии источника тепла. Выводятся две различные формы записи производства энтропии – также сначала в отсутствие, а затем при наличии источника тепла. Одна из этих форм записи надлежащим (нетривиальным) образом обобщает форму из [2,3], а другая является новой. Часть результатов в отсутствие источника тепла кратко представлена в [9]; там же дан анализ параболичности по Петровскому обобщенной КГД системы, гарантирующий ее математическую корректность.

КГД систему уравнений в форме из [2,3] с учетом массовой силы и источника тепла можно записать в виде следующих уравнений баланса массы, импульса и полной энергии:

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})] = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes\mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div}\Pi + [\rho - \tau\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]\mathbf{F}, \tag{2}$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}\big[(E+p)(\mathbf{u}-\mathbf{w})\big] = \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \operatorname{div}(\Pi\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\cdot\mathbf{F} + Q. \tag{3}$$

В них тензор вязких напряжений Π имеет вид

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho\mathbf{u}\otimes\widehat{\mathbf{w}} + \tau[\mathbf{u}\nabla p + \gamma p\operatorname{div}\mathbf{u} - (\gamma-1)Q]I,$$

причем Π_{NS} – это классический тензор вязких напряжений Навье-Стокса

$$\Pi_{NS} = \mu\left[2D - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})I\right], \quad D_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$$

с коэффициентом динамической вязкости $\mu = \mu(\rho,\theta) > 0$ и нулевой объемной вязкостью, а I – единичный тензор (порядка n). Тепловой поток $\mathbf{q}$ задается формулой

$$-\mathbf{q} = \kappa\nabla\theta + \tau\left[\rho\left(\mathbf{u}\nabla\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}\mathbf{u}\nabla\rho\right) - Q\right]\mathbf{u},$$

где $\kappa = \kappa(\rho,\theta) > 0$ – коэффициент теплопроводности. Вспомогательные векторы $\mathbf{w}$ и $\widehat{\mathbf{w}}$ таковы

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho}[\mathrm{div}(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p - \rho\mathbf{F}], \quad \widehat{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{\rho}[\rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \rho\mathbf{F}].$$

Операторы div и $\nabla = (\partial_1,\ldots,\partial_n)$ берутся по пространственным переменным $x=(x_1,\ldots,x_n)$, где $n\geq 1$. Через ∂_i и ∂_t обозначены частные производные по x_i и t. При этом дивергенция тензора берется по его первому индексу, а знак $\cdot$ означает скалярное произведение векторов, причем в скалярных произведениях типа $\mathbf{u}\cdot\nabla\phi$ этот знак для краткости опускается. Ниже по повторяющимся индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n.

В качестве основных искомых функций рассматриваются $\rho>0$, $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_n)$, $\theta>0$ – плотность, скорость, абсолютная температура газа. Кроме того, в уравнения входят полная энергия $E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon$, а также давление p и удельная внутренняя энергия ε. Параметр релаксации τ задается формулой $\tau = \frac{\mu}{\alpha_S p}$, где $\alpha_S > 0$ – число Шмидта. Через $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,t)$ обозначена плотность заданной массовой силы, а через $Q = Q(x,t) \geq 0$ – мощность заданных тепловых источников. В [2,3] данная система уравнений рассматривалась только в случае совершенного политропного газа, когда

$$p = (\gamma-1)\rho\varepsilon, \quad \varepsilon = c_v\theta, \quad \gamma = \mathrm{const} > 1, \quad c_v = \mathrm{const} > 0.$$

В данной статье возьмем общие уравнения состояния

$$p = p(\rho,\theta), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho,\theta),$$

связанные равенством Максвелла

$$p = \theta p_\theta + \rho^2\varepsilon_\rho \quad \text{в} \quad D_0 \tag{4}$$

и удовлетворяющие условиям термодинамической устойчивости вида

$$p_\rho \geq 0, \quad \varepsilon_\theta > 0 \quad \text{в} \quad D_0, \tag{5}$$

