ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Ноябрь—декабрь 2008. Том 15, № 6. С. 3–10

УДК 519.178

КРИТЕРИЙ ГРАНИЧНОСТИ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

В. Е. Алексеев, Д. С. Малышев

Аннотация. Даётся новое определение граничного класса графов и доказывается критерий граничности. В качестве примера его применения рассматривается класс, состоящий из графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Известен ряд задач, для которых этот класс является граничным. Получены достаточные условия его граничности и доказано, что он является граничным для задач о наибольшем двудольном подграфе и наибольшем планарном подграфе.

Ключевые слова: вычислительная сложность, граничный класс, задача о наибольшем подграфе.

Введение

Известны многочисленные случаи, когда та или иная NP-трудная задача на графах становится полиномиально разрешимой или остаётся трудной при введении дополнительных ограничений на вход, т. е. при сужении класса графов. Например, задача о независимом множестве NP-полна для класса планарных графов и разрешима за полиномиальное время для двудольных графов. Рассматривая какое-либо представительное семейство классов графов, можно попытаться нащупать линию раздела между «простыми» и «сложными» классами для той или иной задачи. Такая попытка была предпринята в [1] для задачи о независимом множестве. Намеченный в ней подход был развит в [2, 4–6]. В этих работах рассматриваются наследственные классы графов, т. е. классы, замкнутые относительно изоморфизма и удаления вершин. Такой класс определяется множеством запрещённых (порождённых) подграфов. Если это множество конечно, класс называется *конечно определённым*.

В [4] введено понятие граничного класса. Наследственный класс называется НМ-*сложным*, если задача о независимом множестве NP-полна для графов из этого класса, и НМ-*простым*, если она решается за полиномиальное время. Класс называется НМ-*предельным*, если он является пересечением убывающей последовательности НМ-сложных классов.

Минимальный по включению НМ-предельный класс называется НМ-*граничным*. Значение понятия граничного класса раскрывает

Теорема 1 [4]. *Конечно определённый класс является* НМ-*сложным тогда и только тогда, когда в нём содержится* НМ-*граничный класс.*

В [4] также доказано, что класс **T**, состоящий из лесов, у которых степени вершин не превосходят 3, а в каждой компоненте связности имеется не более одной вершины степени 3, является граничным. Это утверждение верно при условии, что P $\neq$ NP. Некоторые результаты этой статьи и цитируемые ниже результаты других работ также справедливы при условии справедливости этой гипотезы. Мы не будем включать это условие явно в формулировки соответствующих теорем, предполагая, что оно выполнено.

В [5] понятие граничного класса применено к задаче о доминирующем множестве и доказана граничность трёх классов, одним из которых является класс **T**.

В [6] понятие граничного класса распространяется на любую NP-трудную задачу Π на графах. Теорема 1 остаётся справедливой в общем случае. В [6] доказывается, что класс **T** является граничным для задач о независимом доминирующем множестве, о порождённом паросочетании, о максимальном цикле, о максимальном пути, о рёберном доминирующем множестве, о разобщённом множестве, о P_3-факторе. Общий план этих доказательств включает предварительное установление того факта, что та или иная задача полиномиально разрешима для любого сильно наследственного класса (наследственного класса, замкнутого ещё и относительно удаления рёбер), не включающего класс **T**.

Недостатком приведённых выше определений является то, что игнорируется возможность существования классов промежуточной сложности, для которых задача Π не является ни NP-полной, ни полиномиально разрешимой [3]. Если нас интересует граница между классами, для которых задача решается эффективно (за полиномиальное время), и теми, для которых такого решения не существует, то правильнее было бы определить Π-сложный класс как наследственный класс, не являющийся Π-простым. Именно такой позиции мы придерживаемся в настоящей статье. Соответственно новое содержание приобретают понятия предельного и граничного классов, хотя их определения остаются прежними. Теорема 1 справедлива при новом определении практически с тем же доказательством.

Если некоторый класс является Π-предельным при старом определении Π-сложного класса, то он Π-предельный и при новом. Для granичных классов это, вообще говоря, не так. Однако граничность в новом смысле класса $\mathbf{T}$ для всех случаев из [6] сохраняется. Это легко показать, практически полностью повторяя соответствующие доказательства из [6].

