ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 57 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
2012



**_БЕЖАЕВА З. И._***, **_ОСЕЛЕДЕЦ В. И._****

# ЭНТРОПИЯ МЕРЫ ЭРДЁША ДЛЯ ПСЕВДОЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ[1)]

Пусть $1 < \beta < 2$ — псевдозолотое сечение порядка $m$:

$$\beta^m = \beta^{m-1} + \dots + \beta + 1.$$

В работе получена формула для энтропии инвариантной меры Эрдёша, отвечающей $\beta$ и произвольному параметру Бернулли $p$. Эта формула позволяет производить вычисление энтропии и хаусдорфовой размерности меры Эрдёша с высокой точностью.

Ранее аналогичная формула для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша была получена Дж. Александером и Д. Цагиром для $p = 1/2$, $m = 2$, а также П. Грабнером, П. Киршенхофером и Р. Тиши для $p = 1/2$, $m \geq 3$.

*Ключевые слова и фразы*: мера Эрдёша, инвариантная мера Эрдёша, псевдозолотое сечение, производное отображение, энтропия, хаусдорфова размерность меры.

**1. Введение.** Более семидесяти лет назад Эрдёш поставил задачу изучения функции распределения $F(x)$ случайной величины

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \zeta_k,$$

где $0 < \rho < 1, \zeta_1, \zeta_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения 0, 1, и $\mathbf{P}(\zeta_i = 0) = 1/2$.

Задаче Эрдёша было посвящено много статей. В [2] авторы дали определения меры Эрдёша на единичном интервале $[0,1)$ и на компакте Фибоначчи, а также инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи для случая $\rho = (\sqrt{5}-1)/2$ (обратного к $\beta$, где $\beta$ — золотое сечение). Для этого случая авторы доказали, что мера Эрдёша эквивалентна инвариантной мере Эрдёша на компакте Фибоначчи.

А. М. Вершик поставил задачу об эргодических свойствах инвариантной меры Эрдёша на компакте Фибоначчи. Эта задача была решена в [2].

Здесь мы рассмотрим случай $0 < \mathbf{P}(\zeta_i = 0) = q < 1$, $\mathbf{P}(\zeta_i = 1) = p$, а $\rho$ — положительный корень уравнения $\sum_{k=1}^m \rho^k = 1$ ($\beta = 1/\rho$ — псевдозолотое сечение порядка $m$). Мы будем называть распределение случайной величины $\zeta$ мерой Эрдёша на вещественной прямой.

Пусть $X$ обозначает множество допустимых слов, т.е. таких бесконечных слов с алфавитом $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$, в которых любая пара соседних букв имеет вид или $0i$, где $0 \leqslant i \leqslant m-1$, или $i(i-1)$, где $1 \leqslant i \leqslant m-1$. Множество допустимых слов $X$ с метрикой $d(x,y) = \rho^{n(x,y)}$, где $n(x,y)$ — длина наибольшего общего префикса слов $x$ и $y$, образует компакт.

---

*Московский государственный институт электроники и математики, Трехсвятительский пер., 3, 109028 Москва, Россия; e-mail: bejaeva@gmail.com

**Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, Ленинские горы, 119991 Москва, Россия; e-mail: oseled@mech.math.msu.su

[1)] Работа второго автора поддержана РФФИ грант № 07-01-92215.

В настоящей работе мы определим инвариантную меру Эрдёша на компакте $X$ и получим формулу для энтропии инвариантной меры Эрдёша. При этом будет использоваться тот факт, что инвариантная мера Эрдёша является софической мерой (см. [1]).

Отношение энтропии инвариантной меры Эрдёша и $\ln(\beta)$ есть хаусдорфова размерность инвариантной меры Эрдёша. Эта размерность также равна хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на вещественной прямой.

Для $q = 1/2$ наша формула для хаусдорфовой размерности меры Эрдёша на вещественной прямой совпадает с формулой из [8] (см. также статью [5]). Для этого случая наше доказательство является новым.

Прямое вычисление хаусдофовой размерности по нашей формуле невозможно, так как ряд для хаусдорфовой размерности сходится слишком медленно для эффективного вычисления.

В наших вычислениях мы использовали ускорение сходимости ряда в формуле для хаусдорфовой размерности. Это ускорение аналогично ускорению из статьи [3]. Заметим, что наши вычисления есть вычисления показателя Ляпунова некоторой последовательности матриц (см. [4]).

