ЖОРДАНОВОСТЬ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ

В. Л. Попов
Математический институт им. В.А.Стеклова РАН
e-mail: popovvl@mi.ras.ru

Следующее понятие было введено в [1]:

Определение 1. Группа G называется *жордановой*, если существует такое целое число $d_G > 0$, зависящее только от G, что всякая конечная подгруппа F в G содержит абелев нормальный делитель, индекс которого в F не превосходит d_G.

Неформально жордановость группы означает, что все ее конечные подгруппы "почти" абелевы в том смысле, что являются расширениями абелевых групп с помощью конечных групп, взятых из конечного списка.

В [1] были доказаны некоторые общие свойства жордановых групп и инициировано исследование следующих алгебро-геометрических проблем:

Проблема A. *У каких алгебраических многообразий X группа $\mathrm{Aut}(X)$ жорданова?*
Проблема B. *То же, но с $\mathrm{Aut}(X)$, замененной на группу $\mathrm{Bir}(X)$.*

Ниже формулируется ряд основных результатов, касающихся этих проблем; мотивировки и подробное изложение см. в [2] и [1].

Рассмотрим сначала проблему A.

Теорема 1 ([1])**.** *Группа автоморфизмов любого замкнутого (по Зарисскому) алгебраического подмногообразия в $\mathbf{A}^n \setminus \bigcup_i^n H_i$, где H_i — множество нулей i-й стандартной координатной функции на $\mathbf{A}^n$, жорданова.*

Теорема 2 ([4])**.** *Группа автоморфизмов любого полного гладкого торического алгебраического многообразия жорданова.*

Теорема 3 ([5])**.** *Аффинная группа Кремоны $\mathrm{Aut}(\mathbf{A}^n)$ жорданова для любого n.*

Теорема 4 ([1])**.** *Если для какого-либо $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантного отношения эквивалентности на неприводимом алгебраическом многообразии X найдется конечный класс эквивалентности, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ жорданова.*

Точка x алгебраического многообразия X называется его *вершиной*, если размерность касательного пространства Зарисского к X в x не меньше размерности такого пространства в любое другой его точке.

Следствие 1 ([1])**.** *Если алгебраическое многообразие X имеет только конечное число вершин, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ жорданова.*

Следствие 2 ([1])**.** *Группа автоморфизмов любого негладкого алгебраического мноогообразия с конечным числом особых точек жорданова.*

Теорема 5. *У любого алгебраического многообразия размерности < 3 группа автоморфизмов жорданова.*

Теорема 5 для многообразий, бирационально не изоморфных $\mathbf{P}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая, доказана в [1], а для многообразий, бирационально изоморфных $\mathbf{P}^1 \times E$, — в [6].

Теорема 6 ([7]). *У любого неунилинейчатого (non-uniruled) алгебраического многообразия группа автоморфизмов жорданова.*

Сформулированные выше результаты описывают большие классы многообразий с жордановой группой автоморфизмов. Более того, в настоящее время время не известно ни одного алгебраического мноогообразия, группа автоморфизмов которого не является жордановой. Это делает весьма интригующим следующий

Вопрос ([1], [2].) *Существует ли алгебраическое многообразие, группа автоморфизмов которого не является жордановой?*

Перейдем к проблеме B.

В этом случае ответ на аналог сформулированного выше вопроса известен:

Теорема 7 ([8]). *Если A — абелево многообразие положительной размерности, а Z — рациональное многообразие положительной размерности, то группа $\mathrm{Bir}(A \times Z)$ не является жордановой.*

Вместе с тем, как показывают сформулированные ниже результаты, случай многообразий X с жордановой группой $\mathrm{Bir}(X)$ является в некотором смысле общим.

