

УДК 517.938

О связи динамики градиентно-подобного 3-диффеоморфизма со структурой характеристического пространства¹

О. В. Починка, А. А. Шутов

Национальный Исследовательский Университет Высшая Школа Экономики,
Нижний Новгород. E-mail: olga-pochinka@yandex.ru, ashutov@hse

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются градиентно-подобные диффеоморфизмы, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3 . Динамика любого такого диффеоморфизма f может быть представлена как движение от связного аттрактора A_f к связному репеллеру R_f . При этом характеристическое пространство $\hat{V}_f = V_f/f$, определяемое как пространство орбит ограничения диффеоморфизма f на множество $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$, является гладким связным 3-многообразием. В простейшем случае (например, когда диффеоморфизм f включается в поток) характеристическое пространство является прямым произведением $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, где \mathbb{S}_g — ориентируемая поверхность рода $g \geq 0$. В настоящей работе изучаются классы G_g градиентно-подобных диффеоморфизмов на M^3 , характеристическое многообразие которых диффеоморфно $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, $g \geq 0$. В работе показывается, что при $g > 0$ любая седловая точка диффеоморфизма из G_g имеет положительный тип ориентации. Устанавливается, что для произвольного $g > 0$ многообразие, допускающее диффеоморфизм $f \in G_g$ без гетероклинических кривых, является связной суммой g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$; а в случае $g = 0$ — 3-сферой \mathbb{S}^3 .

Ключевые слова: градиентно-подобный диффеоморфизм, характеристическое пространство, несущее многообразие, топология фазового пространства.

Введение и формулировка результатов

Пусть M^3 — замкнутое ориентируемое 3-многообразие и $f : M^3 \rightarrow M^3$ — структурно устойчивый диффеоморфизм с конечным неблуждающим множеством — *диффеоморфизм Морса-Смейла*. Обозначим через $MS(M^3)$ множество таких диффеоморфизмов. Динамика любого каскада $f \in MS(M^3)$ может быть представлена следующим образом (см., например, [3] и [4]). Обозначим через Ω_f^q , $q = 0, 1, 2, 3$ множество периодических точек p таких, что $\dim W_p^u = q$. Тогда $A_f = W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^u$ — связный аттрактор и $R_f = W_{\Omega_f^2 \cup \Omega_f^3}^s$ — связный репеллер с топологической размерностью, равной нулю или единице. Множества A_f и R_f не пересекаются, а каждая точка из множества $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ является блуждающей и движется под действием f от R_f к A_f . Пространство орбит $\hat{V}_f = V_f/f$ является гладким связным 3-многообразием и называется *характеристическим пространством*. Согласно [3] любое характеристическое пространство является *простым* многообразием, то есть оно либо неприводимо (любая цилиндрически вложенная в него 2-сфера ограничивает в нём 3-шар), либо диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Типом ориентации периодической точки p периода $per(p)$ диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ является число 1 или -1 в зависимости от того сохраняет отображение $f^{per(p)}|_{W_p^u} : W_p^u \rightarrow W_p^u$ ориентацию или нет.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-01-01637-а и 15-01-03687-а)

Непустое пересечение $W_p^s \cap W_q^u$, где p, q — различные седловые точки диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$, называется *гетероклиническим*, при этом в случае $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 1$ компонента связности пересечения $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической кривой*, а в случае $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 0$ компонента связности пересечения $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ называется *градиентно-подобным*, если он не имеет гетероклинических точек.

Обозначим через $G_g, g \geq 0$, класс градиентно-подобных диффеоморфизмов таких, что для любого $f \in G_g$ многообразие \hat{V}_f диффеоморфно $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, где \mathbb{S}_g — ориентируемая поверхность рода g . В силу работы [2] классу G_g принадлежат, в частности, все градиентно-подобные каскады, включающиеся в топологический поток. Обозначим через M_g гладкое 3-многообразие, являющееся связной суммой g копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ для $g > 0$ и являющееся 3-сферой \mathbb{S}^3 для $g = 0$.

