Современная математика. Фундаментальные направления. Том 39 (2011). С. 11–35

УДК 517.984.5

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ЛИПШИЦЕВЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2011 г. **М. С. АГРАНОВИЧ**

Аннотация. Статья посвящена спектральным задачам для сильно эллиптических систем 2-го порядка в ограниченных липшицевых областях. Рассматриваются спектральные задачи Дирихле и Неймана, а также три задачи со спектральным параметром в условиях на границе: задача Пуанкаре—Стеклова и две задачи сопряжения. В порядке обзора обсуждаются основные свойства этих задач, самосопряженных и несамосопряженных. Предварительно объясняется ряд фактов общей теории основных задач в липшицевых областях. Исходные определения — вариационные, использование поверхностных потенциалов основано на результатах об однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана. В большей части статьи используются простейшие гильбертовы L_2-пространства H^s, но в конце статьи рассказано об обобщениях на банаховы пространства H^s_p бесселевых потенциалов и B^s_p Бесова.

Памяти Владимира Александровича Кондратьева,
замечательного математика и выдающегося
специалиста по уравнениям в частных производных

1. Введение

Эта статья близка к докладу автора на 2-й Санкт-Петербургской конференции по спектральной теории, посвященной памяти М. Ш. Бирмана, в июле 2010 г. Цель состояла в том, чтобы кратко описать теорию пяти основных спектральных задач для сильно эллиптических систем второго порядка в ограниченной области — в том виде, в котором она сложилась ко времени конференции. Статья имеет обзорный характер. В частности, мы обсуждаем рамки этой теории. Некоторые утверждения не публиковались раньше в явном виде или представлены здесь в уточненной форме (в частности, в разделах 4, 6 и 10).

Отметим, что так как эта спектральная теория содержательна уже в простейших пространствах H^s, мы не торопимся с введением пространств H^s_p и B^s_p, они будут рассмотрены в последних разделах. Отметим также, что было бы невозможно объяснять спектральную теорию без предварительного обсуждения основных фактов общей теории, которые заслуживают внимания и сами по себе. Поэтому мы начинаем с такого обсуждения. Для ссылок наиболее удобна книга [62], не переведенная, к сожалению, на русский язык.

Мы покажем, в частности, что в липшицевых областях сохраняется часть спектральной теории «гладких» эллиптических задач, по объему небольшая, но важная и полезная.

Три возможных обобщения упоминаются в последнем разделе.

Рассмотрим ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, с липшицевой границей Γ: локально, в подходящих координатах, это график функции $x_n = \phi(x')$, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, удовлетворяющей условию Липшица

$$|\phi(x') - \phi(y')| \leqslant C|x' - y'|. \tag{1.1}$$

Такая функция дифференцируема почти всюду (см., например, [32, гл. VIII]), поэтому касательная плоскость и направление нормали имеются почти в каждой точке на Γ.

Простейшие примеры — многогранники (не все, но заведомо все выпуклые многогранники), конечные круговые конусы и цилиндры, их образы при липшицевых диффеоморфизмах.

В Ω мы рассмотрим систему уравнений в частных производных 2-го порядка в дивергентной форме

$$Lu(x) := -\sum \partial_j a_{j,k}(x) \partial_k u(x) + \sum b_j(x) \partial_j u(x) + c(x)u(x) = f(x). \tag{1.2}$$

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-01-00277-а.

Здесь ∂_j — частные производные; $a_{j,k}$, b_j и c_j — квадратные матрицы порядка m; соответственно u и f — столбцы высоты m. Все функции комплекснозначны. Мы стараемся минимизировать предположения о гладкости коэффициентов и предполагаем, что $a_{j,k} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b_j \in C^{0,1}(\overline{\Omega})$ (липшицевы), $c \in L_\infty(\overline{\Omega})$. В некоторых вопросах достаточна меньшая гладкость.

Основное предположение о системе — ее *сильная эллиптичность*. Оно состоит в том, что главный символ

$$a_0(x,\xi) = \sum a_{j,k}(x)\xi_j\xi_k \tag{1.3}$$

имеет при вещественном ξ положительно определенную вещественную часть:

$$\operatorname{Re} a_0(x,\xi) = \tfrac{1}{2}\left[a_0(x,\xi) + a_0^*(x,\xi)\right] \geqslant C_0|\xi|^2 I, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Это важное понятие ввел Вишик [17].

Во многих важных случаях матрицы $a_{j,k}$ вещественны и $a_{j,k} = a'_{k,j}$, так что главный символ является вещественным и симметричным.

Примеры. 1. Уравнение Лапласа (или Гельмгольца) с младшими членами: $-\Delta u + \ldots = f$. В частности, оно встречается в задачах акустики и электродинамики в областях с негладкой границей. Функция u может быть векторнозначной. Отметим, что общее уравнение Бельтрами—Лапласа отличается от общего скалярного сильно эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div}(a(x)\operatorname{grad} u(x)) + \ldots = f(x) \tag{1.5}$$

с вещественной симметрической матрицей $a(x)$ только ненулевым множителем и младшими членами.

2. Система Ламе в (линеаризованной) теории упругости для изотропных сред

$$-\mu\Delta u - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u + \ldots = f. \tag{1.6}$$

Она сильно эллиптична при $\mu > 0$, $\lambda + 2\mu > 0$.

3. Системы теории упругости для неоднородных анизотропных сред: с вещественными матрицами $a_{j,k}(x) = (a_{j,k}^{r,s}(x))$, удовлетворяющими условиям симметрии

$$a_{j,k}^{r,s} = a_{k,j}^{r,s} = a_{r,s}^{j,k} = a_{r,k}^{j,s}.$$

В случаях 2 и 3 обычно $m = n = 2$ или 3. Но многомерные аналоги этих систем тоже рассматриваются в литературе (см., например, [71]).

2. Пространства H^s

В основном они хорошо известны, и мы хотим только отметить некоторые детали, которые обсуждаются не везде.

Введем оператор

$$J^{-s} = F^{-1}(1+|\xi|^2)^{-s/2}F, \tag{2.1}$$

где F — преобразование Фурье в смысле обобщенных функций. Напомним, что для всех $s \in \mathbb{R}$ пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$H^s(\mathbb{R}^n) = J^{-s}L_2(\mathbb{R}^n), \tag{2.2}$$

и $\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|J^s u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}$. При $s > 0$ это пространство Соболева—Слободецкого $W_2^s(\mathbb{R}^n)$, в частности, пространство Соболева при целом s.

Пространство $H^s(\Omega)$ определяется как состоящее из сужений на Ω (в смысле обобщенных функций) элементов из $H^s(\mathbb{R}^n)$ с обычной нормой inf. Существует универсальный оператор продолжения $\mathcal{E}\colon H^s(\Omega) \to H^s(\mathbb{R}^n)$, ограниченный *для всех* $s \in \mathbb{R}$ [75], включая $s < 0$, в отличие от известного оператора Стейна [32, гл. VI, п. 3].

Пространство $\widetilde{H}^s(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^s(\mathbb{R}^n)$, состоящее из элементов с носителями в $\overline{\Omega}$. Норма наследуется из $H^s(\mathbb{R}^n)$. Его можно отождествить с пополнением $\overset{\circ}{H}{}^s(\Omega)$ линеала $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^s(\Omega)$, если $s > -\frac{1}{2}$, $s \neq \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$. Все отождествления понимаются с точностью до эквивалентности норм.

Пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-s}(\Omega)$ дуальны (точнее, взаимно сопряжены) относительно продолжения формы $(\mathcal{E}u, v)_{\mathbb{R}^n}$, где $(\cdot\,,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$ — стандартное скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R}^n)$. При $s = 0$ это фактически стандартное скалярное произведение в $L_2(\Omega)$, поэтому мы будем обозначать эту форму через $(u,v)_\Omega$.

Пространство $H^s(\Gamma)$ естественно определяется при помощи разбиения единицы на Γ и норм в $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$, но только при $|s| \leqslant 1$, поскольку преобразования координат на Γ лишь липшицевы. Пространства $H^s(\Gamma)$ и $H^{-s}(\Gamma)$ дуальны (взаимно сопряжены) относительно продолжения стандартного скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$.

Оператор перехода к следу $u \to u^+ = \gamma^+ u$ действует ограниченным образом из $H^{s+1/2}(\Omega)$ в $H^s(\Gamma)$ при $0 < s < 1$. (При $s = 1$ это не так даже для поверхностей класса C^1, см. указания в [54].) Он имеет ограниченный правый обратный.

Пространство $H^s(\mathbb{R}^n)$ не содержит элементов, сосредоточенных на Γ, если $s \geqslant -1/2$, но содержит такие элементы при $s < -1/2$, и они принадлежат $\widetilde{H}^s(\Omega)$. При $-3/2 < s < -1/2$ это функционалы над $v \in H^{-s}(\Omega)$ вида $(h, \gamma^+ v)_\Gamma$, $h \in H^{s+1/2}(\Gamma)$. Здесь $-1 < s + 1/2 < 0$. См. [64].

Все эти пространства гильбертовы. В Ω и на Γ имеют место компактные и плотные вложения $H^s \subset H^t$ при $s > t$. Пространства $H^s(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega)$ можно отождествить при $-1/2 < s < 1/2$ (используя при $0 < s < 1/2$ продолжение функций из $H^s(\Omega)$ нулем вне Ω), что позволяет непрерывно переходить из одной шкалы в другую.

3. Задачи Дирихле и Неймана

Начнем с *задачи Неймана*:

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad T^+ u = h \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{3.1}$$

Здесь T^+u — *конормальная производная*. Если $u(x)$ — гладкая функция, то

$$T^+ u(x) = \gamma^+ \sum \nu_j(x) a_{j,k}(x) \partial_k u(x) \tag{3.2}$$

на Γ, где ν — единичная внешняя нормаль. В случае $L = -\Delta + \dots$ это нормальная производная.

Нам нужны *вариационные определения*. Введем «энергетическую форму»

$$\Phi_\Omega(u,v) = \int\limits_\Omega \Big[\sum a_{j,k} \partial_k u \cdot \partial_j \overline{v} + \sum b_j \partial_j u \cdot \overline{v} + cu \cdot \overline{v} \Big]\, dx. \tag{3.3}$$

Она определена при $u, v \in H^1(\Omega)$.

Следующая *первая формула Грина* справедлива для $v \in H^1(\Omega)$ и $u \in H^2(\Omega)$ (см. [62, лемма 4.1]):

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u,v) - (T^+u, v^+)_\Gamma. \tag{3.4}$$

Достаточно предположить, что $u \in H^s(\Omega)$ с $s > 3/2$: в этом случае можно аппроксимировать u функциями из $H^2(\Omega)$ и получить формулу (3.4) предельным переходом.

Если задана функция $u \in H^1(\Omega)$, то в общем случае $Lu = f$ однозначно определяется только внутри Ω (как обобщенная функция). Чтобы определить f как элемент в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, можно выбрать и прибавить элемент из $H^{-1}(\mathbb{R}^n)$ с носителем на Γ.

По этим причинам формула (3.4) обычно просто пишется (постулируется) и рассматривается как *определение* для T^+u при заданных $u \in H^1(\Omega)$ и $f = Lu \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega)$; при этом $v \in H^1(\Omega)$ является произвольной пробной функцией. См. лемму 4.3 в [62]. В общем случае T^+u является только обобщенной функцией из $H^{-1/2}(\Gamma)$ (над основными функциями из $H^1(\Gamma)$). Ср. [64].

Мы условимся называть (3.2) *гладкой конормальной производной*.

Та же формула (3.4) принимается за определение *вариационного,* или *слабого, решения* задачи Неймана. В этом определении

$$u, v \in H^1(\Omega), \quad f = Lu \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega), \quad h = T^+u \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{3.5}$$

Заметим, что h можно заменить нулем, изменив f. (При этом к f в $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ добавляется слагаемое, сосредоточенное на Γ.) Варианты задачи Неймана с $h = 0$ или $f = 0$ представляют самостоятельный интерес.

Функционал, достигающий минимума на решении $v = u$ (при однородном граничном условии), указывается в случае, когда форма $\Phi_\Omega(u,v)$ эрмитова,

$$\Phi_\Omega(v,u) = \overline{\Phi_\Omega(u,v)}, \tag{3.6}$$

и квадратичная форма $\Phi_\Omega(v,v)$ неотрицательна. А именно,

$$\Psi(v) = \Phi_\Omega(v,v) - 2\,\mathrm{Re}(f,v)_\Omega. \tag{3.7}$$

Однако термин «вариационное» часто используется в том же смысле, что и «слабое».

Теперь рассмотрим *задачу Дирихле*

$$Lu = f \ \text{ в } \ \Omega, \quad u^+ = g \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{3.8}$$

Если $g = 0$, то определение вариационного решения задачи имеет вид

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u,v) \tag{3.9}$$

с $u, v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ (что означает подчинение этих функций однородным условиям Дирихле), $Lu = f \in H^{-1}(\Omega)$. Случай $g \neq 0$, $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, сводится к случаю $g = 0$ вычитанием из u функции из $H^1(\Omega)$ с заданным граничным значением.

