

УДК 551.46

## НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА КРАЕВЫХ ВОЛН НАД ЛИНЕЙНО НАКЛОННЫМ ДНОМ

© 2005 г. В. А. Дубинина, А. А. Куркин, О. Е. Полухина

Нижегородский государственный технический университет  
603600 Нижний Новгород, ул. Минина, 24

E-mail: kurkin1@rol.ru

Поступила в редакцию 18.03.2004 г.

Изучена нелинейная динамика краевых волн над линейно наклонным дном. Исследован механизм формирования как одномодовых, так и многомодовых групп краевых волн большой амплитуды в рамках нелинейного уравнения Шредингера. Изучены начальные условия, приводящие к эффекту фокусировки. Рассмотрены два механизма фокусировки: самомодуляция в результате модуляционной неустойчивости нелинейных волновых пакетов и нелинейная пространственно-временная фокусировка в результате дисперсионного сжатия.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Краевые волны – это захваченные шельфом волновые моды, распространяющиеся вдоль береговой линии над наклонным дном и затухающие в сторону открытого моря. Возросший в настоящее время интерес к краевым волнам объясняется их определяющей ролью во многих процессах береговой динамики, таких как формирование структуры линии берега и его рельефа, процессы, связанные с морфологией дна в прибрежной зоне и др. [1, 2].

Впервые решения, соответствующие линейным краевым волнам низшей моды над прямым наклонным дном, были получены Стоксом в 1846 г., и лишь в пятидесятые годы двадцатого века существование таких волн было подтверждено данными наблюдений. Урселл [3] показал, что мода Стокса – не единственная, а существует конечное число мод краевых волн, и это число увеличивается с уменьшением наклона дна, так что в предельном случае мелкой воды число мод краевых волн становится бесконечным. Нелинейные поправки к линейному решению Стокса для краевых волн низшей моды были найдены Уиземом [4] в рамках теории мелкой воды и было показано, что эти результаты вполне согласуются с полной теорией [5, 6, 7]. В работах [6, 7] нелинейные поправки в дисперсионном соотношении для длинных краевых волн Стокса найдены уже для первых восемнадцати мод и было также показано, что знаки коэффициентов в нелинейном уравнении Шредингера, описывающем динамику слаболинейных пакетов краевых волн, соответствуют случаю модуляционной неустойчивости для волн любой моды. Знание этих нелинейных поправок позволяет исследовать поведение как одномодовых, так и многомодовых краевых волн

над линейно наклонным дном, поскольку коэффициенты межмодовых взаимодействий для них равны нулю [8], а следовательно, многомодовая краевая волна может быть представлена суперпозицией волн отдельных мод. Такой подход использовался в работах [9, 10] при исследовании механизмов образования аномально высоких линейных краевых волн.

Целью настоящей работы является исследование нелинейной динамики краевых волн (как одномодовых, так и многомодовых), распространяющихся над линейно наклонным дном.

### 2. НЕЛИНЕЙНАЯ САМОМОДУЛЯЦИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ КРАЕВЫХ ВОЛН

Рассмотрим процесс образования аномально высоких краевых волн в рамках нелинейного уравнения Шредингера:

$$iA_t + \delta A_{xx} + \alpha |A|^2 A = 0, \quad (1)$$

где

$$\delta = -\frac{\Omega_0}{8k_0^2}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}\gamma_n \Omega_0 k_0^2, \quad \Omega_0^2 = gk_0(2n+1)\beta,$$

$k_0$  – волновое число несущей,  $n$  – номер моды краевых волн,  $\gamma_n$  – коэффициент нелинейной поправки в дисперсионном соотношении для соответствующей моды краевых волн над линейно-наклонным дном:  $\omega = gk(2n+1)\beta(1 + \gamma_n a^2 k^2)$ , которое было получено авторами для первых 18 мод краевых волн в работах [6, 7].