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. *Любая седловая точка диффеоморфизма $f \in G_g, g > 0$, имеет положительный тип ориентации.*

Теорема 2. *Многообразие, допускающее диффеоморфизм $f \in G_g, g \geq 0$, без гетероклинических кривых, диффеоморфно M_g .²*

Благодарности. Авторы признательны Е. Я. Гуревич за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания.

1. Характеристические пространства

Напомним, что мы обозначили через $\Omega_f^q, q = 0, 1, 2, 3$, множество периодических точек p таких, что $\dim W_p^u = q$, положили $A_f = W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^u, R_f = W_{\Omega_f^3 \cup \Omega_f^2}^s$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. В [4] пространство орбит $\hat{V}_f = V_f/f$ названо *характеристическим пространством*. Обозначим через $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ естественную проекцию.

Пусть теперь $f \in G_g$. Тогда пространство орбит \hat{V}_f гомеоморфно $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$. Соответственно, группа $\pi_1(\hat{V}_f)$ изоморфна группе $\pi_1(\mathbb{S}_g) \times \mathbb{Z}$ и, следовательно, допускает эпиморфизм $\eta_g : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$. Для седловой точки σ диффеоморфизма f обозначим через $W_\sigma^2 (W_\sigma^1)$ двумерное (одномерное) инвариантное многообразие σ . Положим $\hat{W}_\sigma^2 = p_f(W_\sigma^2)$. Тогда множество \hat{W}_σ^2 является гладким тором (гладкой бутылкой Клейна) в многообразии \hat{V}_f , если диффеоморфизм $f^{per(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_σ^2 , причем $\eta_g(i_{\hat{W}_\sigma^2}(\pi_1(\hat{W}_\sigma^2))) \neq 0$, где $i_{\hat{W}_\sigma^2} : \hat{W}_\sigma^2 \rightarrow \hat{V}_f$ — отображение включения (см., например, [4]). Положим $\hat{W}_f^2 = \bigcup_{\sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)} \hat{W}_\sigma^2$. Выберем семейство $\{N(\hat{W}_\sigma^2), \sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)\}$ попарно

непересекающихся трубчатых окрестностей³ поверхностей $\{\hat{W}_\sigma^2, \sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)\}$. Каждая компонента связности множества $N(\hat{W}_\sigma^2)$ является двумерным тором \hat{T} таким, что

²Для $g = 0$ эта теорема следует из работы [5].

³*Трубчатая окрестность тора* — это многообразие, диффеоморфное $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ и, соответственно, её граница состоит из двух торов. *Трубчатая окрестность бутылки Клейна* — это неориентируемое локально тривиальное расслоение над бутылкой Клейна со слоем интервал, её граница состоит из одного тора.

$\eta_g(i_{\hat{T}^*}(\pi_1(\hat{T}))) \neq 0$, где $i_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow \hat{V}_f$ — отображение включения. Гомотопически нетривиальную замкнутую кривую $\hat{b} \subset \hat{T}$ такую, что $\eta_g(\hat{b}) = 0$ будем называть *меридианом* тора \hat{T} .

