УДК 519.83

# ТЕОРЕТИКО-ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ МНОГОШАГОВЫХ БИРЖЕВЫХ ТОРГОВ СО СЛУЧАЙНЫМ МОМЕНТОМ РАСКРЫТИЯ ИНСАЙДЕРСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

**М.С. Сандомирская**

*Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН*

Россия, 191187, Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1

E-mail: sandomirskaya_ms@mail.ru

**Ключевые слова:** повторяющиеся игры с неполной информацией, биржевые торги, раскрытие инсайдерской информации, случайный момент остановки, простое случайное блуждание с поглощением

**Аннотация:** Исследуется теоретико-игровая модель многошаговых биржевых торгов с асимметричной информационной структурой, когда на фондовом рынке имеется игрок, обладающий инсайдерской информацией о ликвидной цене рискового актива. Модель формализуется при помощи повторяющейся игры с неполной информацией. Рассмотрен случай остановки бесконечношаговой игры в случайный момент времени. Найден выигрыш инсайдера в игре случайной продолжительности при использовании им стратегии, оптимальной в бесконечношаговой игре. Полученный результат позволяет определять убыток инсайдера в случае внезапного раскрытия его приватной информации.

## 1. Введение

Моделирование биржевых торгов при помощи повторяющихся игр с неполной информацией позволяет изучать стратегические факторы, влияющие на ценообразование на финансовом рынке. Мы исследуем модели с асимметричной информационной структурой, а именно когда на финансовом рынке имеется игрок, обладающий инсайдерской информацией о ликвидной цене рисковых активов. При продолжительном взаимодействии инсайдеры не заинтересованы в быстром раскрытии своей приватной информации. Это приводит к тому, что инсайдеры рандомизируют свои действия, вследствие чего в эволюции цен появляется осциллирующая компонента.

Рассматривается дискретная модель многошаговых биржевых торгов между двумя агентами за рисковые активы (акции одного типа), введенная В. Доманским в 2005 году. Ликвидная цена акции зависит от состояния природы: перед началом торгов случайный ход (шоковое экзогенное событие) определяет состояние природы и, следовательно, ликвидную цену акции на весь период торгов. Цена равняется $m$ с вероятностью $p$ и 0 с вероятностью $1 - p$. После случайного хода Игрок 1 получает сообщение о выборе случая, а Игрок 2 нет. Оба игрока знают вероятность случайного хода. Наличие у Игрока 1 приватной информации является общим знанием.

На каждом шаге торгов $n = 1, 2, ..., N$ игроки одновременно называют целочисленную цену за одну акцию. Назвавший бо́льшую цену покупает по ней одну акцию у оппонента. Если ставки совпадают, то транзакции не происходит. В этой базовой модели цены покупки и продажи (бид и аск) совпадают. После каждого хода ставки игроков оглашаются. Целью каждого игрока является максимизация своего итогового капитала (полученные деньги плюс денежный эквивалент приобретенных акций).

Модель сводится к $N$-шаговой игре $G_N^m(p)$ с неполной информацией с двумя состояниями природы — возможными значениями ликвидной цены акции — и дискретными множествами действий игроков. В силу комбинаторных сложностей исчерпывающий анализ этих моделей ранее удалось провести лишь в предположении, что продолжительность торгов заранее не ограничена.

Игра $G_\infty^m(p)$ с бесконечным числом шагов была решена в работе В. Доманского [4]. Ее значение $V_\infty^m(p)$ является непрерывной, выпуклой, кусочно-линейной функцией с $m$ областями линейности $[k/m, (k+1)/m]$, $k = 0, \ldots, m-1$, и значениями в точках излома $V_\infty^m(k/m) = k(m-k)/2$. Оптимальная стратегия Игрока 1 порождает простое случайное блуждание апостериорных вероятностей по решетке $l/m$, $l = 0, \ldots, m$, с поглощением в крайних точках 0 и 1. Поглощение означает обнаружение Игроком 2 истинной цены акции. Стратегия $\sigma^m$ обеспечивает Игроку 1 ожидаемый выигрыш за шаг, равный 1/2, на каждом шаге блуждания до поглощения.