**2. Инвариантная мера Эрдёша на компакте $X$.** Пусть $V$ — отображение интервала $[0, 1)$ в $[0, 1)$:
$$V\colon x \to \{\beta x\},$$
где $\{\cdot\}$ — дробная часть числа.

Инвариантной мерой Эрдёша на единичном интервале $[0, 1)$ называется мера, инвариантная относительно преобразования $V$ и эквивалентная ограничению меры Эрдёша на отрезок $[0, 1)$.

Существует единственная инвариантная мера Эрдёша на интервале $[0, 1)$. Это утверждение нетрудно получить, следуя работе [1].

Рассмотрим разбиение единичного интервала $[0, 1)$ на интервалы
$$\Delta_0 = [0, \rho), \quad \Delta_1 = [\rho, \rho + \rho^2), \quad \ldots, \quad \Delta_{m-1} = [\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m-1}, 1).$$
Это разбиение является марковским разбиением для отображения $V$ единичного интервала $[0, 1)$, а именно
$$V\Delta_0 = \Delta_0 + \Delta_1 + \cdots + \Delta_{m-1}, \qquad V\Delta_j = \Delta_{j-1}, \quad 0 < j \leqslant m - 1.$$

Компакт всех допустимых слов $X$ с алфавитом $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ возникает следующим образом. Точке $x \in [0, 1)$ ставится в соответствие слово $x_1x_2\ldots$, где $x_n(x) = j$, если $V^{n-1}x \in \Delta_j$. При этом отображение $V$ переходит в сдвиг на $X$, а инвариантная мера Эрдёша на отрезке $[0, 1)$ переходит в инвариантную меру на компакте $X$. Инвариантная мера Эрдёша на компакте $X$ — софическая (скрытая марковская) мера, допускающая удобное описание (см. [1]).

Аналогично [1] доказывается, что для $x \in [0, 1)$ мера Эрдёша $dF(x)$ на прямой удовлетворяет уравнению
$$d\overline{F}(x) = M(x_1)\, d\overline{F}(Vx),$$
где
$$d\overline{F}(x) = (dF(x), dF(x + \rho), dF(x + \rho + \rho^2), \ldots, dF(x + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{m-1}), dF(x + 1))^\top,$$
а $M(0) = M_0$, $M(j) = M_1$, $j \geqslant 1$.

Ненулевые элементы матрицы
$$M_0 = (M_0(i, j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant m + 1)$$
определяются следующим образом:
$$M_0(1, 1) = q, \quad M_0(2, 1) = p, \quad M_0(2, m + 1) = q, \quad M_0(i, i - 1) = p, \qquad 3 \leqslant i \leqslant m + 1.$$

Ненулевые элементы матрицы
$$M_1 = (M_1(i, j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant m + 1)$$

определяются следующим образом:

$$M_1(1,1) = p, \quad M_1(1, m+1) = q, \quad M_1(2, m+1) = p.$$

Определим блочную матрицу $M = (M(i,j), 0 \leqslant i, j \leqslant m-1)$, где

$$M(0,0) = M(1,0) = M_0, \qquad M(0,i) = M_1, \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

$$M(i, i-1) = M_1, \qquad 2 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Все остальные блоки матрицы $M$ — нулевые.

Спектральный радиус матрицы $M$ равен 1. Пусть $l = (l(0), \dots, l(m-1))$ и $r = (r(0), \dots, r(m-1))$ — соответственно левый и правый собственные векторы этой матрицы с собственным значением 1. Здесь $l(i)$ и $r(i)$ — блоки с номером $i$ блочной строки $l$ и блочного столбца $r$.

Инвариантная мера Эрдёша на компакте $X$ (аналогично [1]) задается формулой:

$$\mu(\{x\colon x_1 x_2 \dots x_n = a_1 a_2 \dots a_n\}) = \frac{l(a_1) M(a_1 a_2) \cdots M(a_{n-1}, a_n) r(a_n)}{lr}.$$

Наша цель — вычислить энтропию меры $\mu$.