В безразмерных переменных

$$\xi = k_0 x, \quad \tau = \Omega_0 t, \quad A' = k_0 \sqrt{\gamma_n} A \quad (2)$$

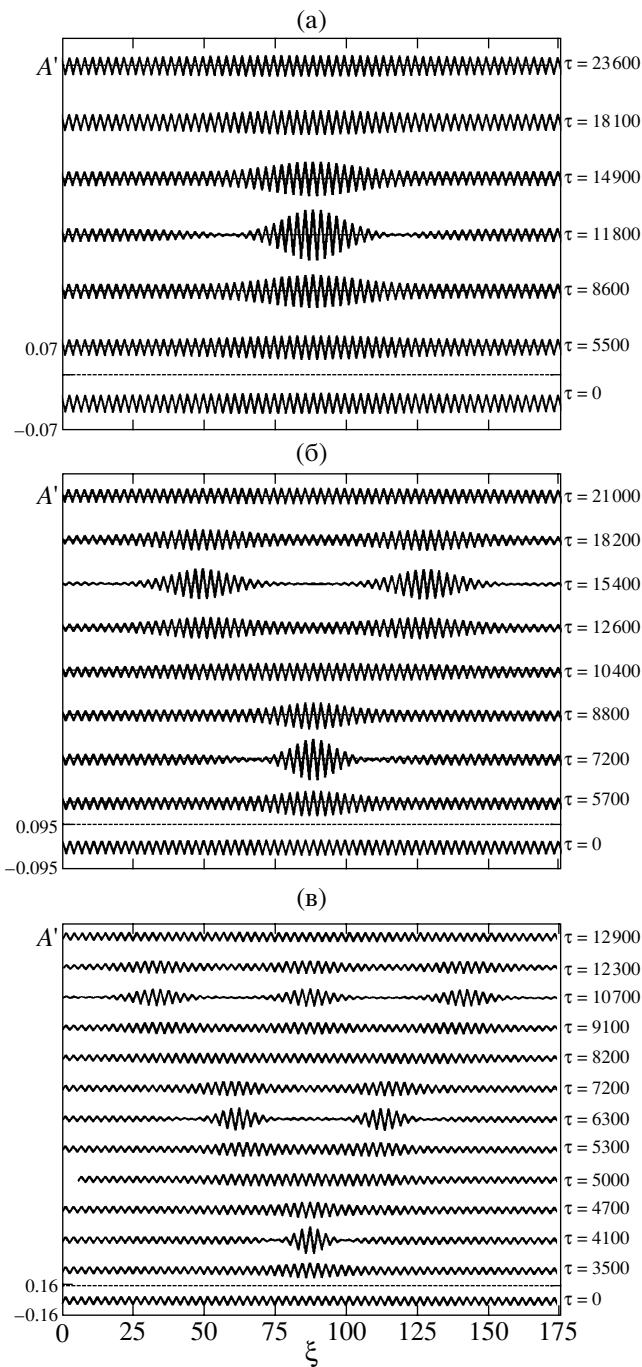


Рис. 1. Эволюция слабомодулированного волнового поля с огибающей (4): а – для  $A_0 = 0.0235$ , б – для  $A_0 = 0.0306$ , в – для  $A_0 = 0.0448$ .

уравнение (1) имеет универсальный для всех мод краевых волн вид:

$$iA'_\xi - \frac{1}{8}A'_{\xi\xi} - \frac{1}{2}|A'|^2A' = 0. \quad (3)$$

Отметим, что знаки нелинейного и дисперсионного коэффициентов в уравнении Шредингера

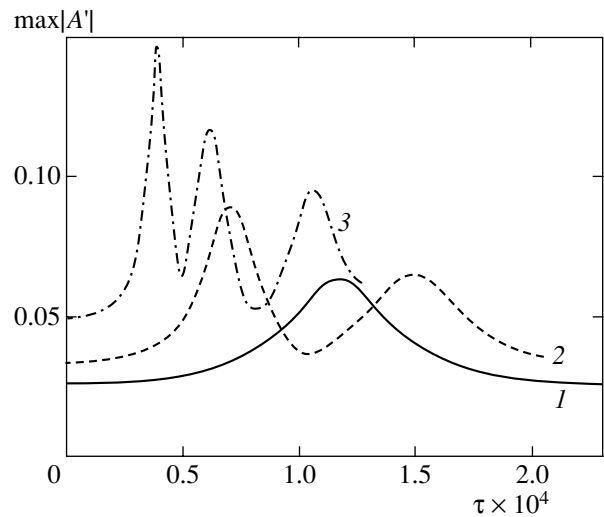


Рис. 2. Максимальная амплитуда волнового поля в зависимости от времени: кривая 1 – для случая рис. 1,а, кривая 2 – рис. 1,б, кривая 3 – рис. 1,в.