Тот факт, что установлена граничность именно класса $\mathbf{T}$ для целого ряда задач, отражает, по-видимому, однообразие применявшегося до сих пор подхода к исследованию граничности. Вместе с тем интересно было бы выявить общие черты задач, для которых этот класс является граничным. Именно это было первоначальной целью настоящей статьи, однако теперь мы считаем главным её результатом критерий граничности (теорема 2). Остальная часть работы демонстрирует применение этого нового инструмента к исследованию граничности класса $\mathbf{T}$ для различных задач. Получены достаточные условия его граничности для общей задачи о наибольшем подграфе, доказана граничность для задач о наибольшем двудольном и наибольшем планарном подграфе. Мы надеемся, что критерий окажется полезным для исследования других задач и других граничных классов.

Под классом графов понимаем множество графов, замкнутое относительно изоморфизма. Через $\mathrm{Free}(\mathbf{X})$ обозначается класс графов, не имеющих порождённых подграфов, изоморфных графам из множества $\mathbf{X}$, а через $\mathrm{Forb}(\mathbf{X})$ — такое минимальное множество графов $\mathbf{Y}$, что $\mathbf{X} = \mathrm{Free}(\mathbf{Y})$.

Далее kG обозначает граф, каждая из k компонент связности которого изоморфна графу G; $S(p)$ — дерево с тремя листьями, каждый из которых находится на расстоянии p от вершины степени 3; мост B_k — дерево с четырьмя листьями и двумя вершинами степени 3, расстояние между которыми равно k, причём каждый лист смежен с вершиной степени 3.

1. Критерий граничности

Пусть Π — какая-либо NP-трудная задача на графах. Наследственный класс графов $\mathbf{X}$ назовём Π-*простым*, если существует алгоритм, решающий задачу Π для графов из $\mathbf{X}$ за полиномиальное время, в противном случае класс $\mathbf{X}$ назовём Π-*сложным*. Наследственный класс $\mathbf{X}$ назовём Π-*предельным*, если существует последовательность $\mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_2 \supseteq \ldots$ Π-сложных классов такая, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{X}_i = \mathbf{X}$. Минимальный по включению Π-предельный класс называем Π-*граничным классом*.

Теорема 2. Π-*предельный класс* $\mathbf{A}$ *является* Π-*граничным тогда и* *только тогда, когда для каждого* $G \in \mathbf{A}$ *существует такое конечное множество графов* $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Forb}(\mathbf{A})$*, что класс* $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\})$ *является* Π*-простым.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует такой граф $G \in \mathbf{A}$, что для любого конечного множества $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Forb}(\mathbf{A})$ класс $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\})$ является Π-сложным. Занумеруем графы из $\mathrm{Forb}(\mathbf{A})$ натуральными числами: $\mathrm{Forb}(\mathbf{A}) = \{H_1, H_2, \ldots\}$. Каждый из классов $\mathbf{Y}_n = \mathrm{Free}(\{H_1, H_2, \ldots, H_n, G\})$ является Π-сложным. Но тогда класс

$$\mathbf{Y} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}_i = \mathbf{A} \cap \mathrm{Free}(\{G\}) \subset \mathbf{A}$$

является Π-предельным. Следовательно, класс $\mathbf{A}$ не Π-граничный.

Предположим теперь, что условие выполняется и $\mathbf{B}$ — наследственный класс, являющийся собственным подмножеством класса $\mathbf{A}$. Покажем, что тогда класс $\mathbf{B}$ не является Π-предельным.

Пусть $G \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ — конечное подмножество множества $\mathrm{Forb}(\mathbf{A})$, для которого класс $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\})$ является Π-простым. Допустим, что $\mathbf{Y}_1 \supseteq \mathbf{Y}_2 \supseteq \ldots$ — любая такая последовательность, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{Y}_i = \mathbf{B}$. В этой последовательности найдётся класс $\mathbf{Y}_n$, не содержащий графа G и всех графов из $\mathbf{X}$. Так как $\mathbf{Y}_n$ является подмножеством Π-простого класса $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\})$, то он сам Π-простой. Следовательно, в любой убывающей последовательности, сходящейся к $\mathbf{B}$, имеется Π-простой класс, поэтому $\mathbf{B}$ не Π-предельный. Теорема 2 доказана.