Классические результаты для задачи Дирихле состоят в следующем. Из сильной эллиптичности следует *неравенство Гординга* [48]

$$\mathrm{Re}\,\Phi_\Omega(u,u) \geqslant C_1\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} - C_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}, \tag{3.10}$$

где $C_1 > 0$. $C_2 \geqslant 0$. В скалярном случае, если $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$, оно получается легко: $\xi_j\xi_k$ в условии сильной эллиптичности можно заменить на $\zeta_j\overline{\zeta_k}$ (с $\zeta_j \in \mathbb{C}$), затем просто подставить ∂u вместо ζ и проинтегрировать. В общем случае доказательство использует классический метод локализации и «замораживания коэффициентов», причем достаточно предположить, что $a_{j,k} \in C(\overline{\Omega})$ (см., например, [62, с. 119–122]).

Неравенство (3.10) имеет место с $C_2 = 0$, если $\mathrm{Re}\,c(x)$ достаточно велико. *Последнее мы всегда будем предполагать*, избегая рассмотрения более общих фредгольмовых задач, что по существу не намного сложнее. В спектральных задачах для уравнения $Lu = \lambda u$ это не приведет к потере общности, так как всегда можно сдвинуть спектральный параметр. *Неравенство*

$$\mathrm{Re}\,\Phi_\Omega(u,u) \geqslant C_1\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)} \tag{3.11}$$

влечет однозначную разрешимость задачи Дирихле в силу леммы Лакса—Мильграма [59], ее можно найти во многих книгах, например, в [62]. Приведем формулировку в нужной нам форме. Речь идет об уравнении $Lu = f$, где ограниченный оператор L определяется приведенной ниже формулой (3.13).

Лемма. *Пусть H — гильбертово пространство и H^* — сопряженное к нему пространство относительно формы (f,v), $v \in H$, $f \in H^*$, и пусть задано $f \in H^*$. Предположим, что для непрерывной полуторалинейной формы $\Phi(u,v)$ на H выполнено неравенство*

$$\|u\|^2_H \leqslant C\,\mathrm{Re}\,\Phi(u,u). \tag{3.12}$$

Тогда существует один и только один элемент $u \in H$, такой, что

$$\Phi(u,v) = (f,v) \tag{3.13}$$

при всех $v \in H$. При этом оператор L^{-1} ограничен.

Для задачи Неймана неравенство Гординга имеет вид

$$\mathrm{Re}\,\Phi_\Omega(u,u) \geqslant C_3\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - C_4\|u\|^2_{L_2(\Omega)}; \tag{3.14}$$

здесь существенное обстоятельство состоит в том, что $u \in H^1(\Omega)$ вместо $\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Снова это неравенство легко получается для *скалярного* уравнения с $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$. В общем случае оно не справедливо. Однако оно справедливо во многих важных случаях. Анализ достаточных условий можно найти, в частности, в [2, 36, 62, 68]. На наш взгляд, следующее условие особенно удобно:

$$\mathrm{Re}\sum a^{r,s}_{j,k}\zeta^s_k\overline{\zeta^r_j} \geqslant C_5\sum|\zeta^s_k + \zeta^k_s|^2 \tag{3.15}$$

при $m = n$ (в противном случае можно заменить недостающие ζ^r_j нулями). Заметим, что если мы опустим справа ζ^k_s, то условие станет слишком тяжелым. Условие (3.15) применимо в случае систем теории упругости, включая обобщения. Его достаточность следует из второго неравенства Корна: в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ для векторнозначной функции $u = (u_1, \ldots, u_n)$

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leqslant C_6 \int\limits_{\Omega} \left(|u|^2 + \sum |\partial_k u_s + \partial_s u_k|^2 \right) dx \tag{3.16}$$

с не зависящей от u постоянной (см., например, [71]).

Как во многих работах, мы *постулируем* справедливость неравенства (3.14). Снова это неравенство выполняется с $C_4 = 0$, если $\operatorname{Re} c(x)$ достаточно велико. *Мы предположим, что это так*, и поэтому будем считать, что *задача Неймана тоже однозначно разрешима*. Разумеется, в этом нет нужды, если мы рассматриваем только задачу Дирихле.

Замечания.

1. Дуальности, упомянутые в разделе 2, играют существенную роль в вариационных определениях: благодаря им все члены в формулах Грина (см. также (3.19) и (3.20) ниже) имеют смысл. В лемме Лакса—Мильграма также существенна дуальность пространства решений и пространства правых частей.

2. Здесь и ниже пространства решений и правых частей таковы, что соответствующие операторы ограничены и имеют ограниченные обратные. Соответственно для решений справедливы двусторонние априорные оценки. Например, в задаче Неймана с $h = 0$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant C_7 \|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)} \leqslant C_8 \|u\|_{H^1(\Omega)}. \tag{3.17}$$

Если же $h \neq 0$ и $f = 0$, то здесь $\|f\|_{\widetilde{H}^{-1}(\Omega)}$ заменяется на $\|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$.

Кстати, во многих учебниках предполагается, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда двусторонние оценки не получаются.

Заметим, что оператор, формально сопряженный к L, есть

$$\widetilde{L}v = -\sum \partial_k a^*_{j,k}(x) \partial_j v(x) - \sum b^*_j(x) \partial_j v(x) + \big(c^*(x) - \sum \partial_j b^*_j(x)\big) v(x). \tag{3.18}$$

Соответствующая первая формула Грина, также постулируемая, имеет вид

$$(u, \widetilde{L}v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v) - (u^+, \widetilde{T}^+ v)_\Gamma. \tag{3.19}$$

Здесь $u, v \in H^1(\Omega)$. Из двух первых формул Грина следует *вторая формула Грина*:

$$(Lu, v)_\Omega - (u, \widetilde{L}v)_\Omega = (u^+, \widetilde{T}^+ v)_\Gamma - (T^+ u, v^+). \tag{3.20}$$

В (3.19) написана та же, что и раньше, форма $\Phi_\Omega(u, v)$. Из-за этого в формулу для гладкой конормальной производной $\widetilde{T}^+ v$ для $\widetilde{L}$ включается дополнительное слагаемое:

$$\widetilde{T}^+ v = \gamma^+ \sum \nu_j(x) a^*_{k,j}(x) \partial_k v(x) + \gamma^+ \sum \nu_j(x) b_j(x) v(x). \tag{3.21}$$

Его нет, если $v \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Для формальной самосопряженности оператора L, $L = \widetilde{L}$, необходимы и достаточны условия

$$a^*_{k,j} = a_{j,k}, \quad b^*_j = -b_j, \quad c^* - \sum \partial_j b^*_j = c. \tag{3.22}$$

Заметим, что мы имеем (3.20) с нулевой правой частью на функциях из $\widetilde{H}^1(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$. Чтобы иметь (3.20) на функциях из $H^1(\Omega)$, надо добавить условие

$$\sum \nu_j b_j = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.23}$$

Поэтому при рассмотрении задачи Неймана мы договоримся считать включенным в условие формальной самосопряженности оператора L добавочное условие (3.23). При рассмотрении только задачи Дирихле в этом нет нужды. Можно пояснить это так: если $L = \widetilde{L}$, то задача Дирихле формально самосопряженная, а для задачи Неймана это верно при дополнительном условии (3.23).

Отметим, что при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$|(\gamma^+ \sum \nu_j b_j u, \gamma^+ v)_\Gamma| \leqslant C_\varepsilon \|u\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)} \|v\|_{H^{1/2+\varepsilon}(\Omega)}. \tag{3.24}$$

Поэтому форму слева можно отнести к младшим членам в форме $\Phi_\Omega(u, v)$.

Вернемся теперь к понятию конормальной производной и добавим следующее

Замечание. Обозначим через $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ линеал, состоящий из сужений на Ω финитных бесконечно гладких функций на $\mathbb{R}^n$. Введем пространство $E(L, H^0(\Omega))$ таких функций $u \in H^1(\Omega)$, что Lu (в смысле обобщенных функций в Ω) принадлежит $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$. (В частности, Lu может быть нулем.) Норма в этом пространстве определяется формулой

$$\|u\|^2_{E(L,H^0(\Omega))} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|Lu\|^2_{H^0(\Omega)}. \tag{3.25}$$

Линеал $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ плотен в этом пространстве. Это доказано в [49, с. 59] в случае $L = -\Delta$, но доказательство сохраняется в общем случае. Как элемент из $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$, $f = Lu$ сейчас отождествляется с этой функцией из $L_2(\Omega)$.

Пусть теперь $u \in E(L, H^0(\Omega))$ и $\{u_j\}$ — последовательность функций из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, сходящаяся к u в $E(L, H^0(\Omega))$. Тогда *функции u_j имеют гладкие конормальные производные T^+u_j, и они сходятся к T^+u в $H^{-1/2}(\Gamma)$*. Ср. [45, п. 3]. См. также [64]: там рассмотрены более общие правые части f.

Добавим, что «канонические» определения конормальной производной (с устранением произвола) предложены в работах Копачевского (см., например, [18]) и Михайлова (см. [64]).

4. Спектральные задачи Дирихле и Неймана. Случай 1

Мы теперь рассмотрим две спектральные задачи:

$$Lu = \lambda u \ \text{ в } \ \Omega, \quad u^+ = 0 \ \text{ или } \ T^+u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{4.1}$$

В задаче Дирихле $u \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. В задаче Неймана $u \in H^1(\Omega)$.

Мы выделим три случая:

1. L — формально самосопряженный оператор.
2. Только главная часть L_0 оператора L является формально самосопряженной.
3. Нет никакой самосопряженности.

В каждом случае мы укажем спектральные свойства задач. В настоящем разделе мы рассмотрим только первый случай.

Здесь мы начнем с задачи Дирихле.

Мы предполагаем оператор L формально самосопряженным. Как уже сказано, тогда форма $\Phi_\Omega(u, v)$ с областью определения $\widetilde{H}^1(\Omega)$ эрмитова. Обычно рассматривают отвечающий задаче Дирихле оператор L_D, определяемый формой Φ_Ω, т.е. формулой (3.9), в $L_2(\Omega)$ (ср., например, [22, гл. VI]). Это пространство рассматривается как основное гильбертово пространство. Оператор L_D является в нем самосопряженным неограниченным оператором. Если граница и коэффициенты достаточно гладкие, то область определения этого оператора известна: это $H^2(\Omega) \cap \mathring{H}^1(\Omega)$. Но в общем случае мы знаем только, что она содержится в $\widetilde{H}^1(\Omega) = \mathring{H}^1(\Omega)$.

Поэтому для нас удобнее другая точка зрения. Она состоит в том, что *за основное гильбертово пространство вместо $L_2(\Omega)$ принимается $H^{-1}(\Omega)$*. Оператор L_D, уже введенный формулой (3.9), — неограниченный оператор в этом пространстве с областью определения, которая нам известна: это $\widetilde{H}^1(\Omega)$. *Скалярное произведение корректно определяется формулой*

$$\langle u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega)} = (L_D^{-1}u, v)_\Omega. \tag{4.2}$$

Оператор L_D сохраняет самосопряженность. Соответствующая норма в $H^{-1}(\Omega)$ эквивалентна исходной.

Здесь мы следуем [30], как и раньше (например, в [2]). Аналогично мы будем действовать (выбирать основное гильбертово пространство) ниже.

При обоих подходах спектр дискретен, так как область определения оператора компактно вложена в основное гильбертово пространство. При этом важно, что справедливо следующее простое

Предложение 4.1. *Операторы L_D в $L_2(\Omega)$ и в $H^{-1}(\Omega)$ имеют одни и те же собственные функции и собственные значения.*

Здесь по существу достаточно проверить, что собственные функции второго оператора принадлежат области определения первого. Но это легко: если $u \in H^1(\Omega)$ и $Lu = \lambda u$, то $Lu \in H^1(\Omega)$ и, значит, $Lu \in L_2(\Omega)$.

Теперь обсудим спектральные свойства оператора L_D.

Первая часть следующего предложения очевидна (с учетом того, что L_D изоморфно отображает $\widetilde{H}^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$).

Предложение 4.2.

1. *Оператор L_D является самосопряженным оператором с дискретным спектром в $H^{-1}(\Omega)$, и его собственные значения положительны. Из его собственных функций составляется ортонормированный базис в этом пространстве. Они принадлежат пространству $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и образуют там базис, ортогональный относительно скалярного произведения $(L_D u, v)_\Omega$.*

2. *Эти утверждения распространяются на промежуточные пространства*

$$H^t(\Omega),\ \ t \in (-1, -1/2], \quad H^t(\Omega) = \widetilde{H}^t(\Omega),\ \ t \in (-1/2, 1/2), \quad \widetilde{H}^t(\Omega),\ \ t \in [1/2, 1). \tag{4.3}$$

Второе утверждение проверяется следующим образом. Хорошо известно, что пространства $H^s(\Omega)$ и пространства $\widetilde{H}^s(\Omega)$ образуют интерполяционные шкалы относительно комплексного метода интерполяции. В (4.3) происходит переход из одной шкалы в другую. То, что при этом снова получается интерполяционная шкала, следует из теоремы Вольфа [82]. Итак, пространства (4.3) получаются из $H^{-1}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega)$ комплексной интерполяцией.