**3. Переход от марковского компакта $X$ к «бернулиевскому» компакту $Y$.** Пусть $X_0 = \{x \in X\colon x_1 = 0\}$. Слово $x \in X_0$ разбивается на перекрывающиеся блоки 00, $0i(i-1)\dots 10$ (последняя буква блока есть начальная буква следующего блока). Введем функцию возвращения

$$\Phi_0(x) = \min\{n\colon T^n x \in X_0\}.$$

Производное отображение $T'$ на $X_0$ имеет вид

$$T'x = T^{\Phi_0(x)} x, \qquad x \in X_0.$$

Рассмотрим на $X_0$ следующее кодирование: поставим в соответствии блоку 00 число 0, блоку $0i(i-1)\dots 10$ число $i$. При этом кодировании слово $x \in X_0$ переходит в слово $y = y_1 y_2 \dots$ в алфавите $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

При нашем кодировании производное отображение $T'$ переходит в сдвиг $S$ на множестве $Y$ слов $y = y_1, y_2, \dots$ в алфавите $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Условная мера на множестве $X_0$, порожденная мерой $\mu$, переходит в $S$-инвариантную меру $\mu_0$.

Теперь получим формулу для меры $\mu_0$. Введем матрицы

$$t(0) = M(0,0), \qquad t(i) = M(0,i) M(i, i-1) \cdots M(1,0), \quad 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

$$t = \sum_{i=0}^{m-1} t(i).$$

Определим строку $l_t = (l_t(1), \dots, l_t(m+1))$,

$$l_t(1) = p^{m-1} q, \qquad l_t(i) = p^{m+1-i}, \quad 2 \leqslant i \leqslant m+1.$$

Строка $l_t$ — левый собственный вектор матрицы $t$ с собственным значением 1.

Определим столбец $r_t = (r_t(1), \dots, r_t(m+1))^\top$,

$$r_t(1) = 1 - p^m - p^{m-1} q, \qquad r_t(i) = p^{i-1}, \quad 2 \leqslant i \leqslant m+1.$$

Столбец $r_t$ — правый собственный вектор матрицы $t$ с собственным значением 1.

Нетрудно доказать, что мера $\mu_0$ на компакте $Y$ задается формулой

$$\mu_0(\{y\colon y_1 y_2 \dots y_n = a_1 a_2 \dots a_n\}) = \frac{l_t t(a_1) t(a_2) \cdots t(a_n) r_t}{l_t r_t}.$$

Тогда

$$m_0 = \int_Y \Phi_0(y)\, d\mu_0(y) = \frac{p - p^m + q p^{2m}}{q(p + q p^{2m} + p^m(mp - p - 1))}.$$

Из всего предыдущего (см. [6]) следует, что

$$h(\mu) = \frac{h(\mu_0)}{m_0}.$$

**4. Кодирование на компакте $Y$.** Теперь мы рассмотрим следующее кодирование на множестве $Y$: слово разбивается на блоки $0^m$, $0^k i$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $1 \leqslant i \leqslant m-1$ $(0^0 = \varnothing)$ и мы ставим в соответствие блоку $0^m$ пару $(m, 0)$, блоку $0^k i$ пару $(k, i)$. Тогда слово $y$ переходит в в бесконечное слово $z = z_1 z_2 \ldots$ в алфавите $C = \{(m,0), (k,i),\ 0 \leqslant k \leqslant m-1,\ 1 \leqslant i \leqslant m-1\}$.

Определим отображение $T_1$ на множестве $Y$ формулой

$$T_1 y = \begin{cases} T^m y, & y = 0^m \ldots, \\ T^{k+1} y, & y = 0^k i \ldots . \end{cases}$$

При нашем кодировании это отображение переходит в сдвиг $S_1$ на множестве $Z$ слов в алфавите $C$. Мера $\mu_0$ на множестве $Y$ переходит в $S_1$-инвариантную меру $\mu_1$. Нетрудно доказать, что

$$\mu_1(\{z\colon z_1 z_2 \ldots z_n = a_1 a_2 \ldots a_n\}) = \frac{l_s s(a_1) s(a_2) \cdots s(a_n) r_s}{l_s r_s},$$

где $s(c) = t(0)^m$, $c = (m, 0)$,

$$s(c) = t(0)^k t(i), \qquad c = (k,i), \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1, 1 \leqslant i \leqslant m-1,$$

$l_s, r_s$ — левый и правый собственные векторы матрицы $s = \sum_{c \in C} s(c)$ с собственным значением 1. При этом

$$r_s = (1 - p^{m-1}, p, p^2, \ldots, p^m),$$

а вектор $l_s$ длины $m+1$ имеет лишь две ненулевые координаты — первую и предпоследнюю:

$$l_s = \left( \frac{1-p^m}{1-q^m}, 0, \ldots, 0, 1, 0 \right).$$

Из вида вектора $l_s$ следует, что мера $\mu_1$ на множестве $Z$ задается формулой

$$\mu_1(\{z\colon z_1 z_2 \ldots z_n = a_1 a_2 \ldots a_n\}) = \frac{l_w w(a_1) \cdots w(a_n) r_w}{l_w r_w}.$$