В 2013 году впервые была исследована модель с конечным числом шагов [2]. Найден выигрыш инсайдера в игре $G_N^m(k/m)$ при использовании стратегии $\sigma^m$, оптимальной для игры $G_\infty^m(k/m)$. Показано, что данная стратегия инсайдера является $\varepsilon$-оптимальной для конечношаговой игры, причем $\varepsilon$ убывает экспоненциально с ростом числа шагов $N$.

В настоящей работе рассмотрена ситуация, когда число шагов представляет собой случайную величину.

Применение инсайдером стратегии $\sigma^m$ мотивировано возможной интерпретацией $N$-шаговой игры как внезапной (неожиданной для инсайдера) остановки бесконечношаговой игры на шаге $N$. Это может произойти, например, вследствие утечки приватной информации инсайдера, при которой эта информация становится общим знанием. Естественно, в этом случае инсайдер теряет свое стратегическое преимущество, и на последующих шагах игра становится симметричной. При этом инсайдер теряет ту часть выигрыша, которую он не успел выиграть в игре бесконечной продолжительности. Такую потерю выигрыша инсайдера мы называем ценой внезапного раскрытия инсайдерской информации.

## 2. Выигрыш инсайдера в $N$-шаговой игре, гарантированный стратегией $\sigma^m$

Пусть $K_N^m(p, \sigma, \tau)$ — функция выигрыша инсайдера в игре $G_N^m(p)$. Обозначим через $\beta_N^m(k) = \mathbb{E}_k \min\{\Theta_k^m, N\}$ ожидаемую длину пути к моменту времени $N$ простого случайного блуждания, стартующего из точки $k/m$, по решетке $l/m$, $l = 0, \ldots, m$, с поглощением в крайних точках ($\Theta_k^m$ — случайный момент поглощения).

Выигрыш инсайдера за первые $N$ шагов при использовании стратегии $\sigma^m$ составляет

$$\inf_{\tau} K_N^m(k/m, \sigma^m, \tau) = \frac{1}{2}\beta_N^m(k).$$

Введем обозначение для цены внезапного раскрытия инсайдерской информации на шаге $N$ в бесконечной игре $G_\infty^m(k/m)$:

$$\varepsilon_N^m(k) = V_\infty^m(k/m) - \inf_{\tau} K_N^m(k/m, \sigma^m, \tau).$$

Задача вычисления цены внезапного раскрытия инсайдерской информации на шаге $N$ в игре $G_\infty^m(k/m)$ сводится к нахождению $\beta_N^m(k)$.

**Теорема 1.** *Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации экспоненциально убывает с ростом $N$ и вычисляется по формуле*

$$\varepsilon_N^m(k) = \sum_{l=1}^{[m/2]} \left(\cos\frac{\pi(2l-1)}{m}\right)^N A_l^m(k),$$

*где $[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha$, и коэффициенты $A_l^m(k)$ равны*

$$A_l^m(k) = \frac{1}{2m}\sin\frac{\pi k(2l-1)}{m}\mathrm{ctg}\frac{\pi(2l-1)}{2m}\left(1 + \mathrm{ctg}^2\frac{\pi(2l-1)}{2m}\right).$$

В следующей теореме установлена нижняя граница для значения $N$-шаговой повторяющейся игры $G_N^m(k/m)$.

**Теорема 2.** *Значение $V_N^m(k/m)$ конечношаговой игры $G_N^m(k/m)$ ограничено снизу функцией $L_N^m(k/m)$ — выигрышем, гарантированным стратегией $\sigma^m$ Игрока 1:*

$$L_N^m(k/m) = \frac{(m-k)k}{2} - \varepsilon_N^m(k), \quad k = 1, \dots m-1.$$

**Следствие 1.** *Стратегия $\sigma^m$ является $\varepsilon_N^m$-оптимальной стратегией Игрока 1 в $N$-шаговой повторяющейся игре $G_N^m(k/m)$, где $\varepsilon_N^m = O(\cos^N \frac{\pi}{m})$ при $N \to \infty$. При этом «поправочный член» $\varepsilon_N^m(k)$ уменьшается экспоненциально с ростом $N$.*

Другими словами, последовательность значений $N$-шаговых игр сходится к значению бесконечношаговой игры по меньшей мере с экспоненциальной скоростью.