2. Класс T

Легко видеть, что множество $\mathrm{Forb}(\mathbf{T})$ состоит из всех циклов, всех мостов и графа $K_{1,4}$. Для $k \geqslant 1,\ p \geqslant 0,\ b \geqslant 0$ обозначим

$$\mathbf{U}(k,p,b) = \mathrm{Free}(\{B_i \mid 1 \leqslant i \leqslant b\} \cup \{C_i \mid 3 \leqslant i \leqslant b\} \cup \{K_{1,4}, kS_p\}).$$

Отметим, что $\mathbf{U}(k,p,b) = \mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\})$, где $\mathbf{X} \subset \mathrm{Forb}(\mathbf{T}),\ G = kS_p \in \mathbf{T}$. Применительно к классу $\mathbf{T}$ теорема 2 даёт следующий критерий.

Теорема 3. *Класс* $\mathbf{T}$ *является* Π*-граничным тогда и только тогда, когда он* Π*-предельный и для любых* k *и* p *существует такое* b*, что класс* $\mathbf{U}(k,p,b)$ Π*-простой.*

Доказательство. Допустим, $\mathbf{T}$ является Π-граничным. По теореме 2 для любых k и p существует такое конечное множество графов $\mathbf{X} \subseteq \mathrm{Forb}(\mathbf{T})$, что класс $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{kS_p\})$ является Π-простым. Пусть b —

максимум длин циклов и мостов, содержащихся в $\mathbf{X}$ (если $\mathbf{X}$ не содержит циклов и мостов, то полагаем $b = 0$). Тогда $\mathbf{U}(k,p,b) \subseteq \mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{kS_p\})$, следовательно, класс $\mathbf{U}(k,p,b)$ П-простой.

Для доказательства обратного утверждения достаточно заметить, что любой граф $G \in \mathbf{T}$ является подграфом графа kS_p при каких-нибудь k и p и при этом $\mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{G\}) \subseteq \mathrm{Free}(\mathbf{X} \cup \{kS_p\})$ для любого множества $\mathbf{X}$. Теорема 3 доказана.

Получим ещё одно достаточное условие граничности класса $\mathbf{T}$. Обозначим через $\mathbf{U}(k)$ класс всех графов, у которых степени не превосходят 3, а расстояния между вершинами степени 3 и длины циклов не меньше k.

Вершину степени 3 назовём *внутренней*, если не существует пути, соединяющего её с вершиной степени 1, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2. Обозначим через $\mathbf{V}(k)$ множество всех графов, у которых степени вершин не превосходят 3 и имеется не более k внутренних вершин.

Лемма 1. *Если для любого k класс $\mathbf{U}(k)$ является* П*-сложным, а класс $\mathbf{V}_k$* П*-простым, то класс $\mathbf{T}$* П*-граничный.*

Доказательство. Так как $\mathbf{U}(1) \supset \mathbf{U}(2) \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{U}(i) = \mathbf{T}$, то $\mathbf{T}$ — П-предельный. Пусть $k \geqslant 1$, $p \geqslant 0$. Положим $b = 2p + 4$ и покажем, что $\mathbf{U}(k,p,b) \subseteq \mathbf{V}(k-1)$. Пусть $G \in \mathbf{U}(k,p,b)$. Ясно, что степени вершин графа G не превосходят 3. Расстояние между вершинами степени 3 в этом графе не может быть меньше $2p+2$, иначе образовался бы порождённый мост длины не более $2p+1$ или цикл длины не более $2p+4$. Допустим, что в G есть k внутренних вершин. Каждая из них принадлежит порождённому подграфу S_p, причём эти подграфы не имеют общих вершин и нет рёбер, соединяющих вершины одного такого подграфа с вершинами другого. Но тогда эти k подграфов вместе образуют порождённый подграф kS_p. Значит, $G \in \mathbf{V}(k-1)$. Лемма 1 доказана.