В этой формуле матрицы $w(c)$ получаются вычеркиванием всех стобцов и всех строк матрицы $s(c)$ кроме первых и предпоследних, т.е.

$$w(c) = \begin{pmatrix} s(c)(1,1) & s(c)(1,m) \\ s(c)(m,1) & s(c)(m,m) \end{pmatrix}.$$

Матрицы $w(c)$ имеют вид

$$w(m,0) = \begin{pmatrix} q^m & 0 \\ p^{m-1} q & p^{m-1} q \end{pmatrix}, \quad w(m-1,1) = \begin{pmatrix} pq^{m-1} & pq^{m-1} \\ 0 & p^m \end{pmatrix},$$
$$w(m,i) = \begin{pmatrix} p^i q^m & p^i q^m \\ p^{i+m-1} q & p^{i+m-1} q \end{pmatrix}.$$

При остальных значениях $c = (k, i)$

$$w(k,i) = \begin{pmatrix} p^i q^{k+1} & p^i q^{k+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $w = \sum_{c \in C} w(c)$:

$$w = \begin{pmatrix} q^m + (1 - p^{m-1})(1 - q^m) & (1 - p^{m-1})(1 - q^m) \\ p^{m-1}(1 - p^m) & p^m + p^{m-1}(1 - p^m) \end{pmatrix}.$$

Строка $l_w$ и столбец $r_w$ задаются формулами

$$l_w = (1-p^m, 1-q^m), \quad r_w = (1-p^{m-1}, p^{m-1}).$$

Строка $l_w$ — левый собственный вектор матрицы $w$ с собственным значением 1. Столбец $r_w$ — правый собственный вектор матрицы $w$ с собственным значением 1.

Пусть

$$\Phi_1(z) = \begin{cases} m, & z_1(z) = (m,0), \\ k+1, & z_1(z) = (k,i). \end{cases}$$

Тогда средняя длина кода равна

$$m_1 = \int_Z \Phi_1(z)\, d\mu_1(z) = \frac{(1-q^m)(p+qp^{2m} - p^m(1+p-mp))}{p(p+p^{2m} - p^{m+1} - (pq)^m)}.$$

Справедливо следующее равенство (см. [7]):

$$h(\mu_0) = \frac{h(\mu_1)}{m_1}.$$

**5. Мера $\mu_1$ и процесс регенерации.** Среди матриц $w(c)$ лишь матрицы $w(m,0)$, $w(m-1,1)$ — имеют ранг 2, а все остальные вырождены и могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} w(m-1,i) &= u(m-1,i)v, \qquad i \neq 1, \\ w(k,i) &= u(k,i)v, \qquad (k,i) \neq (m,0), (m-1,1). \end{aligned}$$

В этих формулах

$$\begin{gathered} v = (1,1), \quad u(m-1,i) = (p^i q^m, p^{i+m-1} q)^\top, \\ u(k,i) = (p^i q^{k+1}, 0)^\top, \qquad (k,i) \neq (m-1,1). \end{gathered}$$

Определим множество $C_2 = \{c \in C \colon c \neq (m,0), c \neq (m-1,1)\}$ и множество $Z_2 = \{z \in Z \colon z_1 \in C_2\}$. Мера $\mu_1$ на множестве $Z_2$ порождает условную меру $\mu_1'$.

Введем обозначения $W(0) = w(m,0)$ и $W(1) = w(m-1,1)$. Для любого слова $a = a_1 a_2 \dots a_n$ с алфавитом из нулей $(m,0)$ и единиц $(m-1,1)$ обозначим

$$W(a) = W(a_1)W(a_2)\dots W(a_n), \quad W(\varnothing) = \mathrm{Id}.$$

Введем

$$\begin{aligned} p(a,m-1,i) &= vW(a)u(m-1,i), \qquad i \neq 1, \\ p(a,k,i) &= vW(a)u(k,i), \qquad (k,i) \neq (m,0), (m-1,1). \end{aligned}$$

Слово $z \in Z$ назовем назовем $C_2$-регулярным, если в этом слове любая буква $c \in C_2$ встречается бесконечное число раз. $C_2$-регулярное слово $z \in Z_2$ разбивается на блоки $c_{j-1}(z)A_j(z)$, $j \in \mathbf{N}$, $c_j \in C_2$, где $A_j(z)$ — двоичное слово. Любое слово $z \in Z_2$ начинается с первого блока $c_0 A_1(z)$, следующий блок — это $c_1(z)A_2(z)$ и так далее.