для краевых волн Стокса (1), (3) соответствуют случаю модуляционной неустойчивости волновых пакетов [11–14] и пространственно-временной фокусировки волн [15–17]. Поэтому образование аномальных краевых волн возможно в результате процесса самомодуляции волнового поля, представленного в начальный момент времени в виде слабо модулированной монохроматической волны, огибающая которой задается в виде

$$A'(\xi, \tau = 0) = A_0(1 + m \cos(K\xi + \varphi)), \quad (4)$$

где  $A_0$  – амплитуда монохроматической волны,  $m$  – коэффициент модуляции,  $\varphi$  – фазовый сдвиг, вводимый для удобства представления функции на нужном интервале по координате  $\xi$ ,  $K$  – волновое число, выбираемое из критерия неустойчивости [18] для уравнения (1) в форме (3):

$$K < K_* = \sqrt{2 \left| \frac{\alpha}{\delta} \right| A_0^2} = \sqrt{8A_0^2}. \quad (5)$$

Численное моделирование нелинейного уравнения Шредингера (3) проводилось на основе псевдо-спектрального метода [19]. Картина эволюции волны с огибающей (4) для трех значений амплитуды  $A_0$  представлена на рис. 1. Рисунок демонстрирует различные сценарии самомодуляции: при возрастании амплитуды начальной волны возможна неоднократная фокусировка поля с образованием одной, двух или трех локализованных групп волн большой амплитуды. Зависимость максимума волнового поля от времени показана на рис. 2. Видно, что временные масштабы процесса определяются амплитудой начальной волны: чем больше  $A_0$ , тем быстрее происходит фокусировка и тем она интенсивнее.

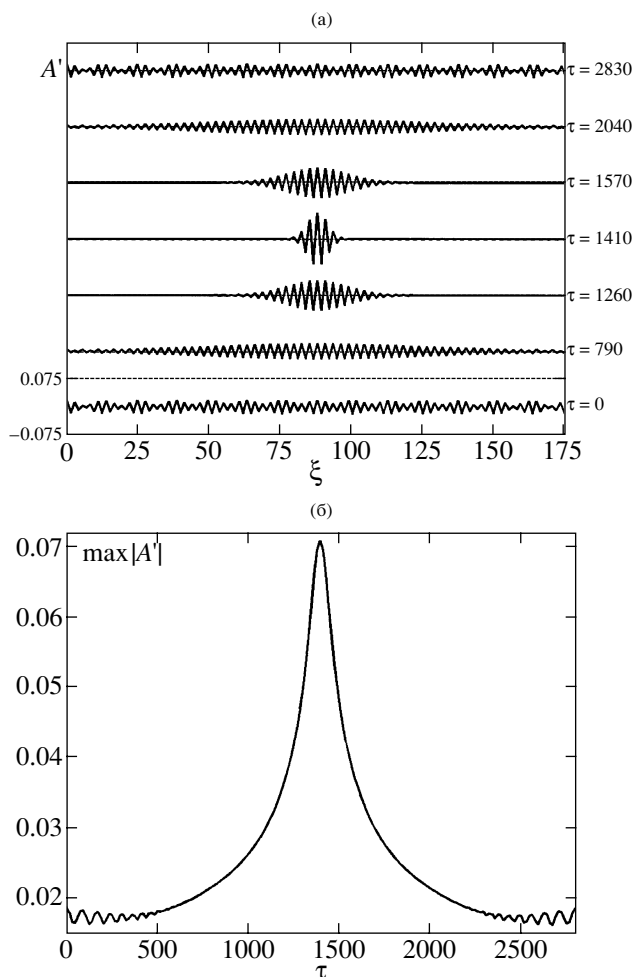


Рис. 3. а – Процесс фокусировки волнового пакета с гауссовым профилем (7) огибающей аномальной волны ( $a_0 = 0.07, d = 5$ ) в рамках уравнения (3); б – зависимость максимальной амплитуды волнового пакета от времени.