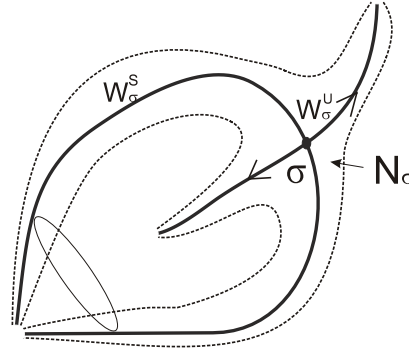


Рис. 1. f -инвариантная окрестность седловой точки σ

Для любой точки $\omega \in \Omega_f^0$ положим $V_\omega = W_\omega^s \setminus \omega$. Положим $V_0 = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} V_\omega$ и $\hat{V}_0 = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} \hat{V}_\omega$ и обозначим через $p_0 : V_0 \rightarrow \hat{V}_0$ естественную проекцию. Тогда каждая компонента связности многообразия \hat{V}_0 диффеоморфна $S^2 \times S^1$. Отметим, что $V_0 \setminus W_{\Omega_f^1}^u = V_f \setminus W_{\Omega_f^1}^s$. Для точки $\sigma \in \Omega_f^1$ положим $N_\sigma = p_f^{-1}(N(\hat{W}_\sigma^2)) \cup W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$. По построению N_σ — f -инвариантная окрестность периодической орбиты \mathcal{O}_σ , содержащая $W_{\mathcal{O}_\sigma}^s \cup W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ (см. рисунок 1). Положим $N_{\Omega_f^1} = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} N_\sigma$. Тогда имеет место равенство $V_0 \setminus N_{\Omega_f^1} = V_f \setminus N_{\Omega_f^1}$.

Положим $\hat{W}_\sigma^1 = p_0(W_\sigma^1)$. Множество \hat{W}_σ^1 является парой узлов (узлом) в многообразии \hat{V}_0 , если диффеоморфизм $f^{per(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_σ^1 (см., например, [4]). Положим $N(\hat{W}_\sigma^1) = p_0(N_\sigma)$, тогда $N(\hat{W}_\sigma^1)$ — трубчатая окрестность многообразия \hat{W}_σ^1 . Положим $\hat{N}_{\Omega_f^1}^2 = p_f(N_{\Omega_f^1})$ и $\hat{N}_{\Omega_f^1}^1 = p_0(N_{\Omega_f^1})$. Из равенства $V_0 \setminus N_{\Omega_f^1} = V_f \setminus N_{\Omega_f^1}$ следует, что многообразие $p_0(V_0 \setminus N_{\Omega_f^1})$ гомеоморфно многообразию $p_f(V_f \setminus N_{\Omega_f^1})$. Откуда получаем, что $\hat{V}_0 \setminus \hat{N}_{\Omega_f^1}^1$ гомеоморфно $\hat{V}_f \setminus \hat{N}_{\Omega_f^1}^2$.

Переход от многообразия \hat{V}_f к многообразию \hat{V}_0 состоит в удалении $\hat{N}_{\Omega_f^1}^2$ из \hat{V}_f и приклеивании к каждой границе полученного многообразия заполненного тора в силу диффеоморфизма, переводящего меридиан в меридиан⁴. Формализуем этот переход, определив операцию *перестройки* многообразия $\hat{V} = S_g \times S^1$ вдоль η_g -существенного тора $\hat{T} \subset S_g \times S^1$, то есть такого тора \hat{T} , что $\eta_g(i_{\hat{T}^*}(\pi_1(\hat{T}))) \neq 0$, где $i_{\hat{T}} : \hat{T} \rightarrow S_g \times S^1$ — отображение включения.

Пусть $N(\hat{T})$ — трубчатая окрестность \hat{T} и $\check{V} = \hat{V} \setminus N(\hat{T})$. Тогда многообразие $\partial\check{V}$ состоит из двух компонент связности, каждая из которых является двумерным тором.

⁴Двумерный диск d в заполненном торе \hat{Y} называется *меридианным*, если $\partial\hat{Y} \cap d = \partial d$ и ∂d не ограничивает диск в $\partial\hat{Y}$. Граница меридианного диска называется *меридианом*.

Положим $\hat{Y} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, где $\mathbb{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ и $\hat{\gamma} = (\{(0, 0)\} \times \mathbb{S}^1) \subset \hat{Y}$. Пусть $\hat{\beta}$ — меридиан заполненного тора \hat{Y} и $\zeta : (cl N(\hat{T}) \setminus \hat{T}) \rightarrow (\hat{Y} \setminus \hat{\gamma}) \times \mathbb{S}^0$ — диффеоморфизм, для которого $\eta_g([\zeta_{\hat{T}}^{-1}(\hat{\beta} \times \{\pm 1\})]) = 0$.