Теорема 8 ([1]). *Следующие свойства неприводимого алгебраического многообразия X размерности < 3 эквивалентны:*

(a) *группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова;*
(b) *X не является бирационально изоморфным произведению эллиптической кривой на проективную прямую.*

Теорема 9 ([9]). *Если ББА-гипотеза (см. ниже) верна в размерности n, то для любого рационально связного n-мерного алгебраического многообразия X группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова.*

Теорема 10 ([10]). *Пусть X — неприводимое гладкое собственное n-мерное алгебраическое многообразие. Группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова в любом из следующих случаев:*

(i) *X неунилинейчато;*
(ii) *ББА-гипотеза верна в размерности n и иррегулярность (т.е. размерность многообразия Пикара) многообразия X равна 0.*

ББА-гипотезой называется принадлежащее А. Борисову, Л. Борисову и В. Алексееву общее предположение, что все многообразия Фано фиксированной размерности с терминальными особенностями содержатся в конечном числе алгебраических семейств. В размерности 3 она доказана в [11], что дает

Следствие 3 ([9]). *Группа Кремоны Cr_n при $n = 3$ жорданова.*

Жордановость Cr_n при $n = 2$ доказана в [12], а при $n = 1$ очевидна. В настоящее время вопрос о жордановости Cr_n при $n > 3$ открыт.

Жордановость групп автоморфизмов является областью интенсивных исследований не только в алгебро-геометрическом, но и в топологическом контексте: соответствующая проблема получается заменой алгебраических многообразий X в формулировке проблемы A на связные гладкие топологические многообразия M, а групп $\mathrm{Aut}(X)$ — на группы $\mathrm{Diff}(M)$ диффеоморфизмов многообразий M.

Случаи некомпактных и компактных многообразий оказались существенно отличающимися друг о друга. А именно, в некомпактном случае имеет место следующая

Теорема 11 ([3]). *Для каждого целого числа $n \geqslant 4$ существует такое односвязное некомпактное гладкое ориентируемое n-мерное топологическое многообразие M^n, что группа $\mathrm{Diff}(M^n)$ содержит изоморфную копию каждой конечно представимой группы и эта копия является свободно действующей дискретной группой преобразований многообразия M^n.*

Следствие 4 ([3]). *Для каждого целого числа $n \geqslant 4$ существует такое односвязное некомпактное гладкое ориентируемое n-мерное топологическое многообразие M^n, что группа $\mathrm{Diff}(M^n)$ содержит изоморфную копию каждой конечной группы, свободно действующую на M^n.*

Следствие 5 ([3]). *Для каждого целого числа $n \geqslant 4$ существует такое односвязное некомпактное гладкое ориентируемое n-мерное топологическое многообразие M^n, что $\mathrm{Diff}(M^n)$ — не жорданова группа.*

Более того, имеется явный конструктивный способ построения многообразия M^4 из связной суммы четырех копий многообразия $S^1 \times S^3$ с помощью последовательного приклеивания к нему четырнадцати "ручек" $D^2 \times S^2$.

Существуют, однако, и важные некомпактные многообразия многообразия M с жордановой группой $\mathrm{Diff}(M)$:

Теорема 12 ([5]). *Группа $\mathrm{Diff}(\mathbf{R}^n)$ жорданова для любого n.*

В компактном случае имеется общая гипотеза Гиза, которая в терминах определения 1 может быть переформулирована следующим образом:

Гипотеза Гиза. *Для каждого связного компактного гладкого топологического многообразия M группа $\mathrm{Diff}(M)$ жорданова.*

Есть ряд свидетельств в ее пользу. Например, она верна для связного компактного гладкого топологического многообразия M в любом из следующих случаев:

(i) M ориентируемо и $\dim(M) \leqslant 2$ (см., например, [13]).
(ii) M — сфера (см. [5]).
(iii) M имеет ненулевую эйлерову характеристику (см. [5]).
(iv) $\dim(M) = n$ и M обладает таким неразветвленным накрытием $\widetilde{M} \to M$, что в $H^1(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$ содержится классы когомологий $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, для которых $\alpha_1 \cup \cdots \cup \alpha_n \neq 0$ (см. [13]).