где D_0 – область значений пары функций (ρ,θ) в КГД системе (случай $D_0 = (0,\infty)\times(0,\infty)$ не исключается) и, например, p_ρ, p_θ – частные производные функции $p = p(\rho,\theta)$. Если фактически $p_\rho > 0$ в D_0, то последние условия можно переписать в известном эквивалентном виде $c_p > c_v \equiv \varepsilon_\theta > 0$ в D_0, где c_p и c_v – теплоемкости газа при постоянном

давлении и постоянном объеме [10]. Включение случая $p_\rho = 0$ позволяет охватить одну из простейших моделей двухфазной смеси газ/жидкость.

Обобщим КГД систему уравнений посредством замены в тензоре вязких напряжений Π слагаемого $\gamma p \operatorname{div}\mathbf{u}$ на $\rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u}$, а слагаемого $(\gamma-1)Q$ на $(\gamma_Q-1)Q$:

$$\Pi = \Pi_{NS} + \rho\mathbf{u}\otimes\widehat{\mathbf{w}} + \tau[\mathbf{u}\nabla p + \rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u} - (\gamma_Q-1)Q]I.$$

Здесь $C_s \geq 0$ – скорость звука в газе, определяемая формулой

$$C_s^2 = p_\rho + \frac{\theta p_\theta^2}{\rho^2 \varepsilon_\theta}, \tag{6}$$

а величина $\gamma_Q = \gamma_Q(\rho,\theta)$ такова, что

$$\gamma_Q - 1 = \frac{p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}.$$

Вывод последней формулы будет дан ниже; при этом выяснится, что при указанном обобщении слагаемого $\gamma p \operatorname{div}\mathbf{u}$ эта форма коэффициента γ_Q–1 определяется однозначно.

В силу условий устойчивости (5) формула (6) корректна (в частности, гарантируется, что $C_s^2 \geq 0$). При $p_\rho > 0$ верно равенство [10]

$$\frac{C_s^2}{p_\rho} = \frac{c_p}{c_v} \tag{7}$$

и поэтому $\rho C_s^2 = \dfrac{c_p}{c_v}\rho p_\rho$.

Отметим, что в частном случае совершенного политропного газа $\rho p_\rho = p$, $\theta p_\theta = p$, $\theta\varepsilon_\theta = \varepsilon$ и поэтому $C_s^2 = \gamma(\gamma-1)\varepsilon$ и $\rho C_s^2 = \gamma p$, а $\gamma_Q - 1 = \gamma - 1$. Пусть $\Gamma = \dfrac{\rho p_\rho}{p}$. В другом частном случае – баротропном, когда $p = p(\rho)$, имеем $C_s^2 = p_\rho$ и $\rho C_s^2 = \Gamma p$ как в [7].

Следуя [7], ниже рассмотрим также более общий тензор вязких напряжений Навье-Стокса

$$\Pi_{NS} = \mu\left[2D - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})I\right] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})I$$

с коэффициентом объемной вязкости $\lambda = \lambda(\rho,\theta) \geq 0$ и, подобно [5,6], возьмем произвольный параметр релаксации $\tau = \tau(\rho,\theta) > 0$.

Введем энтропию $s = s(\rho,\varepsilon)$ посредством формул Гиббса

$$s_\rho = -\frac{p}{\rho^2\theta}, \quad s_\varepsilon = \frac{1}{\theta}. \tag{8}$$

Поскольку тогда

$$\theta\nabla s = \nabla\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}\nabla\rho, \tag{9}$$

то тепловой поток можно выразить с помощью более компактной формулы

$$-\mathbf{q} = \kappa\nabla\theta + \tau(\rho\theta\mathbf{u}\nabla s - Q)\mathbf{u}. \tag{10}$$

Введем полную производную по времени

$$D_t\phi := \partial_t(\rho\phi) + \operatorname{div}[\rho\phi(\mathbf{u}-\mathbf{w})] = \rho\partial_t\phi + \rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\nabla\phi,$$