Так как L_D — положительный самосопряженный оператор, то эти пространства совпадают с областями определения его степеней L_D^τ, $0 < \tau < 1$, рассматриваемых как операторы в $H^{-1}(\Omega)$. Это известно: см., например, [33, п. 1.18]. Эти степени имеют те же собственные функции, и они образуют ортогональный базис относительно скалярного произведения

$$(L_D^{-1+2\tau} u, v)_\Omega. \tag{4.4}$$

Асимптотика собственных значений была исследована вариационным методом в частности, в работах Бирмана—Соломяка (см., например, [14–16]) и Метивье [63]. Последний доказал для считающей функции (функции распределения собственных значений) $N_L(\lambda)$ как в случае задачи Дирихле, так и в случае задачи Неймана следующую формулу с оценкой остатка.

Теорема 4.3. *Имеет место следующая формула*:

$$N_L(\lambda) = c_L \lambda^{n/2} + O(\lambda^{(n-1/2)/2}). \tag{4.5}$$

Метивье рассматривал скалярное уравнение, но отметил, что его метод работает и в случае систем. Формула для коэффициента имеет вид

$$c_L = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_\Omega \int N(1, a_0(x, \xi))\, d\xi\, dx, \tag{4.6}$$

где $N(\lambda, a_0)$ — считающая функция для главного символа. Напомним, что при гладких границе и коэффициентах остаточный член в общем случае имеет вид $O(\lambda^{(n-1)/2})$ (см., например, обзор [31]). В [63] рассмотрен более общий случай гёльдеровой границы; см. также ссылки в этой работе. Результат (4.5) был получен Метивье раньше, в 1974 г. В [69] в рассмотренных там случаях оценка остатка сильнее: $O(\lambda^{(n-1)/2} \ln \lambda)$.

Перейдем к задаче Неймана. Как уже сказано, в условие формальной самосопряженности мы в этом случае включаем условие (3.23). Мы можем рассматривать отвечающий ей оператор L_N и как самосопряженный оператор в $L_2(\Omega)$, и как самосопряженный оператор в пространстве $\widetilde{H}^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением $(L_N^{-1} u, v)_\Omega$, имеющий область определения $H^1(\Omega)$, и мы далее используем вторую возможность. Все можно повторить с соответствующей заменой пространств. Поэтому имеем

Предложение 4.4. *Для оператора L_N справедливы такие же результаты, как для L_D, с соответствующей заменой пространств.*

5. Несамосопряженные операторы и их степени

В этом разделе проводится подготовка к рассмотрению случаев 2 и 3. Сначала укажем литературу для справок.

Теория несамосопряженных операторов: [20], [21, гл. XI], [28, гл. I], обзор [1, пп. 6.2 и 6.4], лекции [4].

Степени позитивных операторов (не обязательно самосопряженных): [23, гл. 4] и [33, п. 1.15].

Теория интерполяции: [13, 24, 33].

5.1. Мы можем ограничиться рассмотрением следующей ситуации. Пусть H_0 и H_1 — два сепарабельных гильбертовых пространства, второе компактно и плотно вложено в первое. Пусть $\mathcal{L}$ — линейный оператор, изоморфно отображающий H_1 на H_0. В H_0 это неограниченный оператор с областью определения H_1, имеющий компактную резольвенту: обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}$ компактен. Обозначим скалярные произведения в этих пространствах через $(\cdot,\cdot)_0$ и $(\cdot,\cdot)_1$ и нормы через $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$. Предположим, что резольвента $u = R_{\mathcal{L}}(\lambda)f = (\mathcal{L}-\lambda I)^{-1}f$ существует вне угла (сектора)

$$\Theta_\theta = \{\lambda : |\arg\lambda| < \theta\} \tag{5.1}$$

с $0 < \theta < \pi$, по крайней мере, при достаточно больших $|\lambda|$ и удовлетворяет там равномерной оптимальной оценке

$$\|u\|_1 + |\lambda|\|u\|_0 \leqslant C_1\|f\|_0. \tag{5.2}$$

(Оптимальной она является по той причине, что норма резольвенты не может убывать на бесконечности быстрее $|\lambda|^{-1}$, см. [36, с. 182].) Ср. [22, гл. VI]. Мы на самом деле можем предположить, что $\theta < \pi/2$ (см. (6.3) ниже).

Чтобы сформулировать второе предположение, мы напомним два определения s-чисел $s_j(\mathcal{T})$, $j = 1, 2, \ldots$, компактного оператора $\mathcal{T}$ в гильбертовом пространстве H_0.

1. Это ненулевые собственные значения неотрицательного оператора $(\mathcal{T}\mathcal{T}^*)^{1/2}$, занумерованные в невозрастающем порядке с учетом кратностей.
2. $s_{j+1}(\mathcal{T}) = \min\|\mathcal{T}-\mathcal{K}\|$, где $\mathcal{K}$ пробегает линеал конечномерных операторов размерности не выше j.

Относительно эквивалентности этих определений см., например, [20]. Если $\mathcal{T}$ — самосопряженный оператор с положительными собственными значениями, то они совпадают с его s-числами.

Наше второе предположение состоит в том, что при некотором $p > 0$

$$s_j(\mathcal{L}^{-1}) \leqslant C_2 j^{-p}. \tag{5.3}$$

Это естественное условие ввел Бирман в 1962 г.

Система векторов в гильбертовом или банаховом пространстве называется *полной*, если их конечные линейные комбинации плотны в этом пространстве.

При предположениях (5.2) и (5.3) следующее условие *достаточно для полноты* корневых векторов оператора $\mathcal{L}$ в H_0 и H_1:

$$2\theta < p\pi. \tag{5.4}$$

Это следует из известной теоремы Данфорда—Шварца [21, гл. XI]. Более того, при этом условии ряд Фурье любого вектора f в H_0 или H_1 по корневым векторам оператора $\mathcal{L}$ допускает суммирование к этому вектору методом Абеля—Лидского порядка $\beta > p^{-1}$ (см. [27] и [19, Дополнение] или [40, гл. 5]).

Этот метод ввел Лидский [26] под названием «метод Абеля». Напомним определение, предположив сначала для простоты, что все корневые векторы оператора $\mathcal{L}$ являются собственными векторами. Занумеруем собственные значения в неубывающем порядке для их модулей с учетом кратностей. Пусть $\{f_j\}_1^\infty$ — полная минимальная система собственных векторов, и пусть $\{g_k\}_1^\infty$ — система, биортогональная к $\{f_j\}$; она строится из собственных векторов сопряженного оператора. Рассмотрим формальный ряд Фурье вектора f, скажем, в H_0 по системе $\{f_j\}$:

$$f \sim \sum c_j f_j, \quad c_j = (f, g_j)_0. \tag{5.5}$$

Введем множители $e^{-t\lambda_j^\beta(\mathcal{L})}$, $t > 0$, $\beta > 0$:

$$\sum c_j e^{-t\lambda_j^\beta(\mathcal{L})} f_j. \tag{5.6}$$

Если этот ряд всегда сходится после некоторой расстановки скобок (не зависящей от f) и его сумма $f(t)$ стремится к f в H_0 при $t \to 0$, то говорят, что *ряды* (5.5) *суммируются в* H_0 *методом Абеля—Лидского порядка* β.

В общем случае члены ряда для $f(t)$ — это контурные интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} e^{-t\lambda^\beta} (\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} d\lambda\,, \tag{5.7}$$

где каждый контур γ_j окружает часть спектра оператора $\mathcal{L}$. См. раздел 15, где этот метод будет объяснен для операторов в банаховых пространствах.

5.2. Подкласс этого класса операторов образуют *слабые возмущения самосопряженных операторов*. Оператор из этого подкласса имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \tag{5.8}$$

где $\mathcal{L}_0$ — положительно определенный (для простоты) самосопряженный оператор, также изоморфно отображающий H_1 на H_0, причем (ограничимся этим случаем)

$$\lambda_j(\mathcal{L}_0) = cj^p + o(j^p), \quad \|\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_0^{-q}\| < \infty \tag{5.9}$$

с $p > 0$, $c > 0$, $0 \leqslant q < 1$. Число q называется *порядком возмущения*.

В этом случае неравенство (5.2) вне Θ_θ удовлетворяется при произвольно малом $\theta > 0$, по крайней мере, при достаточно большом $|\lambda|$. Более того, собственные значения оператора $\mathcal{L}$ с некоторого номера принадлежат «параболической» области вида

$$\{\lambda = \sigma + i\tau : \sigma > 0, |\tau| \leqslant C\sigma^q\}, \tag{5.10}$$

и неравенство (5.2) выполнено вне этой области при больших $|\lambda|$. Можно также доказать, что они имеют ту же асимптотику (ср. [1, предложение 6.2.1]). Далее, возможно усиление утверждения о суммируемости методом Абеля—Лидского, в частности, для порядка метода достаточным является неравенство $\beta > p^{-1} - (1-q)$, если $p(1-q) < 1$. Если же $p(1-q) \geqslant 1$, то результаты усиливаются. В частности, *если* $p(1-q) = 1$*, то из корневых векторов можно составить базис Рисса со скобками* (см. [28, гл. I], [1, п. 6.2] и приведенные там ссылки). Это означает, что ряд Фурье любого вектора f по корневым векторам сходится к f после некоторой не зависящей от f расстановки скобок и что в этом ряде со скобками возможны любые перестановки.

5.3. Теперь рассмотрим оператор $\mathcal{L}$, удовлетворяющий только условию (5.2) вне некоторого угла Θ_θ. Для такого оператора можно определить степени $\mathcal{L}^\tau$ с любым вещественным τ (и даже с любым комплексным τ, что нам не нужно), см., например, [33] или [23]. В частности, при $0 < \tau < 1$

$$\mathcal{L}^{-\tau} = \frac{\sin \pi\tau}{\pi} \int\limits_0^\infty t^{-\tau} (tI + \mathcal{L})^{-1} dt, \tag{5.11}$$

а оператор $\mathcal{L}^\tau$ определяется как оператор, имеющий обратный $\mathcal{L}^{-\tau}$. Обозначим через H_τ область определения оператора $\mathcal{L}^\tau$, $0 < \tau < 1$. Пространство H_1 плотно во всех H_τ, поэтому если корневые векторы оператора $\mathcal{L}$ образуют полное множество в H_1, то они образуют полное множество во всех H_τ, $0 < \tau < 1$. Еще отметим, что построение шкалы пространств H_τ, $0 < \tau < 1$, по H_0 и H_1 есть метод интерполяции.

Известно условие для оператора $\mathcal{L}$, при котором эта шкала совпадает со шкалой, получаемой из H_0 и H_1 комплексной интерполяцией (см. [60], где использован результат из [56]). Это условие, названное в [56] *регулярной аккретивностью оператора*, является абстрактным аналогом неравенства Гординга, поэтому оно выполнено для наших операторов L_D и L_N. Но в этих случаях полнота в промежуточных пространствах получается непосредственно из плотности вложений, без использования результатов из [60] и [56]. Однако дополнительная информация состоит в том, что это области определения степеней оператора. В дальнейшем мы будем иметь аналогичную ситуацию с операторами A^{-1}, $D_\pm$ и H.

Можно еще обсудить обобщения сказанного в этом пункте на случай банаховых пространств вместо гильбертовых, но на этом подробно не будем останавливаться.

Для компактных операторов в H_0, изоморфно отображающих H_0 на H_1, легко формулируются аналогичные определения и результаты.

5.4. Добавим еще два замечания.

1. Пусть $\mathcal{L}$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве с дискретным спектром и положительными для простоты собственными значениями λ_j, $j = 1, 2, \ldots$, занумерованными в порядке неубывания с учетом кратностей, а $N(\lambda)$ — считающая функция для них. Тогда, как легко проверить, асимптотики

$$N(\lambda) = c\lambda^r + o(\lambda^r) \ \ (\lambda \to \infty) \quad \text{и} \quad \lambda_j = c' j^{1/r} + o(j^{1/r}) \tag{5.12}$$

эквивалентны. Здесь $r > 0$, $c = (c')^{-r}$.

2. Если $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ — два компактных оператора и $\mathcal{T}_2$ — произведение оператора $\mathcal{T}_1$ и ограниченного оператора $\mathcal{B}$ в любом порядке, то

$$s_j(\mathcal{T}_2) \leqslant \|\mathcal{B}\| s_j(\mathcal{T}_1) \tag{5.13}$$

при всех j. Это тоже легко проверяется.