### 3. ДИСПЕРСИОННАЯ ФОКУСИРОВКА СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ВОЛН

Для поиска начальных условий, ведущих к образованию аномально высокой волны, здесь может быть применен использованный ранее в работах [15–17] подход с обращением времени. Задавая в качестве начального условия ожидаемую аномальную волну, рассмотрим процесс ее эволюции. Полученное в результате эволюции в рамках уравнения (3) волновое поле после инвариантного преобразования

$$\tau \rightarrow -\tau, \quad i \rightarrow -i \tag{6}$$

опять должно собраться в большую волну.

Чтобы изучить процесс фокусировки, нами с помощью численного эксперимента была исследована

эволюция в рамках уравнения (3) начального возмущения в форме гауссова импульса:

$$A' = a_0 \exp(-(\xi - \xi_0)^2/d^2). \tag{7}$$

Здесь  $a_0$  и  $d$  определяют амплитуду и ширину начального возмущения,  $\xi_0$  – положение центра импульса. Затем к полученному волновому полю применялось преобразование (6), и полученное возмущение использовалось в качестве начального. На рис. 3,а представлен процесс фокусировки для  $a_0 = 0.07, d = 5$ . На рис. 3,б представлена зависимость максимальной амплитуды волнового пакета от времени. Отметим, что временные масштабы процесса пространственно-временной фокусировки на порядок меньше времен само модуляции, поэтому дисперсионное сжатие имеет право на существование как самостоятельный механизм фокусировки краевых волн.

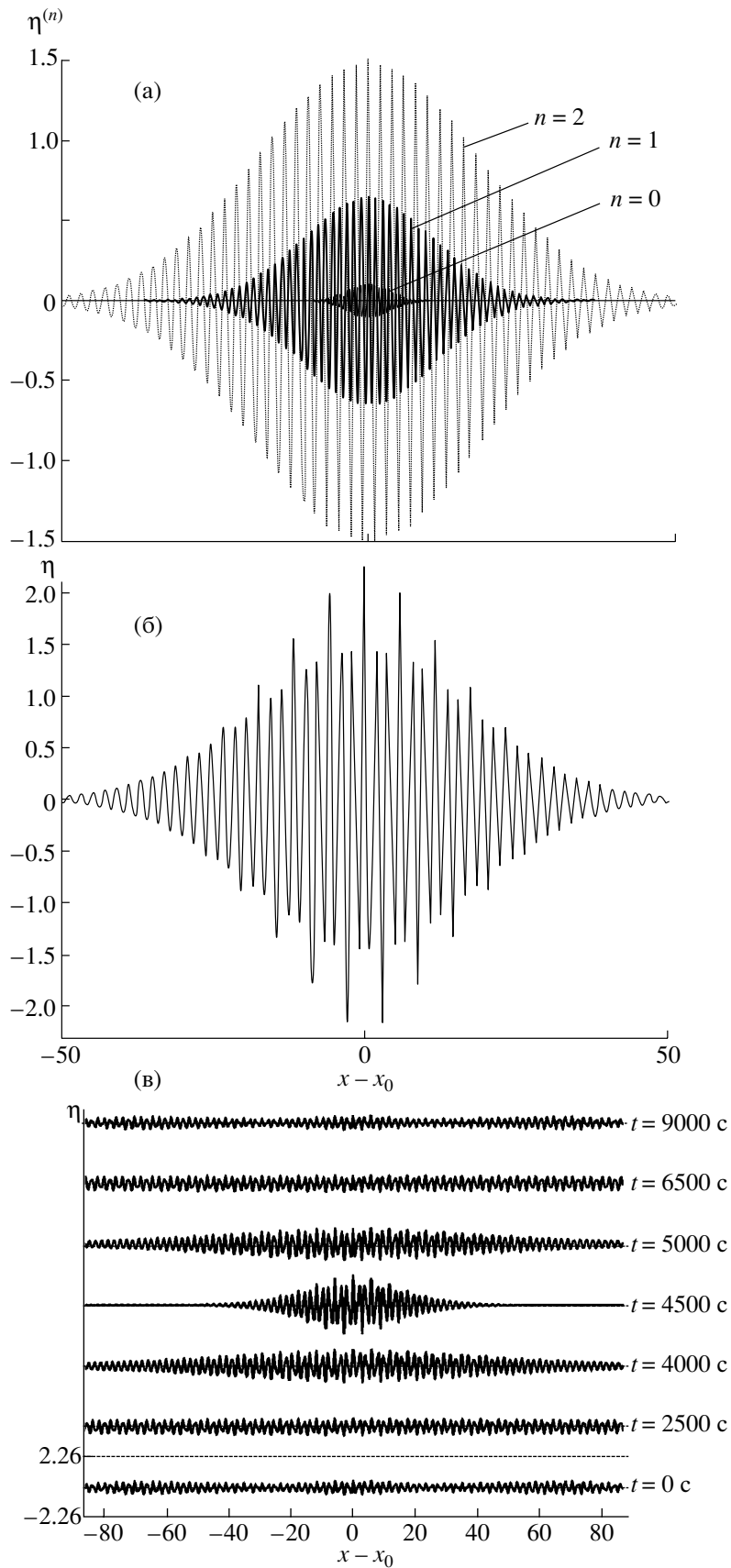
Процесс образования аномальной волны в результате дисперсионного сжатия описывается, таким образом, в рамках уравнения (3) для любой моды краевых волн. Однако в размерных переменных пространственно-временные масштабы процессов и их амплитудные характеристики будут индивидуальными для волн каждой моды. При фиксированном волновом числе  $k_0$  (или частоте  $\Omega_0$ ) с ростом номера моды  $n$  эффект фокусировки усиливается, и процесс происходит быстрее.