3. Задача о наибольшем подграфе

Пусть $\mathbf{X}$ — класс графов. Подграф некоторого графа, принадлежащий $\mathbf{X}$, будем называть $\mathbf{X}$*-подграфом*, а $\mathbf{X}$-подграф с наибольшим числом рёбер — *наибольшим* $\mathbf{X}$*-подграфом*. Обозначим число рёбер в наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе графа G через $m_{\mathbf{X}}(G)$. Далее предполагаем, что $\mathbf{X}$ содержит одновершинный граф, тогда $m_{\mathbf{X}}(G)$ определено для любого графа G. Предполагается также, что существует алгоритм, распознающий принадлежность графа классу $\mathbf{X}$. Задача о наибольшем $\mathbf{X}$-подграфе, называемая далее задачей SUBGRAPH[$\mathbf{X}$], состоит в том, чтобы по данным графу G и числу k определить, верно ли, что $m_{\mathbf{X}}(G) \geqslant k$.

Напомним, что ребро графа называется *перешейком*, если при его удалении увеличивается число компонент связности. Операция добавления перешейка состоит в добавлении к графу ребра, соединяющего вершины из разных компонент связности. Операция s-кратного подразбиения ребра состоит в замене этого ребра путём длины $s+1$. Обратная операция s-слияния состоит в замене пути длины $s+1$, в котором все внутренние вершины имеют степень 2, одним ребром.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{X}$ — класс графов, замкнутый относительно добавления и удаления изолированных вершин, добавления и удаления перешейков, s-подразбиения и s-слияния. Если граф G' получен из графа G s-подразбиением некоторого ребра, то $m_{\mathbf{X}}(G') = m_{\mathbf{X}}(G) + s$.*

Доказательство. Допустим, G' получен из G заменой ребра e путём P длины $s+1$. Пусть H — наибольший $\mathbf{X}$-подграф графа G. Рассмотрим в графе G' подграф H', получающийся из H следующим образом. Если ребро e принадлежит H, то включаем в H' весь путь P, в противном случае включаем в H' весь этот путь, кроме одного (любого) ребра. Граф H' получается из графа H s-подразбиением ребра или добавлением изолированных вершин и перешейков, следовательно, принадлежит классу $\mathbf{X}$. Поэтому $m_{\mathbf{X}}(G') \geqslant m_{\mathbf{X}}(G) + s$.

Обратно, пусть H' — наибольший $\mathbf{X}$-подграф графа G'. Поскольку $\mathbf{X}$ замкнут относительно добавления изолированных вершин, то можно считать, что H' содержит все вершины пути P. Так как $\mathbf{X}$ замкнут относительно добавления перешейков, то он содержит либо все рёбра этого пути, либо все, кроме одного. В первом случае заменим этот путь одним ребром, во втором удалим из H' все рёбра этого пути (все они — перешейки в H') и все его вершины, кроме концевых. Получим граф H, являющийся подграфом графа G и принадлежащий классу $\mathbf{X}$. Следовательно, $m_{\mathbf{X}}(G) \geqslant m_{\mathbf{X}}(G') - s$. Лемма 2 доказана.

Через $\mathbf{D}(3)$ обозначим класс всех графов, у которых степени вершин не превосходят 3.

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{X}$ — класс графов, замкнутый относительно добавления и удаления изолированных вершин, добавления и удаления перешейков, s-подразбиения и s-слияния при некотором s. Если класс $\mathbf{D}(3)$ SUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-сложный, то класс $\mathbf{T}$ является SUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-граничным.*

Доказательство. Зафиксируем $t \geqslant 1$. Пусть $G \in \mathbf{D}(3)$. Выполнив

st-подразбиение каждого ребра графа G, получим граф $G' \in \mathbf{U}(st+1)$. По лемме 2 $m_{\mathbf{X}}(G') = m_{\mathbf{X}}(G) + stm$, где m — число рёбер в графе G, поэтому задача SUBGRAPH[$\mathbf{X}$] для графов из класса $\mathbf{D}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathbf{U}(st+1)$. Следовательно, класс $\mathbf{U}(k)$ является SUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-сложным при любом k.