см. (1). Вычитанием из уравнения полной энергии (3) уравнения импульса (2), скалярно умноженного на **u**, и с учетом формул

$$\partial_t(\rho\mathbf{u})\cdot\mathbf{u} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes\mathbf{u}]\cdot\mathbf{u} = \partial_t\left(\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2\right) + \operatorname{div}\left[\frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2(\mathbf{u}-\mathbf{w})\right],$$

$$\mathbf{w} = \widehat{\mathbf{w}} + \frac{\tau}{\rho}\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{w}} + \frac{\tau}{\rho}(\mathbf{u}\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u} \tag{11}$$

выводится уравнение баланса удельной внутренней энергии

$$D_t\varepsilon = \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi_{ij}\partial_i u_j - p\operatorname{div}(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + \mathbf{w}\nabla p - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{F} + Q. \tag{12}$$

В нем слагаемое $\Pi_{ij}\partial_i u_j$ имеет вид

$$\Pi_{ij}\partial_i u_j = 2\mu D_{ij}D_{ij} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 +$$

$$+\tau\left\{\rho(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{w}} + [\mathbf{u}\nabla p + \rho C_s^2\operatorname{div}\mathbf{u} - (\gamma_Q - 1)Q]\operatorname{div}\mathbf{u}\right\}. \tag{13}$$

Утверждение 1. *Для обобщенной указанным выше образом КГД системы уравнений справедливо уравнение баланса энтропии*

$$D_t s = \operatorname{div}\left(-\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta}\Xi,$$

в котором производство энтропии $\frac{1}{\theta}\Xi$ *выражается формулами*

$$\Xi = \Xi_{NS,0} + \frac{\rho}{\tau}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \frac{\tau p_\rho}{\rho}[\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})]^2 +$$

$$+\frac{\tau\rho\varepsilon_\theta}{\theta}\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\theta - \frac{Q}{2\rho\varepsilon_\theta}\right)^2 + Q\left(1 - \frac{\tau Q}{4\rho\theta\varepsilon_\theta}\right), \tag{14}$$

$$\Xi_{NS,0} = 2\mu D_{ij}D_{ij} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\mathrm{div}\,\mathbf{u})^2 + \frac{\kappa}{\theta}|\nabla\theta|^2 \geq 0 \quad \text{при} \quad n = 1,2,3. \tag{15}$$

Производство энтропии может быть выражено также с помощью формул

$$\Xi = \Xi_{NS,0} + \frac{\rho}{\tau}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \frac{\tau}{\rho C_s^2}\left(\rho C_s^2\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla p - \frac{(\gamma_Q - 1)Q}{2}\right)^2 +$$

$$+\frac{\tau\rho\theta}{c_p}\left(\mathbf{u}\nabla s - \frac{Q}{2\rho\theta}\right)^2 + Q\left(1 - \frac{\tau Q}{4\rho\theta\varepsilon_\theta}\right) \tag{16}$$

и (15) *при* $p_\rho > 0$.

При выполнении условия

$$\frac{\tau Q}{4\rho\theta\varepsilon_\theta} \leq 1 \tag{17}$$

производство энтропии неотрицательно: $\frac{1}{\theta}\Xi \geq 0$ *при* $n = 1,2,3$.

Доказательство разобьем на несколько пунктов.

1. В пп. 1-3 в тензоре вязких напряжений Π вместо $\rho C_s^2\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ рассмотрим слагаемое $\gamma_p p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ с коэффициентом $\gamma_p = \gamma_p(\rho,\theta)$ общего вида. Сначала стандартным образом с помощью формул Гиббса (8) и уравнения баланса внутренней энергии (12) запишем

$$D_t s = \frac{1}{\theta}\left(pD_t\frac{1}{\rho} + D_t\varepsilon\right) = \frac{1}{\theta}\left[p\,\mathrm{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) + D_t\varepsilon\right] = \mathrm{div}\left(-\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \frac{1}{\theta}\Xi,$$