Результат численного моделирования, приведенный на рис. 4, демонстрирует дисперсионную фокусировку в многомодовом поле краевых волн. Здесь в качестве начального условия была использована суперпозиция физических волновых полей трех первых мод в размерных переменных:

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \sum_{n=0}^2 \eta^{(n)}(x, t) = \\ &= \sum_{n=0}^2 A^{(n)}(x, t) \exp(i(\Omega_0 t - k_0 x)), \end{aligned} \tag{8}$$

где огибающие  $A^{(n)}(x, t)$  восстановлены на основе поля (7) с параметрами  $a_0 = 0.07, d = 5$  для частоты  $\Omega_0 = 1.26 \text{ с}^{-1}$  и соответствующих этой частоте, согласно дисперсионному соотношению  $\Omega_0^2 = gk_0(2n + 1)\beta$ , волновых чисел  $k_0$  для  $n = 0, 1, 2$ . Для преобразования координат, обратного (2), требуются также значения коэффициентов  $\gamma_n$ , согласно работам [6, 7] они принимают следующие значения:  $\gamma_0 = 1/2, \gamma_1 = 19/180, \gamma_2 = 87/1600$ .

На рис. 4,а представлены волновые поля отдельных мод в момент фокусировки, на рис. 4,б – их суперпозиция, на рис. 4,в – процесс эволюции трехмодового поля краевых волн, приводящий к образованию группы волн большой амплитуды и



**Рис. 4.** Фокусировка трехмодовой краевой волны: а – волновые поля нулевой, первой и второй мод в момент фокуса; б – их сумма; в – процесс фокусировки (значения по осям отложены в метрах).

последующему ее расплыванию. Отличие от одно-модового случая здесь состоит в том, что волновой пакет, представляющий суперпозицию трех волн разных мод уже не описывается гауссовой огибающей, а содержит отдельные пики на ее фоне. Однако качественных отличий в процессах пространственно-временной фокусировки одно- и многомодовых краевых волн мы не нашли.