Определение 1. Будем говорить, что пространство $\hat{V}_{\hat{T}} = (\hat{V} \setminus \hat{T}) \cup_{\zeta_{\hat{W}}} (int \hat{Y} \times \mathbb{S}^0)$ получено перестройкой многообразия \hat{V} вдоль тора \hat{T} .

Аналогичным образом вводится перестройка многообразия \hat{V} вдоль η_g -существенной бутылки Клейна \hat{K} , основанная на том, что трубчатая окрестность $N(\hat{K})$ бутылки Клейна \hat{K} без самой бутылки Клейна является связной и диффеоморфна многообразию $int \hat{Y} \setminus \hat{\gamma}$.

На рисунке 2 а (2 б) схематично изображена перестройка многообразия $\hat{V} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ вдоль тора (бутылки Клейна).

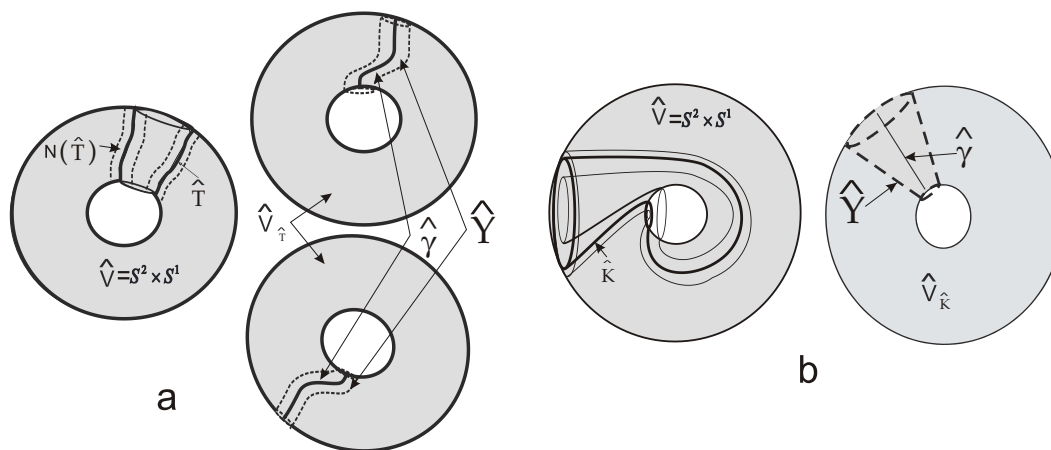


Рис. 2. Перестройка многообразия $\hat{V} = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ вдоль тора \hat{T} и бутылки Клейна \hat{K}

Для доказательства теорем 1 и 2 нам понадобятся приведённые ниже топологические факты, их следствия и леммы.

1. **Факт.** Любой гомотопически нетривиальный гладкий тор в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ограничивает в нём заполненный тор (см., например, [8]).
2. **Факт.** Пусть \hat{Y}, \hat{Y}' — заполненные торы. Гомеоморфизм $h : \partial\hat{Y} \rightarrow \partial\hat{Y}'$ тогда и только тогда продолжается до гомеоморфизма $H : \hat{Y} \rightarrow \hat{Y}'$, когда он переводит меридиан тора \hat{Y} в меридиан тора \hat{Y}' (см., например, [9]).
3. **Факт.** Собственно вложенная в многообразии X ориентируемая поверхность⁵ F , не являющаяся 2-сферой, несжимаема⁶ тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(i_{F*}) = 0$,

⁵Поверхность F называется *собственно вложенной* в многообразии X , если $\partial X \cap F = \partial F$.

⁶Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

1) существует нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset int F$ и гладко вложенный 2-диск $D \subset int X$ такой, что $D \cap F = \partial D = c$;

2) существует 3-шар $B \subset int X$ такой, что $F = \partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X , если она не является сжимаемой в X .

где $i_F : F \rightarrow X$ — отображение включения ([8]).