где

$$\Xi = \frac{1}{\theta}(-\mathbf{q})\nabla\theta + \Pi_{ij}\partial_i u_j + \mathbf{w}\nabla p - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{F}.$$

Воспользуемся формулами (13) и (10). Поскольку с учетом формулы (11) имеем

$$(\rho\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{w}} + \mathbf{w}\nabla p - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{F} = \frac{\rho}{\tau}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \tau\left(\frac{1}{\rho}\mathbf{u}\nabla\rho + \mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{u}\nabla p,$$

то после перегруппировки слагаемых получим

$$\Xi = \Xi_{NS,0} + \frac{\rho}{\tau}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + Q + \tau\Xi',$$

где

$$\Xi_{NS,0} = 2\mu D_{ij}D_{ij} + \left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \frac{\kappa}{\theta}|\nabla\theta|^2,$$

$$\Xi' = \gamma_p p(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + 2(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{u}\nabla p + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\nabla\rho)\mathbf{u}\nabla p + \rho(\mathbf{u}\nabla s)\mathbf{u}\nabla\theta -$$

$$-Q\left[(\gamma_Q - 1)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\theta}\mathbf{u}\nabla\theta\right]. \tag{18}$$

Отметим, что $\frac{1}{\theta}\Xi_{NS,0}$ – это производство энтропии для уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа при $Q = 0$.

Неравенство (15) следует из того, что $D_{ij}D_{ij} \geq D_{ii}D_{ii} \geq \frac{1}{n}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2$.

2. Остальная часть доказательства посвящена анализу Ξ'. Пусть сначала $Q = 0$. Воспользовавшись формулой (9) и подставив $\nabla p = p_\rho\nabla\rho + p_\theta\nabla\theta$ и $\nabla\varepsilon = \varepsilon_\rho\nabla\rho + \varepsilon_\theta\nabla\theta$, из (18) получим

$$\Xi' = \gamma_p p(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + 2(\operatorname{div}\mathbf{u})(p_\rho\mathbf{u}\nabla\rho + p_\theta\mathbf{u}\nabla\theta) + \frac{p_\rho}{\rho}(\mathbf{u}\nabla\rho)^2 + \frac{\rho\varepsilon_\theta}{\theta}(\mathbf{u}\nabla\theta)^2; \tag{19}$$

здесь учтено, что в силу равенства Максвелла (4)

$$\left[\frac{p_\theta}{\rho} + \frac{\rho}{\theta}\left(\varepsilon_\rho - \frac{p}{\rho^2}\right)\right](\mathbf{u}\nabla\rho)\mathbf{u}\nabla\theta = 0.$$

Тем самым

$$\Xi' = Gy\cdot y, \quad \text{где} \quad G := \begin{pmatrix} \gamma_p p & p_\rho & p_\theta \\ p_\rho & \frac{p_\rho}{\rho} & 0 \\ p_\theta & 0 & \frac{\rho\varepsilon_\theta}{\theta} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \operatorname{div}\mathbf{u} \\ \mathbf{u}\nabla\rho \\ \mathbf{u}\nabla\theta \end{pmatrix}, \tag{20}$$

является квадратичной формой трех переменных.

Квадратичная форма (20) неотрицательно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры G неотрицательны [11]. В частности, независимо от предыдущего должны выполняться неравенства

$$\gamma_p p \geq 0, \quad p_\rho \geq 0, \quad \varepsilon_\theta \geq 0,$$

сравните с условиями термодинамической устойчивости (5). Заметим также, что

$$\det G = \frac{p_\rho \varepsilon_\theta}{\theta}(\gamma_p p - \rho C_s^2).$$

В силу условий (5) нетрудно видеть, что указанное условие на миноры G сводится к условию

$$\gamma_p p \geq \rho C_s^2.$$

Итак, при выполнении условий (5), последнего условия и при Q=0 производство энтропии неотрицательно (при n=1,2,3).