Для формулировки еще одного свидетельства напомним, что, согласно объявленной классификации, полный список неабелевых конечных простых групп состоит, с точностью до изоморфизма, из 26 спорадических групп и следующих бесконечных серий, зависящих от параметров:

- серия $\mathcal{S}_1$, зависящая от одного параметра $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$:

$$\mathrm{Alt}_n, n \geqslant 5; {}^2B_2(2^{2n+1}); {}^2G_2(3^{2n+1}); {}^2F_4(2^{2n+1});$$

- серия $\mathcal{S}_2$, зависящая от двух параметров $p, a \in \mathbb{N}$, где p — простое число:

$$G_2(p^a), (p, a) \neq (2, 1); F_4(p^a); E_6(p^a); {}^2E_6(p^a); {}^3D_4(p^a); E_7(p^a); E_8(p^a);$$

- серия $\mathcal{S}_3$, зависящая от трех параметров $p, a, n \in \mathbb{N}$, где p — простое число:

$\mathrm{PSL}_n(p^a), n \geqslant 2, (n, p, a) \neq (2,2,1), (2,3,1)$; $\mathrm{P\Omega}_{2n+1}(p^a), n \geqslant 3, p \neq 2$;
$\mathrm{PSU}_n(p^a), n \geqslant 3, (n, p, a) \neq (3,2,1)$; $\mathrm{P\Omega}^+_{2n}(p^a), n \geqslant 4$;
$\mathrm{PSp}_{2n}(p^a), n \geqslant 2, (n, p, a) \neq (2,2,1)$; $\mathrm{P\Omega}^-_{2n}(p^a), n \geqslant 4$.

Теорема 13 ([3]). *Пусть M — связное компактное гладкое топологическое многообразие. Существует такое зависящее только от M вещественное число b_M, что каждая неабелева конечная простая подгруппа F в* $\mathrm{Diff}(M)$*, принадлежащая одной из серий $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ или $\mathcal{S}_3$, обладает следующим свойством:*

(i) *если $F \in \mathcal{S}_1$, то $n \leqslant b_M$;*
(ii) *если $F \in \mathcal{S}_2$, то $a \leqslant b_M$;*
(iii) *если $F \in \mathcal{S}_3$, то $a \leqslant b_M$ и $n \leqslant b_M$.*

Литература

1. V. L. Popov *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*//CRM Proc. and Lect. Notes. 2011. Vol. 54. P. 289–311.
2. V. L. Popov *Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties* //Springer Proc. in Math.& Statistics. 2014. Vol. 79. P. 185–213.
3. V. L. Popov *Finite subgroups of diffeomorphism groups*//arXiv.2013.№1310.6548.
4. M. Demazure *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*//Ann. Sci. École Norm. Sup. 1970. Vol. (4) 3. P. 507–588.
5. I. Mundet i Riera *Finite group actions on spheres, Euclidean spaces, and compact manifolds with $\chi = 0$*//arXiv.2014.№1403.0383.
6. T. I. Bandman, Y. G. Zarhin *Jordan groups and algebraic surfaces*//arXiv.2014.№1404. 1581.
7. Y. Prokhorov, C. Shramov *Jordan property for groups of birational selfmaps*//arXiv.2013. №1307.1784.
8. Y. G. Zarhin *Theta groups and products of abelian and rational varieties* //Proc. Edinb. Math. Soc. 2014. Vol. 57(1). P. 299–304.
9. Y. Prokhorov, C. Shramov *Jordan property for Cremona groups*//arXiv.2013.№1211.3563.
10. Y. Prokhorov, C. Shramov *Jordan property for groups of birational selfmaps*//arXiv.2013. №1307.1784.
11. J. Kollár, Y. Miyaoka, S. Mori, H. Takagi *Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds*//Proc. Jpn. Acad. Ser. A Math. Sci. 2000. Vol. 76. P. 73–77.
12. J.-P. Serre *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis*//Séminaire Bourbaki. 2008. №1000. P. 1000-01–1000-24.
13. I. Mundet i Riera *Jordan's theorem for the diffeomorphism group of some manifolds*//Proc. Amer. Math. Soc. 2010. Vol. 138. №6. P. 2253–2262.