4. **Факт.** Если 3-многообразие X неприводимо, тогда двумерный тор $T \subset X$, не лежащий в 3-шаре, является сжимаемым тогда и только тогда, когда он ограничивает заполненный тор в X ([8], exercise 6).
5. **Факт.** Любая несжимаемая поверхность в связном компактном неприводимом многообразии либо изотопна поверхности, состоящей из слоёв вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, либо трансверсальна всем таким слоям ([6], proposition 1.11).
6. **Факт.** Многообразие $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, g > 0$ неприводимо ([6], proposition 1.12).
7. **Факт.** Многообразие диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тогда и только тогда, когда оно получается из двух гладких заполненных торов склейкой их границ посредством диффеоморфизма, переводящего меридиан в меридиан (см., например, предложение 7.1 книги [1]).
8. **Факт.** Пусть $f \in MS(M^3)$ — диффеоморфизм без гетероклинических кривых и такой, что Ω_f состоит из r_f седловых и l_f узловых точек. Тогда $g_f = \frac{r_f - l_f + 2}{2}$ является целым неотрицательным числом и справедливы следующие утверждения:
 - 1) если $g_f = 0$, то M^3 — 3-сфера;
 - 2) если $g_f > 0$, то M^3 — связная сумма g_f копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. ([4])

Следствие 1. Пусть \hat{T} — η_g -существенный тор на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. В силу факта 1, тор \hat{T} ограничивает заполненный тор. При этом, если тор \hat{T} ограничивает два заполненных тора, то, в силу факта 7, меридиан одного из них является меридианом другого.

Следствие 2. Пусть \hat{T} — η_g -существенный тор на многообразии $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, g > 0$. В силу фактов 3, 4, 5, 6 тор \hat{T} либо ограничивает заполненный тор в $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, либо изотопен поверхности, состоящей из слоёв вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, где множество таких точек x образует на \mathbb{S}_g не гомотопную нулю кривую $c_{\hat{T}}$.

Лемма 1. Пусть $C \subset \mathbb{S}_g, g > 0$ — не гомотопная нулю кривая, и поверхность \tilde{S} получена из \mathbb{S}_g удалением трубчатой окрестности N кривой C и приклеиванием 2-диска к каждой граничной компоненте поверхности $\mathbb{S}_g \setminus N$. Тогда \tilde{S} гомеоморфна \mathbb{S}_{g-1} , если множество $\mathbb{S}_g \setminus N$ связно, и гомеоморфна дизъюнктному объединению поверхностей $\mathbb{S}_{\tilde{g}}, \tilde{g} > 0$ и $\mathbb{S}_{g-\tilde{g}}$, если множество $\mathbb{S}_g \setminus N$ не связно.

Доказательство. Если N делит \mathbb{S}_g на две компоненты, то \mathbb{S}_g является связной суммой поверхностей, полученных посредством приклеивания дисков к $\mathbb{S}_g \setminus N$. Тогда утверждение следует из единственности представления ориентируемой поверхности рода $g > 0$ в виде связной суммы g торов (см., например, [7]).

Пусть N не делит \mathbb{S}_g и S — поверхность, полученная из \mathbb{S}_g удалением N и прилеиванием дисков D_1, D_2 к каждой граничной компоненте поверхности $\mathbb{S}_g \setminus N$. Обозначим через C_1, C_2 граничные окружности кольца N такие, что $\partial D_i = C_i, i = 1, 2$. Поскольку N не делит \mathbb{S}_g , то существует кольцо $H \subset \mathbb{S}_g$, пересекающееся с каждой окружностью C_1, C_2 в точности по одному отрезку (см. рисунок 3). В поверхности S диски D_1, D_2