Вычислим распределение случайного слова $A_1(z)c_1(z)$ при условии, что $z_1(z) = c_0$, $c_0 \in C_2$.

Из определения меры $\mu_1$ вытекает, что

$$\begin{aligned} &\mu_1(\{z \in Z \colon z_1(z) = c_0\})\mu_1(\{z \in Z_2 \colon A_1(z)c_1(z) = ac\} \mid \{z \colon z_1(z) = c_0\}) \\ &= \frac{l_w u(c_0) v W(a) u(c) v r_w}{l_w r_w} = p(a,c)\frac{(l_w u(c_0))(v r_w)}{l_w r_w} \\ &= p(a,c)\mu_1(\{z \in Z \colon z_1(z) = c_0\}). \end{aligned}$$

Следовательно, при любых $c_0 \in C_2$

$$p(a,c) = \mu_1(\{z \in Z_2 \colon A_1(z)c_1(z) = ac\} \mid \{z \in Z \colon z_1(z) = c_0\})$$

есть распределение случайного слова $A_1(z)c_1(z)$ на множестве $\{z \in Z_2\}$ с условной мерой $\mu_1'$.

В частности, мы получаем равенство $\sum_{a,c} p(a,c) = 1$.

Аналогично вычисляется совместное распределение случайных слов $A_1(z)c_1(z)$, $\ldots, A_n(z)c_n(z)$ на множестве $Z_2$ с условной мерой $\mu_1'$:

$$\begin{aligned}
&\mu_1(\{z \in Z_2(C_0)\colon A_1(z)c_1(z) = a_1c_1, \ldots, A_n(z)c_n(z) = a_nc_n\}) \\
&\quad = l_w u(c_0) vW(a_1)u(c_1)vW(a_2)u(c_2)v \cdots u(c_{n-1})vW(a_n)u(c_n)vr_w \\
&\quad = p(a_1,c_1)\cdots p(a_n,c_n)\mu_1(\{z \in Z\colon z_1(z) = c_0\}).
\end{aligned}$$

Таким образом, одинаково распределенные случайные слова $A_j(z)c_j(z)$ независимы относительно условной меры $\mu_1'$ на $Z_2$.

Рассмотрим функцию возвращения $\Phi_2(z) = \min\{n \geqslant 1\colon S^n z \in Z_2\}$ на множестве $Z_2$. Она имеет вид $\Phi_2(z) = |A_1(z)| + 1$, где $|A_1(z)|$ — длина двоичного слова $A_1(z)$. Имеем

$$m_2 = \int_{Z_2} \Phi_2(z)\, d\mu_1'(z) = \frac{p + p^{2m} - p^{m+1} - (qp)^m}{q^{m-1}p^m + p(1-q^{m-1}) - p^m(1+q^m p)}.$$

Производное отображение $S_1'$ на множестве $Z_2$ имеет вид $S_1'z = S_1^{\Phi_2(z)}z$. По формуле Абрамова (см. [6])

$$h(\mu_1) = \frac{h(p(\cdot,\cdot))}{m_2}.$$

**6. Вычисление энтропии распределения** $p(\cdot,\cdot)$**.** Энтропия $h(p(\cdot,\cdot))$ распределения $p(\cdot,\cdot)$ равна

$$h(p(\cdot,\cdot)) = -\sum_{a,c} p(a,c)\log_2(p(a,c)).$$

Пусть $\alpha = p/q$. Введем матрицы $\widetilde{W}(0)$ и $\widetilde{W}(1)$:

$$\widetilde{W}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha^{m-1} & \alpha^{m-1} \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}(1) = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha^m \end{pmatrix}, \quad \widetilde{W}(\emptyset) = \mathrm{Id}.$$

Кроме того, положим $\widetilde{u}_1 = (1, \alpha^{m-1})^\top$, $\widetilde{u}_2 = (1,0)^\top$. Тогда

$$W(0) = q^m\widetilde{W}(0), \quad W(1) = q^m\widetilde{W}(1),$$

$$u(m-1,i) = p^i q^m \widetilde{u}_1, \quad u(k,i) = p^i q^{k+1}\widetilde{u}_2.$$