6. Случаи 2 и 3

Мы снова начнем с задачи Дирихле.

Случай 2. Только *главная часть L_0 оператора L является формально самосопряженной*. Мы прибавим к ней достаточно большую положительную постоянную и рассмотрим соответствующий обратимый оператор $L_{D,0}\colon \widetilde{H}^{-1}(\Omega) \to H^1(\Omega)$ с однородными условиями Дирихле. Предполагая его спектр положительным, мы введем то же самое основное гильбертово пространство $H^{-1}(\Omega)$ со скалярным произведением $(L_{D,0}^{-1}u, v)_\Omega$. Теперь L_D — слабое возмущение самосопряженного оператора $L_{D,0}$:

$$L_D = L_{D,0} + L_{D,1}, \ \ \text{где} \ \ \|L_{D,1} L_{D,0}^{-q}\| < \infty. \tag{6.1}$$

Здесь в общем случае $q = 1/2 + \varepsilon$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$; $q = 1/2$, если выполнено условие (3.23); $q = 0$, если все b_j равны нулю. Эти q имеются в виду в следующем предложении, которое получается с использованием результатов, приведенных в предыдущем разделе.

Предложение 6.1.

1. *Спектр оператора L_D дискретен и лежит в угле* (5.1) *с произвольно малым θ, кроме конечного числа собственных значений* (*зависящего от θ*). *Более того, собственные значения с некоторого номера принадлежат области вида* (5.10). *В замкнутой левой полуплоскости нет собственных значений. Собственные значения сохраняют асимптотику с тем же главным членом, что и в* (4.5).

2. *Корневые функции оператора L_D образуют полное множество в $H^{-1}(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$. Ряды Фурье по этим функциям допускают суммирование в этих пространствах методом Абеля—Лидского порядка $\beta > n/2 - (1 - q)$. Если $b_j = 0$, то при $n = 2$ корневые функции образуют базис Рисса со скобками, а при остальных n неравенство для β имеет вид $\beta > n/2 - 1$.*

Корневые функции оператора L_D образуют полное множество также в промежуточных пространствах (4.3).

В отношении пространств (4.3) добавим, что в силу сказанного в предыдущем разделе они совпадают с областями определения операторов L_D^τ, $0 < \tau < 1$. Это замечание относится и к случаю 3.

Случай 3. *Нет никакой самосопряженности*. Для s-чисел оператора L_D^{-1} получается оценка

$$s_j(L_D^{-1}) \leqslant C_1 j^{2/n}. \tag{6.2}$$

Это следует из того, что существует обратимый оператор, действующий в тех же пространствах, с такой оценкой и даже с асимптотикой s-чисел. (Мы имеем в виду случай 1, в котором s-числа совпадают с собственными значениями; здесь надо учесть замечания в п. 5.4.) Снова используем $H^{-1}(\Omega)$ как основное гильбертово пространство. Корневые функции сохраняют ту же гладкость. Предположим, что значения квадратичной формы $\Phi_\Omega(u,u)$ содержатся в замыкании некоторого угла Θ_θ. Здесь $\theta < \pi/2$, так как в силу коэрцитивности

$$|\operatorname{Im}\Phi_\Omega(u,u)| \leqslant C_2 \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u). \tag{6.3}$$

Тогда мы можем доказать *оптимальную оценку резольвенты*

$$\|(L_D - \lambda I)^{-1}\| \leqslant C_3(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{6.4}$$

вне $\Theta_{\theta+\varepsilon}$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$. (В случае 2 оценка заведомо верна вне Θ_ε при больших $|\lambda|$.)

Приведем пояснения. *Если форма $\Phi_\Omega(u,u)$ коэрцитивна на $\widetilde{H}^1(\Omega)$ и ее значения содержатся в $\overline{\Theta}_\theta$, то форма $e^{i\alpha}\Phi_\Omega(u,u)$ коэрцитивна с равномерной оценкой для $\|u\|^2_{\widetilde{H}^1(\Omega)}$ при $|\alpha| \leqslant \alpha_0 < \pi/2 - \theta$.* Это следует из легко проверяемого неравенства

$$\operatorname{Re}[e^{i\alpha}\Phi_\Omega(u,u)] \geqslant (1 - |\operatorname{tg}\alpha| \cdot \operatorname{tg}\theta)\cos\alpha \operatorname{Re}\Phi_\Omega(u,u). \tag{6.5}$$

Если теперь равенство

$$\Phi_\Omega(u,v) = (\lambda u + f, v)_\Omega \tag{6.6}$$

умножить на $e^{i\alpha}$, то дальше можно действовать, как в [7, §2].

Отметим, что оценка (6.4) аналогична априорной оценке для решений гладких задач, эллиптических с параметром (ср. [35] и [12]):

$$\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega)} + |\lambda|\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C_4\|Lu\|_{H^{-1}(\Omega)}. \tag{6.7}$$

Оценка (5.2) есть абстрактный аналог оценки (6.7).

Используя результаты, указанные в предыдущем разделе, получаем

Предложение 6.2. *Спектр оператора L_D дискретен и лежит в (открытой) правой полуплоскости. Пусть значения формы $\Phi_\Omega(u,u)$ лежат в угле $\overline{\Theta}_\theta$. Тогда собственные значения этого оператора лежат в этом угле и вне угла $\Theta_{\theta+\varepsilon}$ при любом $\varepsilon > 0$ выполнена оценка* (6.7). *Если*

$$\theta < \pi/n, \tag{6.8}$$

то корневые функции образуют полное множество в $H^{-1}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^1(\Omega)$, а ряды Фурье по ним в этих пространствах допускают суммирование методом Абеля—Лидского порядка $\beta > n/2$. Полнота сохраняется в промежуточных пространствах (4.3).

Для задачи Неймана все получается аналогично.

Предложение 6.3. *Для оператора L_N справедливы такие же результаты с соответствующим изменением пространств.*

7. Задачи со спектральным параметром в условиях на Γ

Мы рассмотрим три спектральные задачи со спектральным параметром в условиях на границе; все три имеют дискретный спектр.

Наиболее важна *задача Пуанкаре—Стеклова*

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad T^+u = \lambda u^+ \ \text{ на } \ \Gamma. \tag{7.1}$$

Если задача Дирихле однозначно разрешима, то введем оператор

$$D\colon u^+ \to u \to T^+u. \tag{7.2}$$

Его английское название — *the Dirichlet-to-Neumann operator*. Он является ограниченным оператором из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$. Спектральная задача *для собственных функций* эквивалентна уравнению

$$D\varphi = \lambda\varphi, \quad \text{где} \quad \varphi = u^+. \tag{7.3}$$

(Для общих корневых функций связь сложнее.) Если задача Неймана однозначно разрешима, то введем оператор

$$N\colon T^+u \to u \to u^+. \tag{7.4}$$

Его английское название — *the Neumann-to-Dirichlet operator*. Это ограниченный оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$. Если обе задачи однозначно разрешимы, то D и N — обратимые операторы и $D^{-1} = N$.

Чтобы продвинуться дальше, нам нужно рассматривать *две области* $\Omega^\pm$ с общей липшицевой границей Γ.

С целью избежать технических рассмотрений на бесконечности мы *предположим, что область* $\Omega = \Omega^+$ *лежит на стандартном торе* $\mathbb{T} = \mathbb{T}^n$ с периодическими координатами и что $\mathbb{T} = \Omega^+ \cup \Gamma \cup \Omega^-$. Пусть нормаль ν направлена в Ω^-. Теперь $\widetilde{H}^s(\Omega^\pm)$ — подпространства в $H^s(\mathbb{T})$.

Предположим, что система задана и сильно эллиптична на $\mathbb{T}$ и что $\operatorname{Re} c$ достаточно велико. Это позволяет предположить, что *оператор* $L\colon H^1(\mathbb{T}) \to H^{-1}(\mathbb{T})$*, как и формально сопряженный оператор* $\widetilde{L}$*, обратим.*

Обратный оператор — интегральный:

$$L^{-1} f(x) = \int_{\mathbb{T}} \mathcal{E}(x,y) f(y)\, dy. \tag{7.5}$$

Это *ньютонов потенциал*, а $\mathcal{E}$ — *фундаментальное решение* для L.

В отношении системы $Lu = f$ на торе $\mathbb{T}$ мы не имеем никаких «липшицевых трудностей», и исследование фундаментального решения $\mathcal{E}$ средствами теории ПДО (псевдодифференциальных операторов) показывает, что при наших предположениях о гладкости коэффициентов в (1.2) *оператор* $L\colon H^{1+s}(\Omega) \to H^{-1+s}(\Omega)$ *ограничен и обратим при* $|s| < 1$ (см. [65, предложение 2.2]; см. также предложение 2.1.1 в [8]). То же верно для оператора $\widetilde{L}$.

Теперь мы имеем две задачи Пуанкаре—Стеклова

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm, \quad \pm T^\pm u = \lambda u^\pm \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{7.6}$$

с разными знаками перед $T^\pm$ с учетом направления нормали. Соответственно положим

$$D_\pm u^\pm = \pm T^\pm u, \quad N_\pm T^\pm u = \pm u^\pm. \tag{7.7}$$

Введем обозначения для *скачков* на Γ:

$$[u] = u^- - u^+, \quad [Tu] = T^- u - T^+ u. \tag{7.8}$$

Мы рассмотрим также следующие задачи, которые называем *спектральными задачами сопряжения*:

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm, \quad [u] = 0, \quad [Tu] = -\lambda u^\pm \quad \text{на} \quad \Gamma; \tag{7.9}$$

$$Lu = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\pm, \quad [Tu] = 0, \quad T^\pm u = -\lambda [u] \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{7.10}$$

Для уравнения Гельмгольца их предложили Каценеленбаум, Войтович и Сивов (см. [19] или [40]). Такие граничные условия возникают в задачах акустики и электродинамики с полупрозрачными экранами. В этих задачах Ω^- — неограниченная область с границей Γ, и идея состояла в том, чтобы иметь естественную задачу с дискретным спектром в неограниченной области.

Ниже мы объясним связь этих задач с важнейшими операторами теории потенциала на Γ.

8. Поверхностные потенциалы и интегральные формулы

Имея фундаментальное решение $\mathcal{E}$, можно ввести классические *потенциал простого слоя*

$$\mathcal{A}\psi(x) = \int_\Gamma \mathcal{E}(x,y)\psi(y)\, dS_y \quad (x \in \mathbb{T}) \tag{8.1}$$

и потенциал двойного слоя

$$\mathcal{B}\varphi(x) = \int_\Gamma \big(\widetilde{T}_y^+ \mathcal{E}^*(x,y)\big)^* \varphi(y)\, dS_y \quad (x \notin \Gamma), \tag{8.2}$$

где $\widetilde{T}^+$ — гладкая конормальная производная для формально сопряженного к L оператора $\widetilde{L}$. (См. [62, с. 202]; звездочки и тильда отсутствуют в случае оператора Лапласа.) Непосредственное исследование ограниченности этих операторов в нужных нам пространствах в случае липшицевой поверхности возможно, но в отношении операторов $\mathcal{B}$ и $\partial_j \mathcal{A}$ оно является очень трудным; мы еще раз упомянем об этом в п. 14. Здесь мы объясним другой подход. Он основан на использовании однозначной разрешимости задачи Дирихле; предложили его Нечас [68], Костабель [45] и Маклин [62]. См. также работу [72] об уравнении Гельмгольца.

Напомним, что оператор γ перехода к следу действует ограниченным образом из $H^{1+s}(\mathbb{T})$ в $H^{1/2+s}(\Gamma)$, $|s| < 1/2$. Отсюда следует, что сопряженный оператор γ^* корректно определен и действует ограниченным образом из $H^{-1/2-s}(\Gamma)$ в $H^{-1-s}(\mathbb{T})$. Следуя Костабелю и Маклину, положим

$$\mathcal{A} = L^{-1}\gamma^*. \tag{8.3}$$

Сразу получается, что *$\mathcal{A}$ — ограниченный оператор из $H^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $H^{1+s}(\mathbb{T})$ при $|s| < 1/2$*, в частности, при $s = 0$. С другой стороны, сравнивая (8.1) и (8.3), мы видим, что эти операторы совпадают. Более точно, оператор (8.3) является продолжением оператора (8.1) на $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Аналогичный подход к $\mathcal{B}$ несколько сложнее. Следуя Маклину, положим

$$\mathcal{B} = L^{-1}\widetilde{T}^*, \tag{8.4}$$

где $\widetilde{T}$ — гладкая конормальная производная (для формально сопряженного оператора $\widetilde{L}$) на функциях из $H^s(\mathbb{T})$ с $3/2 < s < 2$. Из этого определения мы непосредственно не можем получить удобное утверждение об ограниченности оператора $\mathcal{B}$. Однако помогает следующая ключевая *теорема о представлении* решений в липшицевых областях, по существу принадлежащая Костабелю и Маклину (они предполагали коэффициенты бесконечно гладкими).