3. Квадратичную форму $\Xi' = Gy \cdot y$ можно несколькими способами явно представить в виде суммы квадратов. Чтобы обобщить представление из [2,3], преобразуем выражение (19) так:

$$\Xi' = \gamma_p p(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \frac{p_\rho}{\rho}\left[(\rho \operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\rho)^2 - \rho^2(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] +$$

$$+\frac{\rho}{\varepsilon_\theta \theta}\left[\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{u} + \varepsilon_\theta \mathbf{u}\nabla\theta\right)^2 - \frac{\theta^2 p_\theta^2}{\rho^2}(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\right] =$$

$$= (\gamma_p p - \rho C_s^2)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \frac{p_\rho}{\rho}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]^2 + \frac{\rho}{\theta\varepsilon_\theta}\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{u} + \varepsilon_\theta \mathbf{u}\nabla\theta\right)^2. \qquad (21)$$

Для частного случая совершенного политропного газа при $\gamma_p = \gamma$ последнее выражение принимает знакомый вид [2,3]

$$\Xi' = \frac{p}{\rho^2}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\left(\frac{p}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\varepsilon\right)^2.$$

С другой стороны, выражение (18) при Q=0 можно преобразовать иначе

$$\Xi' = (\gamma_p p - \rho C_s^2)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \frac{1}{\rho C_s^2}(\rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla p)^2 -$$

$$-\frac{1}{\rho C_s^2}(\mathbf{u}\nabla p)^2 + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\nabla\rho)\mathbf{u}\nabla p + \rho(\mathbf{u}\nabla\theta)\mathbf{u}\nabla s \qquad (22)$$

при $p_\rho > 0$. С учетом формулы (9) для ∇s и равенства Максвелла (4) имеем следующую систему уравнений для нахождения $\nabla\rho$ и $\nabla\theta$ через ∇p и $\theta\nabla s$:

$$p_\rho \nabla\rho + p_\theta \nabla\theta = \nabla p, \quad -\frac{\theta p_\theta}{\rho^2}\nabla\rho + \varepsilon_\theta \nabla\theta = \theta\nabla s. \qquad (23)$$

Ее определитель равен $\varepsilon_\theta C_s^2 > 0$. Решение системы уравнений таково:

$$\nabla\rho = \frac{1}{\varepsilon_\theta C_s^2}(\varepsilon_\theta \nabla p - \theta p_\theta \nabla s), \quad \nabla\theta = \frac{1}{\varepsilon_\theta C_s^2}\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho^2}\nabla p + \theta p_\rho \nabla s\right).$$

Отсюда с учетом равенства (7) с C_s^2 получим

$$-\frac{1}{\rho C_s^2}(\mathbf{u}\nabla p)^2 + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\nabla\rho)\mathbf{u}\nabla p + \rho(\mathbf{u}\nabla\theta)\mathbf{u}\nabla s = \frac{\rho\theta p_\rho}{\varepsilon_\theta C_s^2}(\mathbf{u}\nabla s)^2 = \frac{\rho\theta}{c_p}(\mathbf{u}\nabla s)^2.$$

Тем самым выведено представление Ξ' другого типа [9]

$$\Xi' = (\gamma_p p - \rho C_s^2)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2 + \frac{1}{\rho C_s^2}(\rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla p)^2 + \frac{\rho\theta}{c_p}(\mathbf{u}\nabla s)^2. \tag{24}$$

4. Пусть теперь $\gamma_p p = \rho C_s^2$ и $Q > 0$. Запишем выражение для Ξ' в виде

$$\Xi' = Gy \cdot y - Qb \cdot y =: J(y)$$

с вектором $b = \left(\gamma_Q - 1, 0, \frac{1}{\theta}\right)$. Поскольку матрица $G \geq 0$ вырождена, то функция J ограничена снизу на R^3 тогда и только тогда, когда $b \perp \operatorname{Ker} G$ или, эквивалентно, $b \in \operatorname{Im} G$.