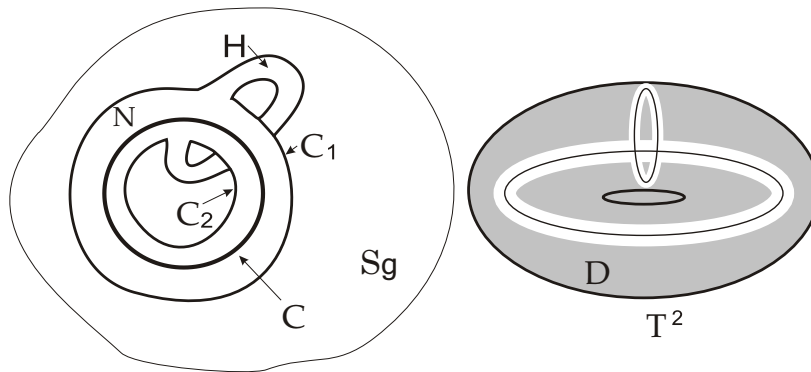


Рис. 3. Иллюстрация к доказательству леммы 1

приклеиваются к кривым C_1 , C_2 и объединение $D_1 \cup H \cup D_2$ является 2-диском. Еще один 2-диск D выделен серым цветом в многообразии \mathbb{T}^2 . При этом многообразие $\mathbb{T}^2 \setminus D$ гомеоморфно $N \cup H$. Тогда связная сумма $S \# \mathbb{T}^2$, получаемая посредством именно этих 2-дисков гомеоморфна поверхности \mathbb{S}_g . Откуда следует, что поверхность S гомеоморфна \mathbb{S}_{g-1} . \square

Лемма 2. В многообразии $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, $g > 0$ не существует η_g -существенной бутылки Клейна.

Доказательство. Предположим противное: в многообразии $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, $g > 0$ существует η_g -существенная бутылка Клейна \hat{K} . Тогда граница \hat{T} её трубчатой окрестности $N(\hat{K})$ является η_g -существенным тором таким, что нетривиальный гомоморфизм $\eta_g i_{\hat{T}*}$ не является сюръективным. В силу чего тор \hat{T} не может быть изотопен поверхности, состоящей из слоёв вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, а значит, в силу Следствия 2, тор \hat{T} ограничивает заполненный тор \hat{Y} в $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$. Таким образом многообразие $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ является склейкой заполненного тора \hat{Y} и трубчатой окрестности $N(\hat{K})$ бутылки Клейна. Пусть $[a]$ и $[b]$ образующие фундаментальной группы тора \hat{T} такие, что b — меридиан заполненного тора \hat{Y} и $[a]$ — образующая фундаментальной группы заполненного тора \hat{Y} . Тогда образующими трубчатой окрестности $N(\hat{K})$ являются элементы $[c]$ и $[b]$, где $[c]^2 = [a]$. Отсюда по теореме Зейферта – Ван Кампена (см., например, [7]) следует, что фундаментальная группа многообразия $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ имеет не более двух образующих. Получили противоречие с тем, что число образующих фундаментальной группы многообразия $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, $g > 0$ не менее трёх. \square

Лемма 3. Пусть $\hat{V} = \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$, $g \geq 0$ и $\hat{T} \subset \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ — η_g -существенный тор. Тогда многообразии $\hat{V}_{\hat{T}}$ имеет следующий топологический тип:

- 1) если $g \geq 0$ и \hat{T} ограничивает заполненный тор, то $\hat{V}_{\hat{T}}$ гомеоморфно дизъюнктному объединению многообразий $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$;
- 2) если $g > 0$ и \hat{T} не ограничивает заполненный тор, то $\hat{V}_{\hat{T}}$ гомеоморфно $\mathbb{S}_{g-1} \times \mathbb{S}^1$ в случае связности множества $\hat{V} \setminus \hat{T}$ и гомеоморфно дизъюнктному объединению многообразий $\mathbb{S}_{\tilde{g}} \times \mathbb{S}^1$, $\tilde{g} > 0$ и $\mathbb{S}_{g-\tilde{g}} \times \mathbb{S}^1$ в случае несвязности множества $\hat{V} \setminus \hat{T}$.