Теорема 8.1. *Пусть $u \in H^1(\Omega^\pm)$ и $Lu = f^\pm \in \widetilde{H}^{-1}(\Omega^\pm)$, так что $f = f^+ + f^- \in H^{-1}(\mathbb{T})$. Тогда*

$$u = L^{-1}f + \mathcal{B}[u] - \mathcal{A}[Tu]. \tag{8.5}$$

Для доказательства сначала выводится формула для $(Lu, v)_{\mathbb{T}}$ ($v \in H^s(\mathbb{T})$, $3/2 < s < 2$) из четырех первых формул Грина в $\Omega^\pm$ для L и $\widetilde{L}$ с использованием формул (8.3) и (8.4). Из нее получается формула для Lu, которая и приводит к (8.5). Ср. [62, с. 202].

Теперь, *предполагая задачи Дирихле в $\Omega^\pm$ однозначно разрешимыми* и сравнивая левую и правую части в (8.5), мы видим, что *$\mathcal{B}$ — ограниченный оператор из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega^\pm)$*.

Из определений ясно, что $u = \mathcal{A}\psi$ и $u = \mathcal{B}\psi$ — решения системы $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$.

Идентификация (8.4) с (8.2) возможна, но требует специальной работы (см. [62, гл. 6] и [65, с. 219–225]).

Ниже мы фактически предполагаем для простоты, что задачи Дирихле и Неймана в $\Omega^\pm$ для системы $Lu = 0$ однозначно разрешимы, как в [8]. Более точно, обычно будем предполагать, что формы $\Phi_{\Omega^\pm}(u, u)$ коэрцитивны в нашем смысле на $H^1(\Omega^\pm)$. Кое-где можно предполагать меньше. Более тщательный анализ предположений можно смотреть в [62, гл. 6].

Ясно, что мы можем применять операции $\gamma^\pm$ и $T^\pm$ к $\mathcal{A}\psi$ с $\psi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ и к $\mathcal{B}\varphi$ с $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Предложение 8.2. *Справедливы следующие соотношения скачков*:

$$[\mathcal{A}\psi] = 0, \quad [T\mathcal{A}\psi] = -\psi, \quad [\mathcal{B}\varphi] = \varphi, \quad [T\mathcal{B}\varphi] = 0. \tag{8.6}$$

Введем следующие операторы на Γ:

$$A = \gamma^\pm\mathcal{A}, \quad B = \tfrac{1}{2}(\gamma^-\mathcal{B} + \gamma^+\mathcal{B}), \quad \widehat{B} = \tfrac{1}{2}(T^-\mathcal{A} + T^+\mathcal{A}), \quad H = -T^\pm\mathcal{B}. \tag{8.7}$$

Из (8.6) и (8.7) следует, что

$$T^\pm\mathcal{A}\psi = \pm\tfrac{1}{2}\psi + \widehat{B}\psi, \quad \gamma^\pm\mathcal{B}\varphi = \mp\tfrac{1}{2}\varphi + B\varphi. \tag{8.8}$$

Определения операторов B и $\widehat{B}$, принадлежащие Маклину, очень удачны. Дополнительное исследование показывает, что B — это *прямое значение потенциала двойного слоя на* Γ, а отсюда следует, что H — так называемый *гиперсингулярный оператор*.

Если граница и коэффициенты гладкие, то A — эллиптический ПДО порядка -1 на Γ (определения можно смотреть, например, в [1]), B и $\widehat{B}$ — ПДО нулевого порядка (при этом $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ эллиптичны) и H — эллиптический ПДО порядка -1.

Предложение 8.3. *A — ограниченный оператор из $H^{-1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, B — ограниченный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$, $\widehat{B}$ — ограниченный оператор в $H^{-1/2}(\Gamma)$, и H — ограниченный оператор из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{-1/2}(\Gamma)$.*

Предложение 8.4. *Справедливы следующие соотношения дуальности относительно продолжения скалярного произведения в* $L_2(\Gamma)$:

$$A^* = \widetilde{A}, \quad H^* = \widetilde{H}, \quad \widehat{B} = (\widetilde{B})^*, \tag{8.9}$$

где операторы $\widetilde{A}$, $\widetilde{H}$, $\widetilde{B}$ *отвечают формально сопряженному к* L *оператору* $\widetilde{L}$.

Из формулы (8.5) получаются аналогичные формулы в Ω^+ и Ω^- отдельно. В частности:

Предложение 8.5. *Если* $Lu = 0$ *в* $\Omega^\pm$, *то соответственно*

$$u = -\mathcal{B}u^+ + \mathcal{A}T^+u \ \text{ в } \ \Omega^+, \tag{8.10}$$

$$u = \mathcal{B}u^- - \mathcal{A}T^-u \ \text{ в } \ \Omega^-. \tag{8.11}$$

Правые части в (8.10) *и* (8.11) *равны нулю в* Ω^- *и* Ω^+ *соответственно.*

Переходя на границу и вычисляя также конормальные производные, получаем

Предложение 8.6. *Для решений однородной системы в* $\Omega^\pm$ *справедливы соотношения*

$$\left(\tfrac{1}{2}I + B\right)u^+ = AT^+u, \quad Hu^+ = \left(\tfrac{1}{2}I - \widehat{B}\right)T^+u; \tag{8.12}$$

$$\left(\tfrac{1}{2}I - B\right)u^- = -AT^-u, \quad -Hu^- = \left(\tfrac{1}{2}I + \widehat{B}\right)T^-u. \tag{8.13}$$

Следующие утверждения будут удобны для нас. Проверку см. в [8].

Теорема 8.7.

1. *Задачи Дирихле в* $\Omega^\pm$ *однозначно разрешимы* $\Leftrightarrow$ *оператор* $A\colon H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ *обратим.*
2. *Пусть задачи Дирихле в* $\Omega^\pm$ *однозначно разрешимы. Тогда задачи Неймана в* $\Omega^\pm$ *однозначно разрешимы* $\Leftrightarrow$ *оператор* $H\colon H^{1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ *обратим.*
3. *Пусть задачи Дирихле и Неймана в* $\Omega^\pm$ *однозначно разрешимы. Тогда операторы* $\frac{1}{2}I \pm B$ *и* $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ *обратимы соответственно в* $H^{1/2}(\Gamma)$ *и* $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, все эти операторы обратимы, если формы $\Phi_{\Omega^\pm}(u,u)$ коэрцитивны в нашем смысле на $H^1(\Omega^\pm)$.

Чтобы решить задачу Дирихле или Неймана, можно выразить $T^\pm u$ через $u^\pm$ или наоборот из (8.12)–(8.13), затем использовать (8.10) или (8.11). Но обычно ищут решение в виде потенциала простого слоя $u = \mathcal{A}\psi$ или потенциала двойного слоя $u = \mathcal{B}\varphi$ и получают уравнения для плотностей ψ или φ на Γ, однозначно разрешимые при нашем предположении о коэрцитивности.

Мы еще упомянем *проекторы Кальдерона*. Это проекторы $P^\pm$ в пространстве $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ на подпространства данных Коши (Дирихле и Неймана) для решений системы $Lu = 0$ в $\Omega^\pm$:

$$P^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I - B & A \\ H & \frac{1}{2}I + \widehat{B} \end{pmatrix}, \qquad P^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}I + B & -A \\ -H & \frac{1}{2}I - \widehat{B} \end{pmatrix}. \tag{8.14}$$

Мы имеем $P^+ + P^- = I$ и $(P^+)^2 = P^+$; последнее соотношение эквивалентно соотношениям

$$BA = A\widehat{B}, \quad HB = \widehat{B}H, \quad \tfrac{1}{4}I - B^2 = AH, \quad \tfrac{1}{4}I - (\widehat{B})^2 = HA. \tag{8.15}$$

9. Связи между задачами сопряжения и операторами на Γ

См. [8].

Предложение 9.1. *Спектральные задачи сопряжения* (7.9) *и* (7.10) *на собственных функциях эквивалентны соответственно уравнениям*

$$A^{-1}\psi = \lambda\psi \ \text{ и } \ H\varphi = \lambda\varphi \tag{9.1}$$

на Γ. *Здесь* $\psi = [Tu]$, $u = -\mathcal{A}\psi$ *и* $\varphi = [u]$, $u = \mathcal{B}\varphi$ *соответственно.*

Предложение 9.2. *Справедливы равенства*

$$A^{-1} = D_+ + D_-, \quad H^{-1} = N_+ + N_-, \tag{9.2}$$

$$N_\pm = \left(\tfrac{1}{2}I \pm B\right)^{-1} A = A\left(\tfrac{1}{2}I \pm \widehat{B}\right)^{-1}, \tag{9.3}$$

$$H^{-1} = \left(\tfrac{1}{4}I - B^2\right)^{-1} A = A\left(\tfrac{1}{4}I - \widehat{B}^2\right)^{-1}. \tag{9.4}$$

Соотношения (9.3) и (9.4) используются при нахождении спектральных асимптотик (см. следующий раздел). В двух последних равенствах в (9.3) и (9.4) используется тождество $BA = A\widehat{B}$ из (8.15).

10. Спектральные свойства операторов A, $N_\pm$ и H^{-1}

В гладком случае эти операторы не только эллиптичны, это сильно эллиптические ПДО порядка -1, и они обладают похожими спектральными свойствами.

В нашей ситуации эти операторы тоже имеют похожие свойства. Для определенности рассмотрим оператор A.

Прежде всего заметим, что из формул Грина для $u = v = \mathcal{A}\psi$ в $\Omega^\pm$ получается формула

$$(\psi, A\psi)_\Gamma = \Phi_{\Omega^+}(u,u) + \Phi_{\Omega^-}(u,u). \tag{10.1}$$

Из нее и из неравенств Гординга (3.14) с $C_4 = 0$ в $\Omega^\pm$ следует неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A\psi,\psi)_\Gamma \geqslant C_1\|\psi\|^2_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \tag{10.2}$$

Из него видна уже отмеченная выше обратимость оператора A (в силу леммы Лакса—Мильграма).

Отметим, что аналогичные неравенства верны для операторов N, D, H. «Сильная эллиптичность» операторов на границе, связанных с сильно эллиптическими системами, давно используется в литературе, см. указания в [52].

Теперь мы опишем спектральные свойства оператора A снова в трех случаях. В случае 1 предполагается выполненным условие (3.23).

Случай 1. L — *формально самосопряженный оператор.* Тогда

$$(A\psi_1,\psi_2)_\Gamma = (\psi_1, A\psi_2)_\Gamma, \quad \psi_1,\psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{10.3}$$

см. (8.9). Мы примем $H^{-1/2}(\Gamma)$ за основное гильбертово пространство и введем в нем скалярное произведение

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma)} = (A\psi_1,\psi_2)_\Gamma. \tag{10.4}$$

Предложение 10.1. *Оператор A является компактным самосопряженным оператором в $H^{-1/2}(\Gamma)$ с положительными собственными значениями. В этом пространстве существует ортонормированный базис из его собственных функций. Они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma)$ и образуют в нем ортогональный базис относительно скалярного произведения $(A^{-1}\psi_1,\psi_2)_\Gamma$. Это утверждение распространяется на промежуточные пространства $H^s(\Gamma)$, $|s| < 1/2$.*

В отношении асимптотики собственных значений удовлетворительный результат следует из работы [11]. Липшицева поверхность названа там *почти гладкой*, если она принадлежит C^∞ вне замкнутого подмножества нулевой меры («множества особенностей»).

Предложение 10.2. *Если Γ — почти гладкая поверхность, то асимптотика собственных значений — такая же, как в случае гладкой поверхности*:

$$N_{A^{-1}}(\lambda) = c_A\lambda^{n-1} + o(\lambda^{n-1}), \tag{10.5}$$

где

$$c_A = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \iint N(1,\alpha(x',\xi'))\,dx'd\xi', \tag{10.6}$$

α — главный символ оператора A^{-1}, $N(\lambda,\alpha)$ — считающая функция для α и интеграл берется относительно инвариантной меры на кокасательном расслоении $T^*\Gamma$.

Объясним некоторые детали. Сначала предположим коэффициенты оператора L гладкими. Для применения результата из [11] существенно следующее: A есть интегральный оператор с ядром, которое является сужением на $\Gamma \times \Gamma$ ядра эллиптического ПДО на торе. Конечно, этим ядром является фундаментальное решение, а оператором — ньютонов потенциал (7.5).

А именно, оператор A записывается в виде суммы операторов $A_{k,l} = \phi_k A \phi_l \cdot$, где ϕ_k — характеристическая функция подмножества E_k на Γ,

$$\Gamma = \cup E_k, \quad E_k \cap E_l = \emptyset \quad \text{при} \quad k \neq l.$$

Если E_l — гладкая часть поверхности, то асимптотика для $A_{l,l}$ известна. Для других подмножеств выводится и используется оценка

$$s_j(A_{k,l}) \leqslant C_2 \min(\varepsilon_k, \varepsilon_l) j^{-1/(n-1)}, \tag{10.7}$$

где $\varepsilon_k \to 0$, если $\operatorname{mes} E_k \to 0$. Это позволяет воспользоваться техникой теории возмущений, развитой у Бирмана—Соломяка [14, §1].