Определим для двоичного слова $a = a_1\cdots a_n$

$$\widetilde{W}(a) = \widetilde{W}(a_1)\cdots\widetilde{W}(a_n)$$

$$\widetilde{p}(a,m-1,i) = v\widetilde{W}(a)\widetilde{u}_1, \quad \widetilde{p}(a,k,i) = v\widetilde{W}(a)\widetilde{u}_2.$$

Имеем

$$p(a,m-1,i) = q^m p^i \widetilde{p}(m-1,i)q^{mn}, \quad p(a,k,i) = q^{k+1}p^i\widetilde{p}(k,i)q^{mn}.$$

Следовательно,

$$p(a,c) = q^{f(c)}p^{g(c)}\widetilde{p}(a,c)q^{mn},$$

где $f(m-1,i) = m$, $f(k,i) = k+1$, $g(c) = i$, $c \in C_2$.

Введем обозначения $\widetilde{p}_1(a) = v\widetilde{W}(a)\widetilde{u}_1$, $\widetilde{p}_2(a) = v\widetilde{W}(a)\widetilde{u}_2$ и перейдем к вычислению энтропии распределения $p(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{aligned}
h(p(\cdot,\cdot)) &= -\sum_{a,c} p(a,c)\log_2(p(a,c)) = -\left(\sum_{a,c}(mn + f(c))p(a,c)\right)\log_2(q) \\
&\quad - \left(\sum_{a,c} g(c)p(a,c)\right)\log_2(p) - \sum_{a,c} q^{f(c)}p^{g(c)}\widetilde{p}(a,c)\log_2(\widetilde{p}(a,c))q^{mn} \\
&= -\tau_{01}\log_2(q) - \tau_{02}\log_2(\alpha) - \tau_1\Sigma_1 - \tau_2\Sigma_2.
\end{aligned}$$

В этих формулах

$$
\begin{aligned}
\tau_{01} &= \sum_{a,c}(mn+f(c)+g(c))p(a,c) = \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1}q)(1-q^m)}{p^mq^m+p(q-q^m)-p^mq(1+pq^m)},\\
\tau_{02} &= \sum_{a,c} g(c)p(a,c) = \frac{mp^mq(1-q^m)+p(1-p^m)(1-2q^m+q^{m+1})}{(p-p^m)q+q^m(-p+p^m(p^2+pq+q^2))},\\
\tau_1 &= \sum_{c\colon \tilde u(c)=\tilde u_1} q^{f(c)}p^{g(c)} = q^{m-1}(p-p^m),\\
\tau_2 &= \sum_{c\colon \tilde u(c)=\tilde u_2} q^{f(c)}p^{g(c)} = q^{m-2}(p^2-p^m)+(1-q^{m-2})(1-p^{m-1})
\end{aligned}
$$

и

$$\Sigma_1 = \sum_a \widetilde p_1(a)\log_2(\widetilde{p_1}(a))q^{mn}, \quad \Sigma_2 = \sum_a \widetilde p_2(a)\log_2(\widetilde p_2(a))q^{mn}.$$

**7. Связь между суммами $\Sigma_1$ и $\Sigma_2$.** Покажем теперь, что $\Sigma_2$ вычисляется через $\Sigma_1$. Пусть $D_n$ — множество всех двоичных слов длины $n$. Обозначим

$$k_n^{(1)} = \sum_{a\in D_n}\widetilde p_1(a)\log_2(\widetilde p_1(a)), \quad k_n^{(2)} = \sum_{a\in D_n}\widetilde p_2(a)\log_2(\widetilde p_2(a))$$

Тогда

$$\Sigma_1 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)}(q^m)^n, \quad \Sigma_2 = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)}(q^m)^n.$$

Положим $k^{(i)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)}x^n$, $i=1,2$. Имеем

$$
\begin{aligned}
k_{n+1}^{(2)} &= \sum_{a\in D_n}\Big(v\widetilde W(a)\widetilde W(0)\widetilde u_2\log_2\Big(v\widetilde W(a)\widetilde W(0)\widetilde u_2\Big)\\
&\qquad + v\widetilde W(a)\widetilde W(1)\widetilde u_2\log_2\Big(v\widetilde W(a)\widetilde W(1)\widetilde u_2\Big)\Big)\\
&= k_n^{(1)}+\alpha k_n^{(2)}+\alpha\log_2(\alpha)\sum_{a\in D_n}\widetilde p_2(a).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$k^{(2)}(x) = xk^{(1)}(x)+\alpha xk^{(2)}(x)+x\alpha\log_2(\alpha)\sum_{n=0}^{\infty} v(\widetilde W(0)+\widetilde W(1))^n\widetilde{u_2}x^n,$$