Доказательство. Первое утверждение леммы следует из фактов 2 и 7, второе — из следствия 2 и леммы 1. \square

2. Доказательство основных теорем

Теорема 1 Любая седловая точка диффеоморфизма $f \in G_g, g > 0$ имеет положительный тип ориентации.

Доказательство. Предположим противное: диффеоморфизм $f \in G_g, g > 0$ имеет седловую точку σ с отрицательным типом ориентации. Напомним, что мы обозначили через W_σ^2 двумерное инвариантное многообразие σ и положили $\hat{W}_\sigma^2 = p_f(W_\sigma^2)$. Поскольку диффеоморфизм $f^{per(\sigma)}$ меняет ориентацию W_σ^2 , то множество \hat{W}_σ^2 является гладкой η_g -существенной бутылкой Клейна в многообразии \hat{V}_f . Получили противоречие с леммой 2 \square

Теорема 2 Многообразия, допускающие диффеоморфизм $f \in G_g, g \geq 0$ без гетероклинических кривых, диффеоморфно M_g .

Доказательство. Не уменьшая общности можно считать все неблуждающие точки диффеоморфизма f неподвижными и имеющими положительный тип ориентации (в противном случае можно вместо f рассмотреть его подходящую степень). Тогда множество \hat{W}_σ^2 для любого $\sigma \in \Omega_f^1$ является η_g -существенным тором в многообразии $\hat{V}_f = \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$. Обозначим через r_f^1 число точек в множестве Ω_f^1 . Согласно разделу 1, число компонент связности многообразия \hat{V}_0 совпадает с числом стоков диффеоморфизма f , обозначим через l_f^1 это число. С другой стороны каждая компонента связности многообразия \hat{V}_0 гомеоморфна многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и \hat{V}_0 получается из \hat{V}_f операцией перестройки вдоль тором $\hat{W}_\sigma^2, \sigma \in \Omega_f^1$. В силу следствия 3, числа r_f^1 и l_f^1 связаны соотношением $r_f^1 - l_f^1 + 1 = g$. Рассуждая аналогичным образом для множества Ω_f^2 , мы получим, что число r_f^2 точек в множестве Ω_f^2 и число l_f^2 источников диффеоморфизма f связаны соотношением $r_f^2 - l_f^2 + 1 = g$. Таким образом, Ω_f состоит из $r_f = r_f^1 + r_f^2$ седловых и $l_f = l_f^1 + l_f^2$ узловых точек и $g = \frac{r_f - l_f + 2}{2}$. В силу факта 8, объемлющее многообразие диффеоморфизма f гомеоморфно многообразию M_g . \square

Список цитируемых источников

1. Фоменко А. Т. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. — Москва–Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”. Ижевский институт компьютерных исследований, 1999. — 252 с.
2. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., Починка О.В. О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла в топологический поток на многообразиях размерности большей двух. — Математические заметки. — 2012. — Т. 91:5. — С. 791–794.
3. В. Гринес, В. Медведев, О. Починка, Е. Жуносова. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла. — Труды МИАН им. В.А. Стеклова. — 2010. — Т. 271. — С. 111–133.
4. Гринес В.З., Починка О.В. Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях. — Успехи математических наук. — 2013. — Т. 68:1(409). — С. 129–188.
5. Гринес В.З., Починка О.В. О простом изотопическом классе диффеоморфизма “источник–сток” на 3-сфере. — Математические заметки. — 2013. — Т. 94:6. — С. 825–842.
6. Hatcher A. Notes on Basic 3-Manifold Topology. — Cornell University, 2001.
7. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. — М.: Мир, 1983. — 304 с.

8. *Neumann W. D.* Notes on Geometry and 3-Manifolds. — Bolyai Soc. Math. Stud. 8. — 1999. — 191–267.
9. *Rolfsen D.* Knots and links. — University of British Columbia. Math. Lecture Series, 7, 1990.

Получена 27.10.2014