Предположение о гладкости коэффициентов устраняется аппроксимацией заданных коэффициентов гладкими функциями.

Главный символ оператора A получается по формуле

$$\alpha(x', \xi') = \frac{1}{2\pi} \int a_0^{-1}(x', 0, \xi', \xi_n)\, d\xi_n \tag{10.8}$$

в системе координат, в которой ось x_n выходит из точки $(x', 0) \in \Gamma$ и идет вдоль внешней нормали (если она существует в этой точке). См. [11].

Условие «почти гладкости» устранили в случае оператора A Розенблюм и Тащиян в [74] при помощи аппроксимации липшицевой границы гладкими поверхностями. Таким образом, окончательный результат состоит в следующем.

Теорема 10.3. *Для любой липшицевой поверхности* Γ *справедливы формулы* (10.5), (10.6).

Символ и кокасательное расслоение понимаются, конечно, формально, но кокасательное пространство и символ существуют почти всюду на Γ, и формуле (10.6) можно придать смысл как в случае почти гладкой поверхности (см. [11]), так и в общем случае (см. [74]).

Усиленной оценки остаточного члена в литературе в общем случае, по-видимому, нет.

Случай 2. *Только L_0 — формально самосопряженный оператор.* Тогда A — слабое возмущение положительного самосопряженного оператора. Обозначим его через A_0. Мы не будем уточнять порядок возмущения.

Предложение 10.4. *Собственные значения оператора A лежат в Θ_θ с произвольно малым θ, кроме, возможно, конечного их числа. При этом они лежат в правой полуплоскости. Асимптотика собственных значений такая же, как в случае* 1. *Корневые функции образуют полное множество в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$, и ряды Фурье по ним допускают суммирование методом Абеля—Лидского порядка $\beta > n-1$ в этих пространствах. Полнота имеет место также в промежуточных пространствах $H^s(\Gamma)$, $|s| < 1/2$.*

Промежуточные пространства $H^s(\Gamma)$, $|s| < 1/2$, являются областями определения операторов $A^{-\tau}$, $0 < \tau < 1$.

Случай 3. *Нет никакой самосопряженности.* Для s-чисел оператора A имеем оценку

$$s_j(A) \leqslant C_1 j^{-1/(n-1)}. \tag{10.9}$$

Предложение 10.5.

1. *Собственные значения оператора A лежат в правой полуплоскости. Пусть значения форм $\Phi_{\Omega^\pm}(u,u)$ содержатся в угле $\overline{\Theta}_\theta$. Тогда собственные значения оператора A лежат в этом угле, а вне угла $\Theta_{\theta+\varepsilon}$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$ справедлива оптимальная оценка резольвенты*

$$\|(A^{-1} - \lambda I)^{-1}\| \leqslant C_2 (1 + |\lambda|)^{-1}. \tag{10.10}$$

В предыдущем случае эта оценка верна вне Θ_ε при больших $|\lambda|$.

2. *Если*

$$\theta < \pi/2(n-1), \tag{10.11}$$

то мы имеем полноту корневых функций и суммируемость рядов Фурье по ним методом Абеля—Лидского порядка $\beta > n-1$ в $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$ и полноту в промежуточных пространствах $H^s(\Gamma)$, $|s| < 1/2$.

За исключением асимптотики собственных значений, изложенные результаты для оператора A переносятся на операторы $N_\pm$ и H^{-1}. Для оператора N асимптотику собственных значений на негладких поверхностях изучали многие математики, в частности, Сандгрен [76] и Суслина [79].

Мы в отношении асимптотики собственных значений для $N_\pm$ и H^{-1} сумеем указать здесь более скромный результат, чем для A. В этих случаях нет такого представления ядра, как в случае оператора A. Но в [11] отмечено, что результаты этой работы для интегральных операторов на почти гладкой поверхности переносятся на случай оператора, который допускает два представления T_1A и AT_2 с ограниченными в $L_2(\Gamma)$ операторами T_1 и T_2. Эти представления позволяют снова получить нужные оценки s-чисел (типа (10.7)).

Для операторов $N_\pm$ и H^{-1} мы имеем два представления (9.3) и (9.4). Однако нам нужна ограниченность и обратимость операторов $\frac{1}{2}I \pm B$ и $\frac{1}{2}I \pm \widehat{B}$ в $L_2(\Gamma)$. Такие результаты имеются в литературе, но они получены на основе совсем другого подхода к задачам в липшицевых областях, о котором мы будем говорить в п. 14, и притом в меньшей общности. Достаточно предположить, что рассматривается скалярный оператор с оператором Бельтрами—Лапласа в старшей части [66] или матричный оператор с оператором Ламе в старшей части (в области любой размерности) [46].

В этой общности и получается спектральная асимптотика для $N_\pm$ и H^{-1}, если поверхность почти гладкая (подход в [74], по-видимому, не приложим к этим операторам). Асимптотика имеет вид (10.5), (10.6). Чтобы вычислить (в гладком случае) главные символы операторов $D_\pm$ и H, достаточно вычислить главный символ оператора B (поскольку мы имеем соотношения (9.3) и (9.4)). Последнее можно сделать, используя элементарные факты теории эллиптических граничных задач, как в [29, п. 5] для системы анизотропной упругости.

11. Пространства H^s_p и B^s_p

Здесь мы кратко опишем обобщения пространств $H^s = H^s_2$ на $p \neq 2$. Основная ссылка — работа [80]; см. также [54], [67] и замечания в [39]. Мы не будем рассматривать более общие пространства Трибеля—Лизоркина и Бесова.

Всюду ниже предполагается, что

$$s \in \mathbb{R}, \quad 1 < p < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{11.1}$$

Пространство $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ бесселевых потенциалов в $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$H^s_p(\mathbb{R}^n) = J^{-s} L_p(\mathbb{R}^n), \tag{11.2}$$

где J^{-s} — оператор (2.1). Это пространство Соболева $W^s_p(\mathbb{R}^n)$, если s — положительное целое число.

Пространство Бесова $B^s_p(\mathbb{R}^n) = B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$ можно определить аналогично, заменяя пространство $L_p(\mathbb{R}^n)$ пространством Слободецкого $W^\sigma_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \sigma < 1$, в котором норма определяется формулой

$$\|u\|^p_{W^\sigma_p(\mathbb{R}^n)} = \|u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \iint \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\sigma p}}\, dxdy. \tag{11.3}$$

А именно,

$$B^s_p(\mathbb{R}^n) = F^{-1} J^{-s+\sigma} F W^\sigma_p(\mathbb{R}^n). \tag{11.4}$$

Пространства $B^s_p(\mathbb{R}^n)$ и $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ совпадают при нецелом $s > 0$.

Шкалы пространств $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ и $B^s_p(\mathbb{R}^n)$ очень близки, и обе они совпадают со шкалой пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ при $p = 2$.

Пространство $H^s_p(\Omega)$ состоит из сужений элементов пространства $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ на Ω с обычной нормой inf. Пространство $\widetilde{H}^s_p(\Omega)$ определяется как подпространство в $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ из элементов с носителями в $\overline{\Omega}$. Его можно отождествить с пополнением $\mathring{H}^s_p(\Omega)$ линеала $C^\infty_0(\Omega)$ в $H^s_p(\Omega)$, по крайней мере, при $-1/p' < s < 1/p$ и $1/p < s < 1 + 1/p$.

Пространства $H^s_p(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{-s}_{p'}(\Omega)$ дуальны (взаимно сопряжены) относительно продолжения формы $(\mathcal{E}u, v)_{\mathbb{R}^n}$, где снова $\mathcal{E}$ — универсальный оператор продолжения [75]. Пространства $H^s_p(\Omega)$ и $\widetilde{H}^s_p(\Omega)$ можно отождествить при $-1/p' < s < 1/p$.

Здесь все можно повторить, заменяя букву H буквой B.

Пространства $B^s_p(\Gamma)$ определяются при $|s| \leqslant 1$ при помощи разбиения единицы на Γ и норм в $B^s_p(\mathbb{R}^{n-1})$. Пространства $B^s_p(\Gamma)$ и $B^{-s}_{p'}(\Gamma)$ дуальны относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Gamma)$.

Оператор перехода к следу действует ограниченным образом из $H^{s+1/p}_p(\Omega)$ и из $B^{s+1/p}_p(\Omega)$ в $B^s_p(\Gamma)$ при $0 < s < 1$, и имеется общий ограниченный правый обратный оператор (см. [55]).

12. Обобщение вариационной постановки задач Дирихле и Неймана

Вернемся к формуле, определяющей задачу Дирихле с $u^+ = 0$:

$$(Lu, v)_\Omega = \Phi_\Omega(u, v). \tag{12.1}$$

Мы обобщим эту задачу следующим образом:

$$u \in \widetilde{H}^{1/2+s+1/p}_p(\Omega), \quad Lu \in H^{-1/2+s-1/p'}_p(\Omega), \quad v \in \widetilde{H}^{1/2-s+1/p'}_{p'}(\Omega). \tag{12.2}$$

Если $u^+ \neq 0$, то $u^+ \in B^{1/2+s}_p(\Gamma)$.

Задача Неймана с $T^+u = 0$ (см. снова (12.1)) обобщается аналогично:

$$u \in H^{1/2+s+1/p}_p(\Omega), \quad Lu \in \widetilde{H}^{-1/2+s-1/p'}_p(\Omega), \quad v \in H^{1/2-s+1/p'}_{p'}(\Omega). \tag{12.3}$$

Если $T^+u \neq 0$, то $T^+u \in B^{-1/2+s}_p(\Gamma)$.

Здесь всюду H можно заменить на B.

Разность индексов в пространствах для u и Lu равна 2. Функции (или обобщенные функции) v и Lu принадлежат дуальным пространствам, так же как T^+u и v^+ в форме $(T^+u, v^+)_\Gamma$. Благодаря этому все члены в формулах Грина сохраняют смысл.

Введем *квадрат* Q допустимых пар индексов в случае липшицевой области. Положим $t = 1/p$,

$$Q = \{(s, t) : |s| < 1/2,\ 0 < t < 1\}. \tag{12.4}$$

Здесь $|s| < 1/2$ из-за ограничений в теореме о следе, и $0 < t < 1$, так как $1 < p < \infty$. При $(s, t) \in Q$ мы можем рассматривать задачи в Ω и в $\Omega^\pm \subset \mathbb{T}$. До сих пор мы рассматривали только задачи в центре $(0, 1/2)$ квадрата Q, эта точка отвечает классической постановке наших задач. В следующем разделе мы увидим, что множество «хороших» точек (s, t) (в смысле однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана) можно расширить. Но в общем случае далеко не все точки (s, t) в Q «хорошие». Отметим, что формально сопряженные задачи отвечают точкам в Q, симметричным относительно центра.

13. Теоремы о регулярности и обобщения теорем об однозначной разрешимости

Утверждение о регулярности обычно имеет следующий характер. Пусть X_j и Y_j, $j = 1, 2,$ — две пары банаховых пространств, $X_2 \subset X_1$, $Y_2 \subset Y_1$, и $\mathcal{L}$ — ограниченный оператор из X_1 в Y_1, а его сужение на X_2 — ограниченный оператор из X_2 в Y_2. Тогда, если $\mathcal{L}u = f$, $u \in X_1$, но $f \in Y_2$ («лучше»), то $u \in X_2$ (тоже «лучше»).

Такие результаты могут быть связаны с обобщениями теорем об изоморфизмах.

Автору известны три подхода к теоремам о регулярности.

1. *Саваре* предложил новый метод исследования регулярности вариационных задач [77], линейных и нелинейных, обобщив метод Ниренберга «разностных отношений» [70] и использовав теорию интерполяции. Для скалярного уравнения (1.5) с вещественной симметричной матрицей $a(x)$ он показал, что если u — решение задачи Неймана с $T^+u = 0$ в центре квадрата Q, но $f \in \widetilde{H}^{-1+s}(\Omega)$, $0 < s < 1/2$, то решение принадлежит $H^{1+s}(\Omega)$. Он получил аналогичный результат и для задачи Дирихле. Используя единственность и формально сопряженные задачи, он показал, что задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы во всех точках $(s, t) \in Q$ с $t = 1/2$.

Автор проверил в [2, 6], что *то же самое верно для систем с формально самосопряженной главной частью L_0, если дополнительно*

$$\sum a^{r,s}_{j,k}(x)\zeta^s_k\overline{\zeta^r_j} \geqslant 0, \tag{13.1}$$

что, по-видимому, не является тяжелым ограничением: нам нужна неотрицательность и не нужна положительность. В частности, (13.1) следует из (3.15) (Re сейчас излишне).