или

$$
\begin{aligned}
k^{(2)}(x) &= xk^{(1)}(x)+\alpha xk^{(2)}(x)+x\alpha\log_2(\alpha)v\Big(\mathrm{Id}-x(\widetilde W(0)+\widetilde W(1)\Big)^{-1}\widetilde u_2\\
&= xk^{(1)}(x)+\alpha xk^{(2)}(x)\\
&\quad + x\alpha\log_2(\alpha)\,\frac{1-\alpha^m x}{1-(1+\alpha^{m-1}+\alpha^m)x+(\alpha^{m-1}+\alpha^m+\alpha^{m+1})x^2}.
\end{aligned}
$$

Отсюда вытекает равенство

$$
\begin{aligned}
k^{(2)}(x) &= \frac{xk^{(1)}(x)}{1-\alpha x}\\
&\quad + \frac{x(1-\alpha^m x)}{(1-\alpha x)(1-(1+\alpha^{m-1}+\alpha^m)x+(\alpha^{m-1}+\alpha^m+\alpha^{m+1})x^2)}\,\alpha\log_2(\alpha).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$\Sigma_2 = \frac{q^m}{1-pq^{m-1}}\Sigma_1$$
$$+\frac{q^m - p^m q^m}{(1-pq^{m-1})(1-(q^m+p^{m-1}q+p^m)+(p^{m-1}q^{m+1}+p^m q^m+p^{m+1}q^{m-1}))}\,\alpha\log_2(\alpha).$$

Если $q = 1/2$, то

$$\Sigma_2 = \frac{\Sigma_1}{2^m-1}.$$

**8. Формула для вычисления энтропии.** Из предыдущих пунктов 3–5 следует, что энтропия инвариантной меры Эрдёша $\mu$ равна

$$h(\mu) = \frac{h(p(\cdot,\cdot))}{m_0 m_1 m_2},$$

где

$$h(p(\cdot,\cdot)) = -\sum_{a,c} p(a,c)\log_2(p(a,c)).$$

Имеем

$$\mathrm{mean} = m_0 m_1 m_2 = \frac{(1-p^m)(1-p^{m-1}q)(1-q^m)}{(pq)^m + p(q-q^m) - p^m q(1+pq^m)}.$$

Заметим, что $\mathrm{mean} = \tau_{01}$.

Энтропия $h(\mu)$ инвариантной меры Эрдёша равна

$$h(\mu) \;=\; \log_2(1+\alpha) - \frac{\tau_{02}}{\mathrm{mean}}\,\log_2(\alpha) - \frac{\tau_1}{\mathrm{mean}}\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)}(1+\alpha)^{-mn}$$
$$-\frac{\tau_2}{\mathrm{mean}}\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(2)}(1+\alpha)^{-mn}.$$

Если $q = 1/2$, то

$$h(\mu) = 1 - \frac{(1-3q^m)^2}{(1-q^m)^2}\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)} q^{mn+m+1}.$$

Заметим, что формула для энтропии инвариантной меры Эрдёша в этом случае совпадает с формулой из [8] для энтропии Гарсиа меры Эрдёша на прямой.

При $q = 1/2$, $m = 2$

$$h(\mu) = 1 - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(1)}\frac{1}{2^{2n+3}}$$

и $h(\mu)/\log_2(\beta)$ совпадает с формулой для энтропии Гарсиа меры Эрдёша на прямой из [3].

Главная трудность при вычислении энтропии связана с тем, что ряды $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)} q^{mn}$, $i = 1, 2$, сходятся слишком медленно для эффективных вычислений. Следуя подходу из работы [3], мы использовали некоторое переупорядочение этих рядов.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n$. Введем

$$\mu_n = k_n - \chi(\alpha)k_{n-1},$$

где $\chi(\alpha)$ — спектральный радиус матрицы $\widetilde{W}(0) + \widetilde{W}(1)$. Тогда

$$(1-\chi(\alpha)x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n.$$

Рассмотрим $\lambda_n = 2\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} + \mu_n - \chi(\alpha)\mu_{n-1}$. Ясно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n = \frac{1}{1-\chi(\alpha)x} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n,$$

$$(1-x)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n = (1-\chi(\alpha)x) \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n x^n = \frac{(1-x)^2}{(1-\chi(\alpha)x)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x^n.$$

Используя этот метод, мы сводим вычисление рядов $\sum_{n=0}^{\infty} k_n^{(i)} x^n$ к вычислению рядов $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^i x^n$, $i = 1, 2$.