Обозначим через $G^{(1)}, G^{(2)}, G^{(3)}$ последовательные столбцы матрицы G. Пусть $p_\rho > 0$. Тогда $\operatorname{rank} G = 2$, и $\operatorname{Im} G$ есть линейная оболочка, например, $G^{(2)}$ и $G^{(3)}$. Поскольку $b_2 = G_2^{(3)} = 0$, то на самом деле $b \in \operatorname{Im} G$ коллинеарен $G^{(3)}$, т.е. $b = \alpha G^{(3)}$. Если же $p_\rho = 0$, то $\operatorname{rank} G = 1$ и $\operatorname{Im} G$ есть линейная оболочка $G^{(3)}$, и снова $b = \alpha G^{(3)}$. Отсюда $\alpha = \frac{1}{\rho\varepsilon_\theta}$, и $\gamma_Q - 1$ определяется однозначно:

$$\gamma_Q - 1 = \alpha p_\theta = \frac{p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}. \tag{25}$$

Ниже считаем этот выбор сделанным.

Пусть y_* – любое решение системы уравнений

$$Gy = \frac{Q}{2}b.$$

Тогда

$$J_* = \min_{R^3} J(y) = -Gy_* \cdot y_* = -\frac{Q}{2}b \cdot y_*.$$

Поскольку $b = \alpha G^{(3)}$, то можно взять $y_* = \left(0, 0, \frac{Q\alpha}{2}\right)$ и поэтому

$$J_* = -\frac{Q^2}{4}\frac{\alpha}{\theta} = -\frac{Q^2}{4\rho\theta\varepsilon_\theta}.$$

Следовательно,

$$Q + \tau\Xi' \geq Q\left(1 - \frac{\tau Q}{4\rho\theta\varepsilon_\theta}\right).$$

Очевидно, последняя величина, а поэтому и производство энтропии (при $n = 1, 2, 3$) неотрицательны при условии

$$\frac{\tau Q}{4\rho\theta\varepsilon_\theta} \leq 1.$$

При $p_\theta > 0$ это условие можно также переписать в виде

$$\frac{\tau(\gamma_Q - 1)Q}{4\theta p_\theta} \leq 1;$$

в частном случае совершенного политропного газа оно принимает наиболее простой вид

$$\frac{\tau(\gamma - 1)Q}{4p} \leq 1.$$

5. Нетрудно обобщить представление (21) на случай $Q \geq 0$. Поскольку

$$(\gamma_Q - 1)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\theta}\mathbf{u}\nabla\theta = \frac{1}{\theta}\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\theta\right),$$

то при $\gamma_p p = \rho C_s^2$ имеем

$$\Xi' = \frac{p_\rho}{\rho}[\operatorname{div}(\rho\mathbf{u})]^2 + \frac{\rho\varepsilon_\theta}{\theta}\left(\frac{\theta p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla\theta - \frac{Q}{2\rho\varepsilon_\theta}\right)^2 - \frac{Q^2}{4\rho\theta\varepsilon_\theta}.$$

Тем самым верно представление (14).

Обобщим также представление (24) при $\gamma_p p = \rho C_s^2$ и $p_\rho > 0$. Будем искать его в виде

$$\Xi' = \frac{1}{\rho C_s^2}\left(\rho C_s^2 \operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla p - \frac{Q}{2}c\right)^2 + \frac{\rho\theta}{c_p}\left(\mathbf{u}\nabla s - \frac{Q}{2}d\right)^2 - \frac{Q^2}{4}\left(\frac{c^2}{\rho C_s^2} + \frac{\rho\theta d^2}{c_p}\right). \qquad (26)$$

Коэффициенты $c = c(\rho, \theta)$ и $d = d(\rho, \theta)$ должны удовлетворять уравнению

$$\left(\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\rho C_s^2}\mathbf{u}\nabla p\right)c + \frac{\rho\theta}{c_p}(\mathbf{u}\nabla s)d = (\gamma_Q - 1)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{1}{\theta}\mathbf{u}\nabla\theta.$$