2. *Шнейберг* доказал сильную теорему об экстраполяции обратимости оператора, действующего в интерполяционных шкалах пространств (или об устойчивости обратимости) [34]. А именно, предположим, что $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$ $(0 < t < 1)$ — две интерполяционные шкалы банаховых пространств (скажем, для комплексного метода). Пусть $\mathcal{T}$ — ограниченный оператор из X_t в Y_t для всех t, обратимый при некотором $t = t_0 \in (0,1)$. Тогда $\mathcal{T}$ обратим для t из некоторой окрестности $\{t \in (0,1) : |t - t_0| < \delta\}$ точки t_0. Более того, δ эффективно оценивается снизу.

Нам это дает следующее. *Если мы имеем однозначную разрешимость наших задач в точках $(s, 1/2)$, $|s| < 1/2$, то мы имеем ее в полоске*

$$Q_\delta = \{(s,t) : |s| < 1/2,\ |t - 1/2| < \delta\}, \tag{13.2}$$

где $\delta > 0$ можно оценить снизу. См. [6]. Здесь подразумевается принадлежность решений к пространствам, указанным в (12.2) и (12.3), или к аналогичным пространствам Бесова.

Более того, если мы не можем применить теорему Саваре, но имеем однозначную разрешимость в центре квадрата Q, то *мы имеем ее в некоторой окрестности $O = O(0, 1/2)$ центра* (это замечание сделано ранее в работе [61] о задаче Дирихле для систем высших порядков).

3. Давно известны алгебраические *тождества Реллиха* для систем с формально самосопряженной старшей частью. Эти тождества, грубо говоря, позволяют оценить данные Неймана через данные Дирихле и особенно удобны при исследовании регулярности для задачи Пуанкаре—Стеклова. Они также позволяют показать следующее. Если задача Дирихле однозначно разрешима в центре квадрата Q, то она однозначно разрешима в точках $(s, 1/2)$, $|s| < 1/2$. См., например, [68] и [62].

Здесь можно заменить «Дирихле» на «Неймана» и наоборот в случае *скалярного* уравнения с вещественными $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$ (см. [62, с. 149]). Аналогичный результат получен для системы Ламе в [46]. Однако более общие результаты для задачи Неймана, по-видимому, этим методом не получены.

14. Другой подход к задачам в липшицевых областях

Выше мы почти не затронули обширную теорию граничных задач в липшицевых областях, построенную в последние 30–35 лет в работах многих сильных математиков с других исходных позиций. Первые вопросы были поставлены и первые результаты были получены, в частности, в работах Дальберга, Кальдерона, Джерисона, Кенига, Веркоты. См., в частности, [43, 53, 81] и монографию [57] с обширной литературой. Мы сможем объяснить здесь идеи и результаты этого направления только очень схематически. Они относятся к неспектральным задачам.

С самого начала эти исследования были ориентированы на решение задачи Дирихле с $u^+ \in L_2(\Gamma)$ или $H^1(\Gamma)$, задачи Неймана с $T^+u \in L_2(\Gamma)$ и, далее, обеих задач с p, близким к 2, вместо $p = 2$, прежде всего для уравнения Лапласа. Конечно, такие результаты важны и полезны. Однако соответствующие точки лежат на границе квадрата Q, и обычные теоремы о следах не применимы. Поэтому потребовался другой смысл граничных условий.

А именно, использовалась *некасательная сходимость*. Чтобы определить ее, предположим зафиксированной систему одинаковых конечных круговых конусов $K(x)$ с вершинами во всех точках $x \in \Gamma$, лежащих внутри области Ω (лишь вершина лежит на границе). В задаче Дирихле, например, с $u^+ = g \in L_2(\Gamma)$ граничное условие понимается так:

$$u(y) \to u^+(x) \ \text{ поточечно при } \ K(x) \ni y \to x \tag{14.1}$$

для почти всех $x \in \Gamma$. Эта сходимость контролируется максимальной функцией $u^*(x)$:

$$u^*(x) = \max_{K(x)} |u(y)|, \quad \|u^*\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant C\|g\|_{L_2(\Gamma)}. \tag{14.2}$$

Основные технические средства — поверхностные потенциалы, они тщательно изучались.

Главное значение $B\varphi$ потенциала двойного слоя $\mathcal{B}\varphi$ на липшицевой поверхности является в общем случае сингулярным интегральным оператором даже в случае уравнения Лапласа. Поэтому возникла проблема доказательства ограниченности сингулярного интегрального оператора на липшицевой поверхности Γ в пространствах $L_2(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$. Ее решили Кальдерон [42] (для поверхности Γ с малыми липшицевыми постоянными в (1.1)), Койфман—Макинтош—Мейер [44] (для общей липшицевой поверхности, но постоянных коэффициентов в L_0) и затем Митреа—Тейлор [66] (в полной общности). См. также ссылки в этих работах.

Особенно глубокие результаты были получены для уравнений Лапласа и Бельтрами—Лапласа с использованием специальных средств из гармонического анализа и теории интерполяции, с работой на частях границы квадрата Q. Мы не будем пытаться объяснять эти исследования. Наиболее общие результаты были получены для уравнения Лапласа и задачи Дирихле в [54] и для уравнения Бельтрами—Лапласа и обеих задач в [67], см. также ссылки в этих работах. Результаты относятся к значительной части квадрата Q — между отрезками, грубо говоря, соединяющими точки 1) $(-1/2, 1/2+\varepsilon)$ и $(1/2-\varepsilon, 1)$, 2) $(-1/2+\varepsilon, 0)$ и $(1/2, 1/2-\varepsilon)$, причем охвачены также граничные точки этой области.

Использование тождеств Реллиха существенно в этом подходе. Результаты получены для задачи Дирихле для общих сильно эллиптических систем с формально самосопряженной главной частью (при $s = \pm 1/2$, см. [65] и приведенные там ссылки), но задача Неймана рассмотрена, насколько нам известно, только для скалярного уравнения с вещественными $a_{j,k}(x) = a_{k,j}(x)$ и для системы Ламе.

Спектральные вопросы затрагивались в работах этого направления (см., например, [78]), но не рассматривались систематически.

15. Обобщения неспектральных и спектральных результатов на банаховы пространства H_p^s и B_p^s

Предположим, что задачи Дирихле и Неймана однозначно разрешимы при $(s,t) \in Q_\delta$ или $O = O(0, 1/2)$. Тогда мы можем рассматривать спектральные задачи при этих (s,t). Для определенности пусть здесь $(s,t) \in Q_\delta$.

Сначала отметим, что все утверждения в разделах 8 и 9 распространяются на эти (s,t) (см. [8]). Это относится, в частности, к теореме 8.1, предложениям 8.2–8.6, теореме 8.7 и предложениям 9.1–9.2. Более точно, A, $N_\pm$ и H^{-1} как операторы из $B_p^{-1/2+s}(\Gamma)$ в $B_p^{1/2+s}(\Gamma)$ ограничены и обратимы.

Рассматривая точки (s,t) с $t = 1/2$, т.е. с $p = 2$, мы находимся в гильбертовых пространствах, и результаты обобщаются на базе хорошо известных результатов спектральной теории операторов в абстрактных гильбертовых пространствах.

В частности, если оператор L формально самосопряженный, то собственные функции оператора L_D принадлежат пространствам $H^t(\Omega)$ при $-3/2 < t < 1/2$ и пространствам $\widetilde{H}^t(\Omega)$ при $-1/2 < t < 3/2$ (напомним, что $\widetilde{H}^t(\Omega) = H^t(\Omega)$ при $-1/2 < t < 1/2$) и образуют базис относительно скалярных произведений, которые строятся с использованием степеней оператора L_D. То же верно для оператора L_N с переменой местами пространств $\widetilde{H}$ и H. Для операторов A, $N_\pm$ и H^{-1} дело обстоит аналогично в пространствах $H^t(\Gamma)$, $|t| < 1$.

Если только оператор L_0 является формально самосопряженным, то мы рассматриваем те же операторы как слабые возмущения положительных самосопряженных операторов и получаем результаты о полноте корневых функций в тех же пространствах. Результаты для L_D по суммируемости получаются в $H^t(\Omega)$ при $-3/2 < t < -1/2$ и в $\widetilde{H}^t(\Omega)$ при $1/2 < t < 3/2$.

Наконец, если нет никакой самосопряженности, то мы обобщаем эти же результаты о полноте и суммируемости при тех же, что и раньше, условиях на угол, содержащий значения квадратичной формы $\Phi_\Omega(u,u)$, — см. неравенства (6.8) и (10.11).

Принципиально новая ситуация возникает, когда мы рассматриваем наши операторы в банаховых пространствах, соответствующих точкам (s,t) с $t \neq 1/2$. Здесь мы получаем только результаты о полноте и суммируемости.

Заметим, что наши спектральные задачи «лучше», чем общие абстрактные спектральные задачи в банаховых пространствах. А именно, используя только спектральные уравнения и вложения пространств, мы можем проверить, что спектр и собственные или корневые функции не зависят от (s,t) — принадлежат всем рассматриваемым пространствам — и проверить полноту в этих пространствах (при отсутствии какой-либо самосопряженности — если выполнены условия (6.8) и (10.11)). См. [7].

Однако интересно выяснить, что можно получить в рамках абстрактной спектральной теории в банаховых пространствах. По-видимому, разработку соответствующих понятий начал Гротендик [50], [51]. На основе его теории, не очень прозрачной, некоторые обобщения теорем о полноте и суммируемости методом Абеля—Лидского на случай банаховых пространств получил Маркус [27].

Позднее основные понятия спектральной теории изучались и улучшались в очень многочисленных работах. Имеются монографии [73] и [58], содержащие удобный материал (может быть, в слишком многочисленных вариантах). На этой базе Бургонь в [41] доказала теорему о полноте для операторов в банаховом пространстве типа теоремы Данфорда—Шварца. Автор получил абстрактный вариант теоремы о суммируемости методом Абеля—Лидского и попутно доказал теорему Бургонь (не зная о ее работе) в немного улучшенной форме. Эти теоремы приложимы к рассматриваемым здесь задачам при $t \neq 1/2$. См. [7]. По существу это лишь новая редакция результатов Маркуса.

Добавим, что дополнительная информация о полноте корневых функций в пространствах, отвечающих точкам $(s,t) \in Q$, получается с учетом вложений этих пространств.

Мы кратко наметим здесь, как получается результат о суммируемости для наших операторов в H_p^s и B_p^s. Детали можно смотреть в [7].

Первый вопрос состоит в следующем: какой выбрать аналог s-чисел? Можно пытаться использовать разные возможности. На наш взгляд, удобнее всего аппроксимационные числа a_j. Их определение аналогично второму определению s-чисел в гильбертовом пространстве (см. п. 5.1), и в этом случае a_j совпадают с s_j.

Необходимые оценки для них, приложимые к нашим операторам, содержатся в книге [47]; этим результатам предшествовали результаты Бирмана—Соломяка. Эти оценки выглядят в точности так же, как оценки для s-чисел при $p = 2$, см. (6.2) и (10.9).

Нам нужны равномерные оптимальные оценки резольвент вне некоторого угла Θ_θ. Они получаются с использованием результатов теории интерполяции, включая результаты Шнейберга.

Кстати, эти оценки, как отмечено в [7], позволяют получить результаты по однозначной разрешимости смешанных «параболических» задач в цилиндрической области $\Omega \times \mathbb{R}_+$ с использованием средств теории полугрупп.

Далее нам нужно представить резольвенту в виде отношения целых аналитических функций, операторнозначной и числовой, с оценками их роста. Для наших операторов это получается в нужных пространствах.

Теперь рассмотрим для определенности задачу Пуанкаре—Стеклова. Пусть f — функция на Γ из соответствующего пространства Бесова. Положим

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\theta} (D - \lambda I)^{-1} e^{-\lambda^\beta t} d\lambda f \tag{15.1}$$

с интегрированием вдоль границы γ_θ сектора Θ_θ в положительном направлении относительно этого сектора. Используя глубокие теоремы из теории целых аналитических функций [25], мы доказываем возможность найти такую последовательность дуг возрастающих радиусов, делящих сектор Θ_θ на конечные области, что интеграл $f(t)$ записывается в виде суммы интегралов $f_j(t)$ по границам γ_j этих областей. При этом

$$f = \lim_{t \to +0} \sum f_j(t). \tag{15.2}$$

Это и есть суммируемость ряда Фурье по корневым функциям методом Абеля—Лидского порядка β в банаховом пространстве, в нашем случае в пространстве Бесова.

В литературе имеется несколько работ, в которых авторы пытались найти условия на оператор в банаховом пространстве, достаточные для наличия базиса в нем из собственных функций. См. ссылки в [27]. Отметим, что в нашей ситуации в случае формальной самосопряженности оператора система его собственных функций «биортогональна самой себе» в наших банаховых пространствах относительно продолжения скалярного произведения в $L_2(\Omega)$ или $L_2(\Gamma)$. Но никаких общих результатов о ее базисности в этих банаховых пространствах мы не знаем. При $p \neq 2$ мы располагаем только результатами по полноте и суммируемости методом Абеля—Лидского для этих операторов.