Таким образом, полученные результаты показывают возможность дисперсионного сжатия одно-модовых и многомодовых краевых волн в рамках нелинейного уравнения Шредингера.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследован механизм формирования одно-модовых и многомодовых групп краевых волн большой амплитуды в рамках нелинейного уравнения Шредингера. Исследованы два механизма фокусировки: самомодуляция в результате модуляционной неустойчивости нелинейных волновых пакетов и пространственно-временная фокусировка в результате дисперсионного сжатия. Эти механизмы обеспечивают возможность образования аномальных краевых волн с амплитудой в три и более раз превышающей амплитуду начального волнового поля.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (№№ 03-05-64975, 03-05-06116), INTAS (№ 01-2156, 01-0330, 03-51-4286) и научной школы член-корр. РАН Б.В. Левина НШ-2104.2003.5.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. 845 с.
2. *Рабинович А.Б.* Длинные гравитационные волны в океане: захват, резонанс, излучение. СПб.: Гидрометеиздат, 1993. 325 с.
3. *Ursell F.* Edge wave on sloping beach // Proc. Roy. Soc. London. A. 1952. P. 79–97.
4. *Whitham G.B.* Nonlinear effects in edge waves // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. P. 353–368.
5. *Minzoni A.* Nonlinear edge waves and shallow-water theory // J. Fluid Mech. 1976. V. 74. P. 369–374.
6. *Dubinina V.A., Kurkin A.A., Poloukhina O.E.* Weakly nonlinear periodic Stokes edge waves // Proceedings of International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics” (Nizhny Novgorod, Russia, September 2003). N. Novgorod: IAP RAS, 2003. P. 331–332.
7. *Дубинина В.А., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н., Полухина О.Е.* Слабонелинейные периодические краевые волны Стокса // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2004. Т. 40. № 4. С. 525–530.
8. *Kirby J.T., Putrevu U., Ozkan-Haller H.T.* Evolution equations for edge waves and shear waves on longshore uniform beaches // Proc. 26<sup>th</sup> Int. Conf. Coastal Engineering (Copenhagen. June. 1998). Copenhagen: ISOPE, 1998. P. 203–216.
9. *Kurkin A., Pelinovsky E.* Focusing of edge waves above sloping beach // Europ. J. Mech. B/Fluid. 2002. V. 21. № 5. P. 561–577.
10. *Асеев А.Ю., Козырев О.Р., Куркин А.А., Пелиновский Е.Н.* Пространственно-временная фокусировка волн Стокса // Изв. АИН РФ. инженерных наук. 2001. Т. 2. С. 3–19.
11. *Peregrine D.H.* Water waves, nonlinear Schrodinger equations and their solutions // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1983. V. 25. P. 16–43.
12. *Dysthe K.B., Trulsen K.* Note on breather type solutions of the NLS as a model for freak-waves // Physica Scripta. 1999. V. T. 82. P. 48–52.
13. *Henderson K.L., Peregrine D.H., Dold J.W.* Unsteady water wave modulations: fully nonlinear solutions and comparison with the nonlinear Schrodinger equation // Wave Motion. 1999. V. 29. P. 341–361.
14. *Osborne A., Onorato M., Serio M.* The nonlinear dynamics of rogue waves and holes in deep-water gravity wave train // Phys. Letters. 2000. V. A275. P. 386–393.
15. *Пелиновский Е., Хариф К.* Дисперсионное сжатие волновых пакетов как механизм возникновения аномально высоких волн на поверхности океана // Изв. АИН РФ. 2000. Т. 1. P. 50–61.
16. *Pelinovsky E., Talipova T., Kharif C.* Nonlinear dispersive mechanism of the freak wave formation in shallow water // Physica D. 2000. V. 147. P. 83–94.
17. *Kharif C., Pelinovsky E., Talipova T., Slunyaev A.* Focusing of nonlinear wave group in deep water // JETP Letters. 2001. V. 73. № 4. P. 190–195.
18. *Островский Л.А., Пономов А.И.* Введение в теорию модулированных волн. М.: Физматлит, 2003. 400 с.
19. *Fornberg B.* A practical guide to pseudospectral methods. Cambridge: Cambridge University Press. 1998. 231 p.