Поэтому следует положить $c = \gamma_Q - 1$, и тогда в силу формул (23) и (7) должно выполняться уравнение

$$\frac{c}{\rho C_s^2}(p_\rho \mathbf{u}\nabla\rho + p_\theta \mathbf{u}\nabla\theta) + \frac{\rho p_\rho d}{\varepsilon_\theta C_s^2}\left(-\frac{\theta p_\theta}{\rho^2}\mathbf{u}\nabla\rho + \varepsilon_\theta \mathbf{u}\nabla\theta\right) = \frac{1}{\theta}\mathbf{u}\nabla\theta.$$

Это имеет место, если c и d удовлетворяют системе уравнений

$$c - \frac{\theta p_\theta}{\varepsilon_\theta}d = 0, \quad \frac{p_\theta}{\rho}c + \rho p_\rho d = \frac{C_s^2}{\theta}.$$

Ее определитель равен $\rho C_s^2 > 0$, см. формулу (6). Отсюда

$$c = \gamma_Q - 1 = \frac{p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}, \quad d = \frac{1}{\rho\theta}.$$

Формула (25) получена еще раз. Кроме того, имеем

$$\frac{c^2}{\rho C_s^2} + \frac{\rho\theta d^2}{c_p} = \frac{1}{\rho\theta\varepsilon_\theta}\left(\frac{\theta p_\theta^2}{\rho^2\varepsilon_\theta C_s^2} + \frac{p_\rho}{C_s^2}\right) = \frac{1}{\rho\theta\varepsilon_\theta},$$

что в итоге приводит от формулы (26) к представлению (16). Утверждение полностью доказано.

Отметим, что если в формуле (16) коэффициент $\dfrac{\tau\rho\theta}{c_p}$ переписать как $\dfrac{\tau\rho\theta p_\rho}{\varepsilon_\theta C_s^2}$, то она сохранит силу при $p_\rho \geq 0$, $C_s^2 \neq 0$.

Замечание. Поскольку

$$\partial_t p = \left(p_\rho - \frac{p_\theta\varepsilon_\rho}{\varepsilon_\theta}\right)\partial_t\rho + \frac{p_\theta}{\varepsilon_\theta}\partial_t\varepsilon,$$

то для решений уравнений Эйлера с общими уравнениями состояния и тепловым источником имеем

$$\partial_t p = -\left(p_\rho - \frac{p_\theta\varepsilon_\rho}{\varepsilon_\theta}\right)(\mathbf{u}\nabla\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{u}) - \frac{p_\theta}{\varepsilon_\theta}\left(\mathbf{u}\nabla\varepsilon + \frac{p}{\rho}\operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{Q}{\rho}\right) =$$

$$= -\mathbf{u}\nabla p - \left(\rho p_\rho + \frac{p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}\left(p - \rho^2\varepsilon_\rho\right)\right)\operatorname{div}\mathbf{u} + \frac{p_\theta}{\rho\varepsilon_\theta}Q,$$

т.е. с учетом равенства Максвелла справедливо уравнение

$$\partial_t p + \mathbf{u}\nabla p + \rho C_s^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{p_\theta}{\rho \varepsilon_\theta} Q.$$

Поэтому физический вывод КГД системы уравнений с источником тепла, изложенный в разделе 3.6 в [2] для уравнений состояния совершенного политропного газа, приводит именно к представленным выше уравнениям в случае общих уравнений состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: МАКС Пресс, 2004.
2. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007.
3. *Шеретов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009.
4. *Четверушкин Б.Н.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. – М.: Наука, 1985.
5. *Злотник А.А.* Классификация некоторых модификаций системы уравнений Эйлера // Докл. АН, 2006, т.407, №6, с.747-751.
6. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2008, т.48, №3, с.445-472.
7. *Злотник А.А.* Энергетические равенства и оценки для баротропных квазигазо- и квазигидродинамических систем уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т.50, №2, с.325-337.
8. *Elizarova T.G.* Quasi-gas dynamic equations. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2009.
9. *Злотник А.А.* Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Докл. АН, 2010, т.431, №5, с.605-609.
10. *Квасников И.А.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем. Термодинамика. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2002.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 04.12.09