Если одновременно $N \to \infty$ и $m \to \infty$, то в асимптотическом режиме, когда $m = o(\sqrt{N})$, цена внезапного раскрытия информации

$$\varepsilon_N^m(k) \to 0$$

равномерно по $k$. То есть в этой ситуации применение инсайдером в $N$-шаговой игре стратегии $\sigma^m$ является оправданным. В другом асимптотическом режиме $\sqrt{N} = o(m)$ дискретностью модели можно пренебречь и асимптотически оптимальным является применение оптимальной стратегии из $N$-шаговой игры с непрерывными ставками, рассмотренной Б. Де Мейером и М. Салей [3].

# 3. Торги со случайным моментом остановки

Пусть теперь в бесконечношаговой игре $G_\infty^m(p)$ раскрытие информации происходит в случайный момент времени $\xi$:

$$\mathbb{P}(\{\xi = n\}) = q_n.$$

**Теорема 3.** *Имеет место следующая формула для ожидаемой к случайному моменту $\xi$ длины пути простого случайного блуждания, стартующего из точки $k/m$, по решетке $l/m$, $l = 0, \ldots, m$, с поглощением в крайних точках:*

$$\beta_\xi^m(k) = \mathbb{E} \min\{\Theta_k^m, \xi\} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \beta_n^m(k).$$

Обозначим через $f_\xi(t)$ производящую функцию распределения случайной величины $\xi$:

$$f_\xi(t) = \mathbb{E}\, t^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n.$$

**Следствие 2.** *В игре $G_\xi^m(k/m)$ случайной продолжительности $\xi$ инсайдер, применяя стратегию $\sigma^m$, гарантирует себе выигрыш $L_\xi^m(k/m)$:*

$$L_\xi^m(k/m) = \frac{(m-k)k}{2} - \sum_{l=1}^{[m/2]} f_\xi\left(\cos\frac{\pi(2l-1)}{m}\right) A_l^m(k), \quad k = 1, \ldots m-1,$$

*коэффициенты $A_l^m(k)$ определены согласно теореме 1.*

Смысл следующего утверждения состоит в том, что если остановка происходит достаточно поздно, то ожидаемая длина пути остановленного простого случайного блуждания с поглощением близка к соответствующей длине пути в случае отсутствия остановки.

**Утверждение 1.** *Рассмотрим последовательность $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ случайных моментов остановки. Тогда*

$$\left(\beta_{\xi_i}^m \xrightarrow[i\to\infty]{} \beta_\infty^m(k)\right) \iff \left(\forall n \quad \mathbb{P}(\{\xi_i \leqslant n\}) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0\right).$$

**Следствие 3.** *Стратегия инсайдера $\sigma^m$ является $\varepsilon$-оптимальной в игре $G_\xi^m(k/m)$ случайной продолжительности $\xi$ с*

$$\varepsilon = L \cdot \max_l |A_l^m(k)| f_\xi\left(\cos\frac{\pi}{m}\right),$$

*где $L$ — константа, не зависящая от распределения $\xi$. Если $\forall n$ $\mathbb{P}(\{\xi_i \leqslant n\}) \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$, то $\varepsilon \to 0$.*

# 4. Заключение

До 2013 года для дискретных моделей финансового рынка не анализировалась общая асимптотическая постановка с большой, но конечной продолжительностью торгов $N$. Ранее случай конечного $N$ удавалось исследовать при $m = 3$ (в простейшей нетривиальной ситуации) [1]. Разработанный подход к анализу конечношаговой игры на базе решения бесконечношаговой игры продемонстрировал свою эффективность в применении к ситуации раскрытия инсайдерской информации в бесконечной игре торгов в случайный момент времени. В ближайшем будущем его планируется использовать в анализе модели биржевых торгов с дисконтированием.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (13-01-00462а).

# Список литературы

1. Крепс В.Л. Повторяющиеся игры, моделирующие биржевые торги, и возвратные последовательности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2009. Вып. 4. С. 109-120.
2. Сандомирская М.С. Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации на фондовом рынке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. 2014. Вып. 1.
3. De Meyer B., Moussa Saley H. On the Strategic Origin of Brownian Motion in Finance // International Journal of Game Theory. 2002. Vol. 31. P. 285-319.
4. Domansky V. Repeated games with asymmetric information and random price fluctuations at finance markets // International Journal of Game Theory. 2007. Vol. 36. P. 241-257.