Покажем, что класс $\mathbf{V}(k)$ при любом k является SUBGRAPH[$\mathbf{X}$]-простым. Пусть $G \in \mathbf{V}(k)$. Если в G есть вершина степени 1, то инцидентное ей ребро принадлежит любому наибольшему $\mathbf{X}$-подграфу графа G (ввиду замкнутости $\mathbf{X}$ относительно добавления изолированных вершин и перешейков). Поэтому можно считать, что в G каждая вершина имеет степень 2 или 3. Все вершины степени 3 в этом графе внутренние, поэтому в нём имеется не более k таких вершин. Если G' — граф, получаемый из графа G однократным применением операции s-слияния, то по лемме 2 $m_{\mathbf{X}}(G) = m_{\mathbf{X}}(G') + s$. Таким образом, задача SUBGRAPH[$\mathbf{X}$] для графов из $\mathbf{V}(k)$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из множества $Y \subseteq \mathbf{V}(k)$, состоящего из графов, в которых нет вершин степени 1, имеется не более k вершин степени 3 и к которым неприменима операция s-слияния. В таком графе длина любого пути, в котором все промежуточные вершины имеют степень 2, не превосходит s. Иначе говоря, это графы, которые можно получить из кубических графов с не более чем k вершинами заменой каждого ребра путём длины не более s. Число вершин в таком графе не превосходит $\frac{k(3s-1)}{2}$. Следовательно, при фиксированных k и s множество Y конечно. Теорема 4 доказана.

Пусть $\mathbf{P}$ — класс всех планарных графов, а $\mathbf{B}$ — класс всех двудольных графов. Известно [3], что класс $\mathbf{D}(3)$ является SUBGRAPH[$\mathbf{P}$]-сложным [7] и SUBGRAPH[$\mathbf{B}$]-сложным [3]. Остальные условия теоремы 4 также выполняются, если положить $s = 1$ для класса $\mathbf{P}$ и $s = 2$ для класса $\mathbf{B}$. Следовательно, справедлива

Теорема 5. *Класс* $\mathbf{T}$ *является* SUBGRAPH[$\mathbf{P}$]-*граничным и* SUBGRAPH[$\mathbf{B}$]-*граничным.*

4. Заключительные замечания

1. Нетрудно привести пример бесконечного множества задач, для которых класс $\mathbf{T}$ является граничным. Пусть $\mathbf{B}(d)$ — множество всех двудольных графов, у которых степени вершин не превосходят d. При $d \geqslant 3$ задача SUBGRAPH[$\mathbf{B}(d)$] для графов из $\mathbf{D}(3)$ совпадает с задачей SUBGRAPH[$\mathbf{B}$]. Поэтому класс $\mathbf{D}(3)$ является SUBGRAPH[$\mathbf{B}(d)$]-сложным, а класс $\mathbf{T}$ — SUBGRAPH[$\mathbf{B}(d)$]-граничным для любого $d \geqslant 3$.

2. Некоторые из приведённых результатов для задачи о наибольшем подграфе можно распространить на задачу о наибольшем порождённом подграфе. В ней требуется найти порождённый **X**-подграф данного графа с наибольшим числом вершин. Для этого случая справедливо утверждение, аналогичное теореме 4, нужно только условия замкнутости класса **X** относительно удаления изолированных вершин и перешейков заменить условием замкнутости относительно удаления любых вершин. Отсюда следует, что класс **T** является граничным для задачи о наибольшем порождённом планарном подграфе, так как в [8] доказано, что для графов из **D**(3) эта задача NP-полна.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. — Горький: Изд-во ГГУ, 1983. — С. 3–13.
2. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. — 1992. — Т. 4, вып. 4. — С. 34–40.
3. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
4. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discr. Appl. Math. — 2004. — V. 132. — P. 17–26.
5. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discr. Math. — 2004. — V. 285. — P. 1–6.
6. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theoret. Comp. Sci. — 2007. — V. 389. — P. 219–236.
7. **Faria L., Figueiredo C. H., Mendonça C. F. X.** Splitting number is NP-complete // Discr. Appl. Math. — 2001. — V. 108. — P. 65–83.
8. **Faria L., Figueiredo C. H., Gravier S., Mendonça C. F. X, Stolfi J.** On maximum planar induced subgraphs // Discr. Appl. Math. — 2006. — V. 154. — P. 1774–1782.

Алексеев Владимир Евгеньевич,
e-mail: ave@uic.nnov.ru
Малышев Дмитрий Сергеевич,
e-mail: ave@uic.nnov.ru

Статья поступила
16 июня 2008 г.
Переработанный вариант —
1 октября 2008 г.