16. Некоторые обобщения

Выше мы рассмотрели только простейшие задачи. Имеется много полезных вариантов этих задач, и некоторые из них перечислены в [5] и [8]. В частности, можно рассмотреть «третье граничное условие» $T^+u(x) - \sigma(x)u^+(x) = h(x)$. Ниже мы добавим несколько слов в основном о спектральных задачах.

1. *Смешанные спектральные задачи.* Предположим, что граница состоит из двух или большего числа частей Γ_j, на которых заданы разные граничные условия. Спектральный параметр входит или в систему, или в третье граничное условие на одной из частей Γ_j. Такие задачи для скалярного уравнения рассмотрены в [30]. См. также общие многокомпонентные задачи в [18]. Спектральные асимптотики исследованы в [38,76,79]. Вообще же литература по смешанным задачам чрезвычайно обширна, и это связано с тем, что они встречаются во многих приложениях. В частности, см. [62]. См. также [10] и указанную там литературу.

2. *Общие и спектральные задачи с граничными условиями или условиями сопряжения на липшицевой поверхности с краем.* См. [9] и указанную там литературу.

3. *Системы высших порядков.* Задача Дирихле в липшицевой области для сильно эллиптических систем со структурой Дуглиса—Ниренберга впервые рассмотрена в [70]. Автор рассмотрел задачи Дирихле и Неймана с однородными граничными условиями (и задачу Дирихле с неоднородными граничными условиями) для этих систем в статье [6]. До нее важные работы об уравнениях и системах высших порядков в направлении, о котором мы говорили в разделе 14, написали, в частности, Адольфсон, Дальберг, Пайпер, Кениг, Веркота, см. ссылки в [6]. См. также работу [61] о задаче Дирихле в весовых пространствах. Спектральные асимптотики с остаточными членами для задач с однородными условиями Дирихле, Неймана и более общими были найдены в [63]. Выше, в разделе 4, мы сказали об этом только в случае уравнений второго порядка.

Наше заключение: общая и спектральная теории основных граничных задач для сильно эллиптических систем в липщицевых областях похожи на аналогичные разделы теорий для гладких эллиптических задач, но существуют в узком диапазоне функциональных пространств со сдвигом верхнего индекса в сторону отрицательных значений.

Автор искренне благодарен профессорам Б. Маклину, Б.А. Пламеневскому и Т.А. Суслиной, просмотревшим рукопись и приславшим очень ценные замечания.

Приведенный дальше список литературы не достаточен для «реконструкции истории». Но мы надеемся, что в каждом вопросе достаточно добавить ссылки на литературу из соответствующих работ нашего списка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Эллиптические операторы на замкнутых многообразиях // Итоги науки и техн., Совр. проблемы матем., Фунд. напр. — М.: ВИНИТИ, 1990. — *63.* — С. 3–129.
2. *Агранович М. С.* Спектральные свойства операторов типа потенциала для некоторого класса сильно эллиптических систем на гладких и липшицевых поверхностях // Тр. Моск. мат. об-ва. — 2001. — *62.* — С. 3–53.
3. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
4. *Агранович М. С.* Операторы с дискретным спектром // Лекции в Независимом московском университете, 2004–2005. http://agranovich.nm.ru
5. *Агранович М. С.* Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях // Функц. анализ и его прилож. — 2006. — *40*, № 4. — С. 83–103.
6. *Агранович М. С.* К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях // Функц. анализ и его прилож. — 2007. — *41*, № 4. — С. 1–21.
7. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липщицевых областях для сильно эллиптических систем в банаховых пространствах H_p^σ и B_p^σ // Функц. анализ и его прилож. — 2008. — *42*, № 4. — 2–23.

8. *Агранович М. С.* Операторы типа потенциала и задачи сопряжения для сильно эллиптических систем 2-го порядка в областях с липшицевой границей // Функц. анализ и его прилож. — 2009. — *43*, № 3. — С. 3–25.
9. *Агранович М. С.* Сильно эллиптические системы 2-го порядка с граничными условиями на незамкнутой липшицевой поверхности // Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 1. — С. 1–15.
10. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка // Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 2. — В печати.
11. *Агранович М.С, Амосов Б. А.* Оценки s-чисел и спектральные асимптотики операторов типа потенциала на негладких поверхностях // Функц. анализ и его прилож. — 1996. — *30*, № 2. — С. 1–18.
12. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
13. *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение. — М.: Мир, 1980.
14. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральные асимптотики для негладких эллиптических операторов, I // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1972. — *27*. — С. 3–52.
15. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральные асимптотики для негладких эллиптических операторов, II // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1973. — *28*. — С. 3–34.
16. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Количественный анализ в теоремах вложения Соболева и приложения к спектральной теории. // X Математическая школа. — Киев: Математический институт, 1974. — С. 5–189.
17. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.
18. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д.,Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 5–44.
19. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в задачах дифракции. С добавлением Аграновича М. С.: Спектральные свойства задач дифракции. — М.: Наука, 1977.
20. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
21. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. II. — М.: Мир, 1966.
22. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
23. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
24. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
25. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
26. *Лидский В. Б.* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1962. — *11*. — С. 3–35.
27. *Маркус А. С.* Некоторые признаки полноты системы корневых векторов линейных операторов в банаховом пространстве // Мат. сб. — 1966. — *70*, № 4. — С. 526–561.
28. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
29. *Натрошвили Д. Г.* Исследование краевых и начально-краевых задач математической теории упругости и термоупругости для однородных анизотропных сред методом потенциала // Дисс. д. ф.-м. н., Тбилиси, 1984.
30. *Пальцев Б. В.* О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях // Мат. сб. — 1996. — *187*, № 4. — С. 59–116.
31. *Розенблюм Г. В., Соломяк М. З., Шубин М. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов // Итоги науки и техн., Совр. проблемы матем., Фунд. напр., — М.: ВИНИТИ, 1989. — *64*.
32. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
33. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
34. *Шнейберг И. Я.* Спектральные свойства линейных операторов в интерполяционных семействах банаховых пространств // Матем. иссл. — 1974. — *9*, № 2. — С. 214–227.
35. *Agmon Sh.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Comm. Pure Appl. Math. — 1962. — *15*. — С. 119–147.
36. *Agmon Sh.* Lectures on elliptic boundary value problems. — Princeton: Van Nostrand, 1965.

37. *Agranovich M. S.* Elliptic boundary problems. — Encyclopaedia Math. Sci. — Berlin etc.: Springer, 1997. — *79.* — С. 1–144.
38. *Agranovich M. S.* On a mixed Poincaré–Steklov type spectral problem in a Lipschitz domain // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 3. — С. 281–286.
39. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — С. 146–155.
40. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of egenoscillations in difraction theory. — Berlin: Viley–VCH, 1999. Переработанная английская версия книги [19].
41. *Burgoyne J.* Denseness of the generalized eigenvectors of a discrete operator in a Banach space // J. Operator Theory. — 1995. — *33.* — С. 279–297.
42. *Calderón A. P.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1977. — *74*, № 4. — С. 1324–1327.
43. *Calderón A. P.* Boundary value problem for the Laplace equation in Lipschitzean domains. // In: Recent Progress in Fourier Analysis. North Holland Math. Stud. — 1985. — *111.* — С. 33–48.
44. *Coifman R. R., McIntosh A., Meyer Y.* L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les curbes lipschitziennes // Ann. of Math. (2) — 1982. — *116*, № 2. — С. 361–387.
45. *Costabel M.* Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results // SIAM J. Math. Anal. — 1988. — *19.* — С. 613–626.
46. *Dahlberg B., Kenig C. E., Verchota G. C.* Boundary value problems for the system of elastostatics in Lipschitz domains // Duke Math. J. — 1988. — *57.* — С. 795–818.
47. *Edmunds D. E., Triebel H.* Function spaces, entropy numbers and differential operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
48. *Gårding L.* Dirichlet problem for linear elliptic partial differential equations // Math. Scand. — 1953. — *1.* — С. 55–72.
49. *Grisward P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. — Boston: Pitman, 1985.
50. *Grothendieck A.* Produits tenzoriels topologiques et espaces nucléaires. // Mem. Amer. Math. Soc.— 1955.— *16.*
51. *Grothendieck A.* La theórie de Fredholm // Bull. Soc. Math. France. — 1956. — *84.* — С. 319–384.
52. *Hsiao G. C., Wendland W. L.* Boundary integral equations. —Berlin etc.: Springer, 2008.
53. *Jerison D., Kenig C. E.* Boundary value problems on Lipschitz domains // MAA Stud. Math. —1982. — *23.* — С. 1–68.
54. *Jerison D., Kenig C. E.* The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. — 1995. — *130*, № 1. — 164–219.
55. *Jonsson A., Wallin H.* Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$. — Math. Rep. Vol. 2, Pt. 1. — London etc.: Harwood Acad. Publ., 1984.
56. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13.* — С. 246–274.
57. *Kenig C. E.* Harmonic analysis techniques for second order elliptic boundary value problems. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
58. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators, — Basel: Birkhäuser, 1986.
59. *Lax P., Milgram A.* Parabolic equations // In: Contributions to the Theory of Partial Differential Equations, Ann. of Math. Stud. — 1954. — *33.* — С. 167–190.
60. *Lions J.-L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionaires d'opérateurs // J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14.* — С. 233–248.
61. *Maz'ya V., Mitrea M., Shaposhnikova T.* The Dirichlet problem in Lipschitz domains for higher order elliptic systems with rough coefficients. — `http://arxiv.org/abs/math/0701898`. — 2007.
62. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
63. *Métivier G.* Valeurs propres de problémes aux limites elliptiques irreguliers //Bull. Soc. Math. France. — 1977. — Mémoire 51-52. —С. 125–219.
64. *Mikhailov S. E.* Traces, extensions, co-normal derivatives and solution regularity of elliptic systems with smooth and non-smooth coefficients. — `http://arxiv.org/abs/math/0906.3875`. — 2009.
65. *Mitrea D., Mitrea M., Taylor M.* Layer potentials, the Hodge Laplacian, and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds // Mem. Amer. Math. Soc. — *150*, № 713. — 2001.
66. *Mitrea M., Taylor M.* Boundary layer methods for Lipschitz domains in Riemannian manifolds // J. Funct. Anal. — 1999. — *163.* — С. 181–251.
67. *Mitrea M., M. Taylor M.* Potential Theory on Lipschitz domains in Riemannian manifolds: Sobolev–Besov results and the Poisson problem // J. Funct. Anal. — 2000. — *176.* — С. 1–79.

68. *Nečhas J.* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques. — Paris: Masson, 1967.
69. *Netrusov Yu., Safarov Yu.* Weyl asymptotic formula for the Laplacian on domains with rough boundaries // Comm. Math. Phys. — 2005. — *253*. — С. 481–509.
70. *Nirenberg L.* Remarks on strongly elliptic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1955. — *8*. — С. 649–675.
71. *Oleinik O. A., Shamaev A. S., Yosifian G. A.* Mathematical problems in elasticity and homogenization. — Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 1992.
72. *Von Petersdorff T.* Boundary integral equations for mixed Dirichlet, Neumann and transmission problems// Math. Methods Appl. Sci. — 1989. — *11*. — С. 185–213.
73. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-numbers. — Leipzig: Academie Verlag, 1987.
74. *Rozenblum G., Tashchiyan G.* Eigenvalue asymptotics for potential type operators on Lipschitz surfaces // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *13*, № 3. — С. 326–339.
75. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains // J. London Math. Soc. (2) — 1999. — *60*, № 1. — С. 237–257.
76. *Sandgren L.* A vibration problem // Medd. Lund Univ. Math. Sem. — 1955. — 13. — С. 1–84.
77. *Savaré J.* Regularity results for elliptic equations in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. — 1998. — *152*, № 1. — С. 176–201.
78. *Shen Z.* Resolvent estimates in L^p for elliptic systems in Lipschitz domains // J. Funct. Anal. — 1995. — *133*, № 1. — С. 224–251.
79. *Suslina T. A.* Spectral asymptotics of variational problems with elliptic constraints in domains with piecewise smooth boundary // Russ. J. Math. Phys. — 1999. — *6*, № 2. — С. 214–234.
80. *Triebel H.* Function spaces in Lipschitz domains and on Lipschitz manifolds. Characteristic functions as pointwise multipliers // Rev. Mat. Comput. — 2002. — *15*, № 2. — С. 475–524.
81. *Verchota G.* Layer potentials and regularity for the Dirichlet problem for Laplace's equation in Lipschitz domains. // J. Funct. Anal. — 1984. — *59*. — С. 572–611.
82. *Wolff T. H.* A note on interpolation spaces // Lecture Notes in Math., 908. — Berlin etc.: Springer, 1982. — С. 199–204.

Михаил Семенович Агранович
Московский институт электроники и математики
E-mail: `magran@orc.ru`