Полагая теперь $x = q^m = (1/(1+\alpha))^m$, получаем

$$h(\mu) = \log_2(1+\alpha) - \frac{\tau_{02}}{\text{mean}} \log_2(\alpha) - \frac{(1-(1+\alpha)^{-m})^2}{(1-\chi(\alpha)(1+\alpha)^{-m})^2} \frac{\tau_1}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^1 (1+\alpha)^{-mn}$$
$$- \frac{(1-(1+\alpha)^{-m})^2}{(1-\chi(\alpha)(1+\alpha)^{-m})^2} \frac{\tau_2}{\text{mean}} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^2 (1+\alpha)^{-mn}.$$

Ряды в этой формуле сходятся быстрее, чем в первоначальной. Кроме того, верно следующее утверждение: энтропия $h(\mu)$ при замене $\alpha$ на $1/\alpha$ не меняется. Конечно, ряд для $\alpha > 1$ сходится быстрее. Это можно использовать для вычисления хаусдорфовой размерности.

**9. Результаты вычислений.** В следующей таблице мы даем значения хаусдорфовой размерности $H_{dim} = h(\mu)/\log_2 \beta$ инвариантной меры Эрдёша на компакте $X$.

**Таблица 1.**

| $m/p$ | 0.5 | 0.6 | 0.7 |
|---|---|---|---|
| 2 | 0.995713126685555 | 0.987545683253295 | 0.9513889802255375 |
| 3 | 0.980409319534731 | 0.966434357921336 | 0.9108593564128219 |
| 4 | 0.986926474333800 | 0.9683502130281713 | 0.8992851356244321 |
| 5 | 0.992585300274171 | 0.9705345626915498 | 0.8925226190543962 |
| 6 | 0.996032591584967 | 0.9714686613357636 | 0.8879821600041571 |
| 7 | 0.997937445507094 | 0.9716508001228732 | 0.8850865517494942 |
| 8 | 0.998944915449832 | 0.9715384117449017 | 0.8833629722353611 |
| 9 | 0.999465368055570 | 0.9713641823407837 | 0.8823911450151443 |
| 10 | 0.999730606878347 | 0.9712150449607480 | 0.8818638902510348 |
| 11 | 0.999864704467762 | 0.9711097578681561 | 0.8815853398409617 |
| 12 | 0.999932181983893 | 0.9710424848449765 | 0.8814408285137502 |
| 13 | 0.999966043207405 | 0.9710020703916106 | 0.8813667740334705 |
| 14 | 0.999983008336978 | 0.9709787856202450 | 0.8813291388332748 |
| 15 | 0.999991500519328 | 0.9709657670553508 | 0.8813101184045377 |

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бежаева З. И.*, *Оселедец В. И.* Меры Эрдёша, софические меры и марковские цепи. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2005, т. 326, с. 28–47.
2. *Sidorov N.*, *Vershik A.* Ergodic properties of the Erdös measures, the entropy of the goldenshift, and related problems. — Monatsh. Math., 1998, v. 126, № 3, p. 215–261.
3. *Alexander I. C.*, *Zagier D.* The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure. — J. London Math. Soc., 1991, v. 44, № 1, p. 121–134.

4. *Lalley S. P.* Random series in powers of algebraic number: Hausdorff dimension of the limit distribution. — J. London Math. Soc., 1998, v. 57, № 3, p. 629–654.
5. *Feng D.-J.* The limited Rademacher functions and Bernoulli convolutions associated with Pisot numbers. — Adv. Math., 2005, v. 195, № 1, p. 24–101.
6. *Абрамов Л. М.* Энтропия индуцированного автоморфизма. — Докл. АН СССР, 1959, т. 128, с. 647–650.
7. *Белинская Р. М.* Обобщенные степени автоморфизма и энтропии. — Сиб. матем. журн., 1970, т. 11, с. 739–749.
8. *Grabner P. J.*, *Kirschenhofer P.*, *Tichy R. F.* Combinatorial and arithmetical properties of linear numeration systems. — Combinatorica, 2002, v. 22, № 2, p. 245–267.

Исправленный вариант
12.VI.2011